

Artur WIROWSKI^{*}
Politechnika Łódzka

DRGANIA WŁASNE PASMA PŁYTOWEGO Z MATERIAŁU O FUNKCJONALNIE ZMIENNYCH WŁASNOŚCIACH

Streszczenie. Przedmiotem niniejszego artykułu jest analiza drgań własnych pasma płytowego, wykonanego z kompozytu o funkcjonalnie zmiennych własnościach. Rozważa się dwufazowy kompozyt, którego makrowłasności w jednym kierunku są opisane funkcjami wolnozmiennymi, a w drugim kierunku są stałe.

Podstawowym celem pracy jest stworzenie modelu uśrednionego, pozwalającego na określenie wpływu wielkości mikrostruktury na postać i częstotliwość drgań własnych pasma płytowego. Proponowane techniki modelowania są oparte na metodzie tolerancyjnego uśredniania równań ruchu kompozytu, zakładającej, że rozwiązanie funkcja – ugięcia płyty składa się z części wolno- oraz periodycznie zmiennej. Tak wyprowadzone uogólnione równania są zastosowane do konkretnego przykładu analizy szczegółowego problemu drgań własnych pasma płytowego.

ONE SELF-VIBRATION OF LANE PLATE MADE FROM FUNCTIONALY GRADED MATERIAL

Summary. The subject of this paper is self-vibration of lane plate made from functionally graded material. Considered material has periodic properties in one direction and slowly and functionally graded properties in the other.

The main attention is given to general description of the effect of microstructure size on the overall response of a composite. The modeling approach is based on the tolerance averaging of the motion equation. The general results are illustrated by the analysis of a specific problem.

^{*} Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Bohdan Michalak, prof. Politechniki Łódzkiej.

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań są drgania własne pasma płytowego, wykonanego z dwuskładnikowego kompozytu, jak na rysunku 1. Możemy zauważyć, że kompozyt ten ma periodyczną strukturę wzdłuż kierunku x_1 oraz wolnozmienną wzdłuż kierunku x_2 . Jest to szczególny przypadek materiału o funkcjonalnie zmiennych własnościach (FGM)[†]. Teoria i zastosowania FGM były szeroko omawiane w wielu publikacjach – w szczególności możemy przytoczyć pracę [1], gdzie została zamieszczona bardzo obszerna literatura dotycząca rozważanego zagadnienia.

Podstawowym problemem modelowania tego typu kompozytów jest opis niejednorodnej, nieciągłej i szybko oscylującej struktury materiałowej przez równania różniczkowe o wolnozmiennych i ciągłych współczynnikach. W wielu przypadkach problem ten może być rozwiązywany za pomocą teorii homogenizacji. Jednak w rozważanym zagadnieniu zastosowanie tej teorii nie pozwoliłoby na określenie wpływu wielkości mikrostruktury na rozwiązanie, co jest podstawowym celem pracy.

Uwzględnienie mikrostruktury jest natomiast możliwe za pomocą teorii tolerancyjnego uśredniania. Wychodząc od ogólnych równań ruchu, zdefiniowanych dla pasma płytowego, poprzez ich odpowiednie uśrednienie otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych, o ciągłych współczynnikach. Proponowana technika uśredniania jest szczegółowym zastosowaniem ogólnej teorii rozwiniętej w pracach dotyczących analizy kompozytów, napisanych przez Woźniaka i Wierzbickiego [6], oraz w publikacjach dotyczących laminatów o funkcjonalnie zmiennych własnościach, napisanych przez Rychlewską, Woźniaka [7] i przez innych autorów (np. Jędrusiak[2][3], Michałak [3][4][5]).

