ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 21 Energetyka z. 4 1960

WITOLD OKOŁO-KUŁAK

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

OKREŚLANIE KRYTERIÓW PODOBIEŃSTWA ZA POMOCĄ METODY "RÓWNAŃ RAMOWYCH"

W artykule wykazano, że poprawne określanie kryteriów podobieństwa powinno być przeprowadzone na podstawie definicji podobieństwa zjawisk przy użyciu równań, ujmujących prawa fizyki dla rozważanego przypadku. Ustalono postulaty, które powinna spełniać poprawna metoda wykrywania kryteriów podobieństwa. Podano sposób, który w pewnej mierze spełnia te postulaty - metodę "równań ramowych". Przytoczono liczne przykłady ilustrujące prostotę i niezawodność proponowanej metody.

Wstęp

Poprawne określanie kryteriów podobieństwa zjawisk jest sprawą o zbyt dużej wadze, aby nie warto było poświęcić jej nieco uwagi.

Kwestia ta posiada trzy główne aspekty: 1/ pomiarowo-badawczy, 2/ obliczeniowo projektowy i 3/ kontrolny.

Pierwszy obejmuje problem, które wielkości należy wprowadzać do kryteriów podobieństwa np. czy należy wprowadzić długość rury, czy jej średnicę jako tzw. charakterystyczny wymiar liniowy przy obliczaniu liczby Reynoldsa Re dla jakich temperatur należy obliczać tzw. wielkości właściwe, charakteryzujące substancję w rodzaju: kinematyczny współczynnik lepkości, współczynnik przewodzenia temperatury a, ciepło właściwe c_p itp.

Drugi aspekt tej sprawy to wykorzystanie pewnych doświadczeń dla celów obliczeniowo-projektowych. Powszechnie znaną rzeczą jest, że często wzory podane w postaci równań kryterialnych /tzn. równań ujmujących zależności pomiędzy kryteriami podobieństwa np. Nu=f/Re,Pr/, Nu=f/Gr,Pr/ dają poważne rozbieżności. Zachodzi kwestia, który ze wzorów jest właściwy? Często zbyt wielka rozbieżność w wynikach jest spowodowana nie uwzględnieniem na pozór prostej i oczywistej wskazówki: przy korzysta - niu z wyników doświadczeń należy obliczać kryteria podobieństwa w ten sam sposób, w jaki to robił badacz. Ponadto szczególną uwagę należy położyć na to, czy zakresy doświadczeń przeprowadzonych przez badaczy odpowiadają zakresom obliczeniowym, w przeciwnym bowiem przypadku może się zdarzyć, że charakter fizyczny zjawiska zmienił się o tyle, że zaproponowany wzór przestaje go obejmować.

Trzecia aspekt - kontroli - jest bodaj najtrudniejszy do ujęcia albowiem sięga w meritum sprawy. Ujmuje on takie przypadki, gdy identyczne zjawisko fizyczne jest ujęte przez różnych badaczy w odmienne co do formy lub znaczenia równania kryterialne.

W celu wyjaśnienia podstaw, na których opiera się zaproponowany sposób określania kryteriów podobieństwa /metodą równań ramowych/ omówimy początkowo następujące pojęcia podstawowe:

1/ definicja podobieństwa, 2/ warunki istnienia podobieństwa, 3/ równania różniczkowe zjawisk jako matematyczny wyraz praw fizyki, rządzących w danym przypadku i 4/ sprawdziany /kryteria/ podobieństwa.

1. Definicja podobieństwa zjawisk

Dwa zjawiska fizyczne będziemy uważali za podobne, jeżeli w odpowiadających sobie /zgodnie z pewną obraną skalą/ punktach przestrzeni i czasu - wielkości wtórne /np. prędkość, ciśnienie, temperatura itp./ będą /w obu przypadkach/ proporcjonalne, tzn. stosunek ich będzie taki sam.

Z definicji powyższej wynikają bezpośrednio następujące wnioski:

1/ Jeżeli obierzemy dowolnie skale długości i czasu - to skale wielkości wtórnych, pochodzących od długości i czasu, a więc takich, jak: prędkość, przyspieszenie linicwe, powierzchnia, objętość, objętościowe natężenie przepływu itp. nie mogą już być dowolnie obrane, lecz muszą być ściśle określone zgodnie z definicją odpowiedniej wielkości wtórnej oraz jej wymiarem wynikającym z tej definicji.