W artykule są stosowane następujące oznaczenia: cząstkowe pochodne względem współrzędnych x_α , $\alpha = 1, 2$ są oznaczane przez ∂_α . Wprowadzamy operatory gradientowe $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$; $\partial = (\partial_1, 0)$; $\bar{\nabla} = (0, \partial_2)$ oraz wektor jednostkowy $e = (1, 0)$. Małymi, pogrubionymi literami będziemy oznaczali wektory, dużymi pogrubionymi zaś tensory. Pochodna czasowa będzie oznaczana kropką, stawianą nad daną funkcją: $f(t) = \dot{f}$.

[†] FGM – ang. Functionally graded material.

2. Założenia modelowania

Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych $0 \ x_1 \ x_2$. Przez Ω oznaczmy obszar zajmowany przez płytę. Wówczas Ω możemy zdefiniować jako $\Omega = I \times \Pi$, gdzie $I = (-\alpha, \alpha)$ oraz $\Pi = (0, \beta)$. Na potrzeby opisu niejednorodnego, dwuskładnikowego kompozytu możemy przedział $I = (-\alpha, \alpha)$ podzielić na 2 m podprzedziałów, takich że:

$$I_n = \begin{cases} ((n-1)\lambda, n\lambda) & \text{if } n = 1, 2, \dots, m \\ n\lambda, (n+1)\lambda & \text{if } n = -1, -2, \dots, -m, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $\lambda = \alpha / m$. Przy czym zakładamy, że $\lambda \ll 1$, co oznacza że liczba podprzedziałów m jest odpowiednio duża.

Wprowadźmy funkcję $\delta = \delta(x_2)$, $x_2 \in [0, \beta]$ ciągłą, wolnozmienną, silnie monotoniczną oraz dodatnią w całej swej dziedzinie. Pozwala nam ona zdefiniować następujący obszar:

$$I_n^*(x_2) = \begin{cases} ((n-1)\lambda + 0,5\delta, n\lambda - 0,5\delta) & \text{if } n = 1, 2, \dots, m \\ n\lambda - 0,5\delta, (n+1)\lambda + 0,5\delta & \text{if } n = -1, -2, \dots, -m \end{cases} \quad (2)$$

Zauważmy, że każdy obszar, zdefiniowany jako: $I_n^*(x_2)$, jest zajmowany przez materiał o jednorodnych własnościach, oznaczonych jako E' oraz ρ' . Podobnie możemy określić obszar $I_n^{**}(x_2) = I_n \setminus I_n^*$, w którym w każdym podobzdarze będzie się znajdował materiał o własnościach oznaczonych jako E'' oraz ρ'' . Powyższa definicja podobzdarów stanie się jasna, gdy porównamy ją z rysunkiem 1.

Zdefiniujmy teraz pojęcie funkcji wolnozmiennnej, które jest podstawowym pojęciem w teorii tolerancyjnego uśredniania. Opiszmy parametry $\varepsilon > 0$ oraz $\varepsilon \ll 1$. Funkcja $F(x_1)$, gdzie $x_1 \in [-\alpha, \alpha]$, a wraz z pochodnymi dożądanego rzędu będziemy nazywać wolnozmienną, jeżeli dla każdego $x_1 \in [-\alpha, \alpha]$ i $(x_1 + \Delta x_1) \in [-\alpha, \alpha]$ jest spełniony warunek:

$$|\Delta x_1| \leq \lambda \Rightarrow |F(x_1 + \Delta x_1) - F(x_1)| \leq \varepsilon F_0 \quad (3)$$

dla $F_0 > 0$, gdzie F_0 jest pewną miarą określoną przez wartości funkcji F oraz jeżeli zachodzi analogiczny zdefiniowany warunek dla pochodnych funkcji F . Funkcję wolnozmienną będziemy oznaczali jako: $F(\cdot) \in SV_\varepsilon(\lambda)$.

Następnie wprowadzimy pojęcie funkcji kształtu. Niech dane będą funkcje $g(x_1, x_2)$, $x_1 \in R$; $x_2 \in [0, \beta]$ ciągła i periodyczna z okresem λ w x_1 , dla każdego $x_2 \in [0, \beta]$. Przebieg funkcji kształtu w przedziale I_n przedstawiono na rysunku 2. Niech v' oraz v'' będą zdefiniowane jako:

$$v'(x_2) = \frac{\delta(x_2)}{\lambda} \quad (4)$$

$$v''(x_2) = 1 - v'(x_2) \quad (5)$$

Zależność funkcji kształtu od argumentu x_2 jest dana przez parametr $v = \sqrt{v'(x_2)v''(x_2)}$.

Zdefiniujemy uśrednioną wartość z funkcji f w $I \times \Pi$ jako:

$$\langle f \rangle(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(x_1 + \eta, x_2) d\eta \quad x_1 \in \left[-\alpha + \frac{\lambda}{2}, \alpha - \frac{\lambda}{2} \right] \quad (6)$$

Zauważmy, że jeżeli funkcja f jest periodyczna względem argumentu x_1 z okresem λ , to $\langle f \rangle$ jest niezależne od x_1 .

Punktem wyjścia procedury modelowania jest dekompozycja przemieszczeń ciała:

$$w(x_1, x_2, t) \quad x_1 \in [-\alpha, \alpha] \quad (x_2) \in \bar{\Pi}$$

na część uśrednioną $w^0 = \langle w \rangle$ oraz część oscylującą określoną jako: $\tilde{w} = w - \langle w \rangle$.

Część oscylacyjna pola przemieszczeń może być przybliżona iloczynem funkcji $g(x_1, x_2)V(x_1, x_2, t)$, gdzie funkcja $g(x_1, x_2)$ jest przyjętą funkcją kształtu. Funkcje: $w^0(\cdot, t)$ oraz $V(\cdot, t)$ są funkcjami wolnozmiennymi wraz ze swoimi pochodnymi. Powyższe założenia możemy zapisać formalnie jako:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) &= w^0(x_1, x_2, t) + g(x_1, x_2)V(x_1, x_2, t) \\ w^0(x_1, x_2, t) &\in SV_\varepsilon(\lambda) \\ V(x_1, x_2, t) &\in SV_\varepsilon(\lambda) \end{aligned} \quad (7)$$

dla każdego $(x_2) \in \Pi$ oraz dla każdej chwili t .

Drugim założeniem modelowania jest pominięcie wyrażień rzędu ε podczas procedury uśredniania. Prowadzi to do wniosku, że jeżeli mamy daną pewną całkowaną funkcję f oraz funkcję wolnozmienną F i funkcję kształtu g , to zachodzą związki:

$$\langle fF \rangle = \langle f \rangle F \quad (8)$$

$$\langle f \nabla(Fg) \rangle = \langle f \partial g \rangle F + \langle fg \rangle \bar{\nabla} F \quad (9)$$

Powyższe wzory są pewnym uogólnieniem sformułowań wyprowadzonych przez Woźniaka i Wierzbickiego [6] dla struktur periodycznych.

3. Równania modelu uśrednionego

Punktem wyjścia do dalszych rozważań jest liniowa teoria sprężystości. Rozważmy następujące związki [8]:

- pomiędzy naprężeniem a odkształceniem:

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{\alpha\beta} \quad (10)$$

- równania konstytutywne:

$$m^{\alpha\beta} = DH^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad (11)$$

gdzie: $H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \{ g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} - \nu (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\mu} + \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\gamma}) \}$ oraz $D \equiv \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$

E, ν są odpowiednio modułem Younga oraz stałą Poissona, a δ jest grubością płyty,

- równania ruchu:

$$m^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta} + p - \rho \ddot{w} = 0 \quad (12)$$

Jeżeli w powyższych równaniach współczynniki są szybko oscylującymi Δ periodycznymi funkcjami, to równania te są zbyt skomplikowane, aby można je było z powodzeniem rozwiązywać.