Wniosek powyższy możemy odwrócić: jeśli o charakterze zjawiska decydują takie własności ciał jak lepkość lub przewodność temperatury, to stosunek skal długości $l_A : l_B$ i stosunek skal czasu $\tau_A : \tau_B$ powinny być tak dobrane, aby była spełniona zależność

$$a_A : a_B = (l_A : l_B)^2 : (\tau_A : \tau_B)$$

2/ Z prostych rozważań przytoczonych powyżej wynika dalszy wniosek mający pewne znaczenie w nauce o przepływie ciepła: w zjawiskach gdzie mają duży wpływ lepkość i przewodność temperaturowa ciał, a więc w dziale dotyczącym konwekcji, podobieństwo ściśle biorąc może tylko tam zachodzić gdzie:

$$a_A : a_B = \nu_A : \nu_B = \text{idem} = l_A : l_B{}^2 : \tau_A : \tau_B$$

Biorąc pod uwagę definicję kryterium Prandtla Pr:

$$Pr = \nu/a$$

otrzymamy jako warunek podobieństwa następującą zależność

$$Pr_A = Pr_B = \text{idem}$$

3/ Wszelkie stosunki wielkości fizycznych o identycznych wymiarach np. $\frac{w.l}{\nu}$; $\frac{w.d}{a}$; $\frac{\nu}{a}$ w zjawiskach podobnych muszą zawsze wystąpić w skali 1 : 1. Innymi słowy wielkości b e z w y m i a r o w e, powstałe z odpowiednich wielkości fizycznych wymiarowanych muszą być jednakowe jeśli zjawiska mają być podobne.

W podobny sposób można by wyznaczyć wszystkie bez wyjątku kryteria stosowane w teorii podobieństwa zjawisk. Tak właśnie postępuje się w metodzie zwanej a n a l i z ą w y m i a r o w ą. Droga taka jednak nie prowadzi w danym przypadku do celu, a to głównie z dwu powodów: nie może dać odpowiedzi na kwestię, które właściwie wielkości o identycznych wymiarach np. średnicę czy wysokość należy wprowadzić do kryteriów podobieństwa i, co więcej, nie mamy nigdy pewności czy dobraliśmy w sposób właściwy wielkości fizyczne, o ile nie znamy z góry rezultatu. Poza tym analiza wymiarowa jest ostatecznością, którą stosuje się w wyjątkowych jedynie przypadkach, gdy wszystkie inne metody zawodzą [4] [9].

Właściwą drogą, której zawsze należy dać pierwszeństwo przed innymi będzie ta, która wynika z analizy równań będących wyrazem praw rządzących rozpatrywanym zjawiskiem. Aby wejść na tę drogę powróćmy jeszcze raz do kwestii podobieństwa.

Podana poprzednio definicja podobieństwa zjawisk może być sformułowana prościej i krócej, gdy weźmie się pod uwagę fakt, że proporcjonalność wielkości fizycznych w odpowiadających sobie miejscach i czasach nakłada pewne warunki na kształt zarówno pól wektorowych /np. pola sił, prędkości, przepływu ciepła itp./ jak i pól skalarowych /np. pola temperatur, ciśnień, gęstości itp./

W celu określenia tych warunków wprowadzimy w miejsce bezwzględnych wielkości fizycznych - wielkości bezwymiarowe /inaczej zredukowane/, które otrzymuje się przez podzielenie danej wielkości przez jej wartość charakterystyczną, oznaczoną indeksem "o". Otrzymane w ten sposób wielkości bezwymiarowe oznaczamy indeksem "r".

Łatwo jest wykazać, że w odpowiadających sobie miejscach przestrzeni i czasach p r o p o r c j o n a l n o ś ć odpowiednich wielkości fizycznych pociąga za sobą w konsekwencji i d e n t y c z n o ś ć wielkości parametrów zredukowanych.

Niechaj np. w dwu podobnych zjawiskach prędkości charakterystyczne wynoszą odpowiednio w_{oA} i w_{oB}. Prędkości zredukowane w odpowiadających sobie miejscach i czasach mają wartości.

$$w_{rA} = \frac{w_A}{w_{oA}}, \qquad w_{rB} = \frac{w_B}{w_{oB}}$$

Dzieląc stronami powyższe równania otrzymamy

$$\frac{w_{rA}}{w_{rB}} = \frac{w_A}{w_B} \cdot \frac{w_{oB}}{w_{oA}}$$

Biorąc pod uwagę proporcjonalność

$$\frac{w_A}{w_B} = \frac{w_{oA}}{w_{oB}}$$

wynikającą z definicji podobieństwa, dochodzimy do zależności

$$w_{rA} = w_{rB}$$

Postępując w identyczny sposób w stosunku do współrzędnych długości i czasów można łatwo wykazać, że w odpowiadających sobie miejscach i czasach zachodzi identyczność zredukowanych współrzędnych przestrzeni x_r, y_r, z_r i czasu τ_r.

Przytoczone rozumowania pozwalają na następujące sformułowanie definicji podobieństwa:

"W zjawiskach podobnych pola zredukowanych wielkości fizycznych odniesione do bezwymiarowych współrzędnych - są identyczne".