Podstawiając prawą stronę równania (7) do równań (10)-(12) i korzystając z techniki uśredniania tolerancyjnego otrzymujemy następujący układ uśrednionych równań ruchu dla płyt wykonanych z materiału o funkcyjnie zmiennych własnościach:[†]

$$\begin{aligned} & \langle \langle DH^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle w_{,\gamma\delta}^0 \rangle_{,\alpha\beta} + \langle \langle DH^{\alpha\beta 11} g_{,11} \rangle V \rangle_{,\alpha\beta} + \langle \langle DH^{\alpha\beta 22} g \rangle V_{,22} \rangle_{,\alpha\beta} + \langle \rho \rangle \ddot{w}^0 = 0 \\ & \langle g_{,11} DH^{11\gamma\delta} \rangle w_{,\gamma\delta}^0 + \langle g_{,11} DH^{1111} g_{,11} \rangle V + \langle g_{,11} DH^{1122} g \rangle V_{,22} + \langle \langle g DH^{22\gamma\delta} \rangle w_{,\gamma\delta}^0 \rangle_{,22} + \\ & + \langle \langle g DH^{2211} g_{,11} \rangle V \rangle_{,22} + \langle \langle g DH^{2222} g^\beta \rangle V_{,22} \rangle_{,22} + \langle \rho g g \rangle \ddot{V} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

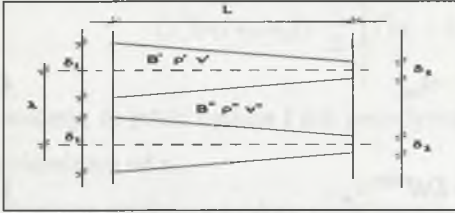
Zapisując powyższe równania dla pasma płytowego otrzymujemy następujący układ równań (podkreślone zostały człony wynikające z uwzględnienia parametru mikrostruktury):

$$\begin{aligned} & \langle \langle DH^{2222} \rangle w_{,22}^0 \rangle_{,22} + \langle \langle DH^{2211} g_{,11} \rangle V \rangle_{,22} + \langle \langle DH^{2222} g \rangle V_{,22} \rangle_{,22} + \langle \rho \rangle \ddot{w}^0 = 0 \\ & \langle g_{,11} DH^{1122} \rangle w_{,22}^0 + \langle g_{,11} DH^{1111} g_{,11} \rangle V + \langle g_{,11} DH^{1122} g \rangle V_{,22} + \langle \langle g DH^{2222} \rangle w_{,22}^0 \rangle_{,22} + \\ & + \langle \langle g DH^{2211} g_{,11} \rangle V \rangle_{,22} + \langle \langle g DH^{2222} g \rangle V_{,22} \rangle_{,22} + \langle \rho g g \rangle \ddot{V} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

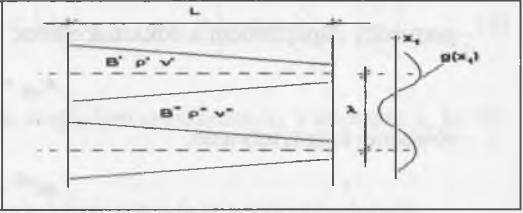
[†] Procedura wyprowadzenia poniższego wzoru jest szerzej omówiona w pracy: Wirowski A., Michalak B.: The dynamic modelling of longitudinally graded stratified solids, w trakcie publikacji, jednakże zastosowanie jej do omawianego pasma płytowego i wyprowadzenie wzoru (14) jest osiągnięciem własnym autora, publikowanym po raz pierwszy.

4. Drgania własne pasma płytowego

Powyższe, ogólne równania modelu uśrednionego wykorzystamy do znalezienia częstości drgań własnych pasma płytowego wykonanego z dwuskładnikowego kompozytu (rys. 1).



Rys. 1. Analizowany kompozyt
Fig. 1. Analysed composite



Rys. 2. Przyjęta funkcja kształtu $g(x_1)$
Fig. 2. Established shape function $g(x_1)$

Rozwiązania poszukujemy w postaci iloczynu funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$w^0(x_2, t) = \bar{w}(x_2) \cos(\omega t), \quad V(x_2, t) = \bar{V}(x_2) \cos(\omega t) \quad (15)$$

Zakładamy także, że pochodne wyrazów uśrednionych po kierunku x_2 są pomijalnie małe w stosunku do pozostałych wyrażań.

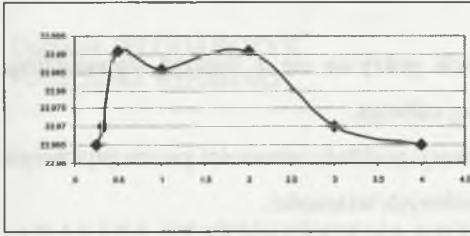
Za [3] przyjmujemy funkcję kształtu g jako: $g = \lambda^2 \cos\left(\frac{2\Pi}{\lambda} x_1\right)$ (rys. 2) (16),

$$a \quad H^{1111} = 1, \quad H^{1122} = H^{2211} = \nu, \quad H^{2222} = 1, \quad H^{1212} = H^{1221} = H^{1221} = H^{2112} = 1 - \frac{\nu}{2}, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Rozważmy teraz pasmo płytowe wykonane z dwóch materiałów o następujących parametrach: $E_1 = 30$ GPa, $\nu_1 = 0.4$, $\rho_1 = 2200$ kg/m³ oraz $E_2 = 209$ GPa, $\nu_2 = 0.3$, $\rho_2 = 7800$ kg/m³ i grubości $h = 0,1$ m. Obliczenia przeprowadzimy dla różnych parametrów geometrycznych pasma (rys. 1). Będziemy badać wpływ stosunku δ_1 / δ_2 , δ_1 / λ oraz λ / L na częstość drgań własnych pasma.

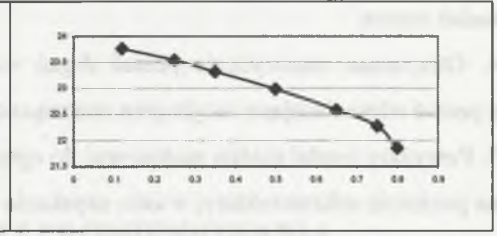
Obliczenia przeprowadzono za pomocą metody różnic skończonych, przyjmując warunki swobodnego podparcia obu brzegów pasma. Po zdyskretyzowaniu układu równań (14) wraz modułami i rozwiązaniu numerycznym zagadnienia własnego otrzymywano ciąg wartości własnych, odpowiadających kolejnym częstościom drgań własnych. Najmniejsza wartość własna odpowiadała zawsze pierwszej wartości własnej, określonej dla przemieszczenia w . Niestety wartość własna odpowiadająca funkcji oscylacji V jest niemożliwa do określenia za pomocą zastosowanego algorytmu, ponieważ jej wartość, będąca kilka rzędów wielkości większa, jest nie do rozróżnienia z wyższymi częstościami własnymi, odpowiadającymi funkcji w . Rozwiązanie tego problemu stanowi przedmiot dalszych badań autora.

Poniższe wykresy przedstawiają otrzymane zależności częstotści drgań własnych od zmienianych parametrów geometrycznych pasma.