Pole zredukowanych wielkości fizycznych odniesione do bezwymiarowych współrzędnych będziemy w dalszym ciągu nazywać "polem bezwymiarowym".

Wprowadzona terminologia umożliwia podanie jeszcze krótszej definicji podobieństwa zjawisk:

"Zjawiska podobne posiadają identyczne pola bezwymiarowe"

Jeśli obszar, w którym zachodzi dane zjawisko fizyczne przebije się prostą, to końce wektorów wielkości fizycznych przechodzących przez nią, opisują pewną krzywą. Jeśli tę krzywą odniesiemy do współrzędnych zredukowanych i bezwymiarowych wielkości to otrzymamy tzw. profil zredukowanych wielkości. W przypadku pola skalarowego przez profil zredukowanych wielkości będziemy rozumieć krzywą opisaną przez końce odcinków prostopadłych do danej prostej i leżących w płaszczyźnie wspólnej, przy tym długość odcinków jest równa zredukowanej wielkości skalarowej. W przypadku pola wektorowego profil będzie płaski tylko wtedy, gdy wszystkie wektory przynależne do danej prostej będą miały ten sam kierunek.

Definicję podobieństwa można sformułować również za pomocą profilów wektorowych lub skalarowych:

"Zjawiska podobne posiadają identyczne profile zredukowanych wielkości odniesione do odpowiadających sobie prostych".

Przez odpowiadające sobie proste będziemy rozumieć takie proste, które łączą pary odpowiadających sobie punktów. Innymi słowy proste odpowiadające sobie posiadają identyczne równania w trójwymiarowym układzie zredukowanych współrzędnych.

Profile zredukowanych wielkości przynależne do pewnych charakterystycznych prostych, nazwiemy g ł ó w n y m i profilami. Np. głównym profilem będzie profil pewnych wielkości przynależny do średnicy rury /inaczej: główny profil poprzeczny/ lub do osi rury /główny profil podłużny/.

Pojęcie podobieństwa zjawisk fizycznych wywodzi się z sięgającego czasów starożytnych /Tales - VI wiek p.n.e./ pojęcia podobieństwa geometrycznego, które należy w dalszym ciągu uwzględnić.

2. Warunki istnienia podobieństwa

Podobieństwo pól o którym była poprzednio mowa pociąga za sobą pewne warunki, które muszą być spełnione aby zjawiska były podobne.

Pierwszy warunek określimy z łatwością po stwierdzeniu, że identyczność bezwymiarowych pól fizycznych może być osiągnięta tylko wtedy, gdy powierzchnia ograniczająca przestrzeń w której zachodzi zjawisko fizyczne - będzie w obu przypadkach podobna geometrycznie. Wówczas bowiem równanie tej powierzchni wyrażone za pomocą bezwymiarowych współrzędnych będzie identyczne dla zjawisk podobnych.

Pierwszym zatem warunkiem podobieństwa zjawisk jest podobieństwo geometryczne powierzchni zewnętrznych ograniczających obszar rozpatrywanego zjawiska.

Zjawisko fizyczne zachodzi zazwyczaj pod wpływem działań zewnętrznych. Wpływ otoczenia koncentruje się na granicy obszaru rozpatrywanego zjawiska. Wpływ ten ujmują tzw. w a r u n k i b r z e g o w e. W zjawiskach podobnych również i warunki brzegowe muszą być podobne. Przykładem podobieństwa warunków brzegowych może być przypadek, gdy zmienność temperatury w czasie na pograniczu obszaru rozpatrywanych zjawisk jest określona za pomocą tej samej, znanej funkcji.

Drugim warunkiem będzie zatem podobieństwo warunków brzegowych dotyczące zarówno miejsca jak i czasu.

W chwili początkowej układ pól wielkości fizycznych jest zatem ściśle określony za pomocą drugiego warunku podobieństwa. W dalszym ciągu jednak przebieg zjawiska jest uzależniony od charakteru czynnika, który wypełnia rozpatrywany obszar. Charakter czynnika określają dwa rodzaje wielkości: niezmienne /jak np. masa cząsteczkowa, stała gazowa, liczba atomów w cząsteczce, liczba stanów skupienia występujących w danym zjawisku itp./ oraz wielkości zależne od termodynamicznych parametrów. Do tych ostatnich zaliczamy takie jak: ciepło właściwe, objętość właściwa, gęstość - które nazywamy wielkościami właściwymi oraz takie współczynniki jak: współczynnik dynamiczny lub kinematyczny lepkości, współczynnik przewodzenia ciepła, współczynnik przewodzenia temperatury. Do tej drugiej grupy należy także wliczyć wielkości bezwymiarowe, będące pewną kombinacją współczynników substancji np. liczba Prandtla, która zmienia się wraz ze zmianą temperatury.