Rys. 3. Zależność ω^2 od stosunku δ_1 / δ_2 przy ustalonym $\lambda = 1,0$ m

Fig. 3. Dependence ω^2 on proportion δ_1 / δ_2 at established $\lambda = 1,0$ m

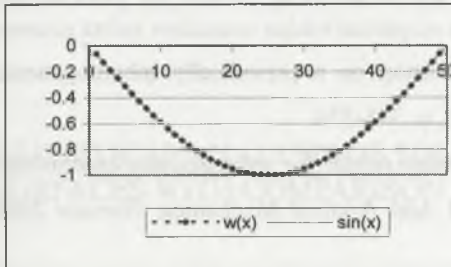


Rys. 4. Zależność ω^2 od stosunku δ_1 / λ przy ustalonym stosunku $\delta_1 / \delta_2 = 1$

Fig. 4. Dependence ω^2 on proportion δ_1 / λ at established proportion $\delta_1 / \delta_2 = 1$

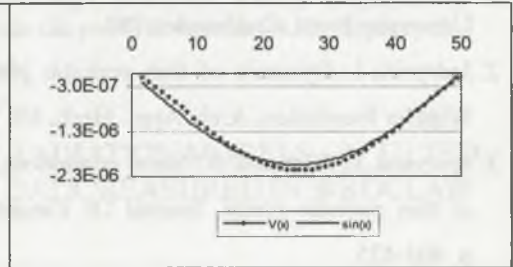
Natomiast parametr λ / L nie ma jakiegokolwiek wpływu na częstotść drgań pasma.

Otrzymano także wektory własne odpowiadające postaciom drgań własnych pasma i porównano je z funkcją $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, bardzo często przyjmowaną jako postać drgań własnych.



Rys. 5. Zestawienie otrzymanej numerycznie postaci drgań $w(x)$ z funkcją $\sin(x)$

Fig. 5. Comparison between numerical given vibration form $w(x)$ and $\sin(x)$ function



Rys. 6. Zestawienie otrzymanej numerycznie postaci zaburzenia $V(x)$ z funkcją $\sin(x)$

Fig. 6. Comparison between numerical given disturbance form $V(x)$ and $\sin(x)$ function

5. Wnioski

1. Zagadnienie drgań własnych płyty wykonanej z materiału gradientowego może z powodzeniem być rozwiązywane za pomocą techniki tolerancyjnego uśredniania.
2. Współczynniki w otrzymanym równaniu różniczkowym modelu (14) są opisane za pomocą funkcji wolnozmiennych.

3. Badane parametry mikrostruktury mają niewielki wpływ na podstawową częstość drgań płyty, natomiast ich wpływ na dodatkową częstość drgań płyty jest przedmiotem dalszych badań autora.
4. Otrzymana numerycznie postać drgań własnych pokrywa się z funkcją sinusoidalną, a postać odpowiadająca oscylacjom znacząco od niej odbiega.
5. Powyższy model można zastosować do optymalizacji rozkładu własności pasma płytowego na poziomie mikrostruktury, w celu uzyskania określonych własności.
6. Zaproponowany model uwzględnia nie tylko podstawowe częstości drgań, ale także dodatkowe, wynikające z uwzględnienia mikrostruktury – dzięki temu pozwala na pełniejszą analizę problemu drgań własnych płyty.

LITERATURA

1. Suresh S, Mortensen A.: *Fundamentals of functionally graded materials*, IOM Com. University Press, Cambridge 1998.
2. Jędrzyśiak J.: Dynamic of thin periodic plates resting on a periodically inhomogeneous Winkler foundation, *Arch. Appl. Mech.* 69, 1999, p. 345-356.
3. Jędrzyśiak J., Michalak B.: Some remarks on dynamic results for averaged and exact models of thin periodic plates, *Journal Of Theoretical And Applied Mechanics*, Warsaw 2005, p. 405-425.
4. Michalak B.: Vibrations of plates with initial geometrical imperfections interacting with periodic elastic foundation, *Arch. Appl. Mech.*, 2005, pp. 367-384.
5. Michalak B.: On the dynamic behaviour of a uniperiodic folded plates, *Journal Of Theoretical And Applied Mechanics*, 2002.
6. Woźniak C., Wierzbicki E.: *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2000.
7. Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak C.: On the modeling of the hyperbolic heat transfer problems in periodic lattice-type conductors, *J. Therm. Stresses* 2004, pp. 825-843.