Jest rzeczą zrozumiałą, że dalszym warunkiem podobieństwa zjawisk jest, aby zmienność wielkości właściwych, współczynników substancji i liczb bezwymiarowych była określona przy pomocy tego samego prawa. Postulat ten można najłatwiej spełnić obierając w obu rozpatrywanych zjawiskach tę samą substancję jako czynnik termodynamiczny oraz identyczne zakresy temperatur, od których zależne są współczynniki substancji i wielkości bezwymiarowe.

Często jednak dąży się do tego, aby pewne doświadczenia przenieść na inne czynniki. Jest to dopuszczalne tylko wówczas gdy zmienność właściwych wielkości i współczynników w pewnym zakresie temperatur różni się nieznacznie w rozpatrywanych zjawiskach i przewiduje się, że błąd spowodowany takim uogólnieniem będzie w granicach błędu pomiarowego.

Czwartym warunkiem podobieństwa zjawisk jest postulat, aby w przypadkach podobnych o przebiegu zjawiska decydowały te same prawa fizyki. Jeżeli np. na przebieg zjawiska ma wpływ prawo Clapeyrona to oba zjawiska muszą podlegać temu prawu, oba więc czynniki muszą być gazami posłusznymi wspomnianemu prawu.

Prawa fizyki przedstawiamy zazwyczaj w postaci równań matematycznych /zazwyczaj równań różniczkowych/ dzięki temu czwarty warunek podobieństwa zjawiska można również sformułować w ten sposób [4].

"Do równań, określających fizyczny przebieg zjawiska muszą być wprowadzone wszystkie prawa wywierające dostrzegalny wpływ na jego przebieg, natomiast nie wolno wprowadzać żadnych równań, będących wyrazem praw niezwiązanych z rozpatrywanym zjawiskiem".

Cztery powyższe postulaty łącznie są przyczyną faktu, że równania opisujące ogólnie fizyczną stronę zjawiska mają jednakową postać w przypadku zjawisk podobnych. Równania te stanowią zazwyczaj układ równań różniczkowych, w których wielkości fizyczne stanowiące istotę pola są funkcyjnie nawzajem związane.

3. Postulaty, które powinna spełniać poprawna metoda określania kryteriów podobieństwa

Głównym postulatem poprawnej metody określania kryteriów podobieństwa powinien być ścisły jej związek z p r a w a m i p r z y r o d y, rządzącymi rozpatrywanym zjawiskiem.
Innymi słowy podstawą do wyznaczania kryteriów podobieństwa powinny być równania różniczkowe, będące matematycznym wyrazem tych praw.

Właściwa metoda nie powinna nasuwać jakichkolwiek wątpliwości co do obierania wielkości charakterystycznych, wchodzących w skład kryterium. Najlepiej by było, gdyby zarówno same kryteria, jak też i wielkości charakterystyczne wynikały bezpośrednio z równań różniczkowych opisujących rozważane zjawisko.

Drugim zatem postulatem będzie jednoznaczność w określeniu zarówno wielkości charakterystycznych jak i samych kryteriów podobieństwa. Inaczej mówiąc, po przyjęciu właściwych podstaw, metoda powinna działać "s a m o r z u t n i e" i jednoznacznie.

Trzecim wreszcie postulatem metody będzie jej bezpośredni i logiczny związek z definicją podobieństwa zjawisk fizycznych. Krótko mówiąc sam sposób wykrywania kryteriów podobieństwa powinien wynikać z definicji podobieństwa.

Postuluje się również, aby metoda posiadała następujące zalety:

1/ szybkość w działaniu, 2/ pewność co do otrzymanych wyników i 3/ jasność i prostota.

W literaturze znane są następujące ważniejsze metody służące do wykrywania kryteriów podobieństwa:

1/ Metoda stosunków proporcjonalności [2 str.157], która polega na wprowadzaniu w równania będące matematycznym wyrazem zjawiska stosunków proporcjonalności. Po założeniu podobieństwa zjawisk otrzymuje się jako konsekwencje warunki, jakie muszą spełniać wspomniane stosunki. Stąd otrzymuje się kryteria podobieństwa. Metoda ta spełnia na ogół wymagane postulaty nie jest jednak szybka i w przypadku, gdy przyjmuje się pewną dowolność w obiorze wielkości charakterystycznych - drugi postulat nie będzie ściśle spełniony.

2/ Metoda Prandtla [11 str.146] polegająca na bezpośrednim wykorzystaniu faktu, że dla zjawisk podobnych stosunek odpowiednich sił /np. siły bezwładności i siły tarcia/ jest taki sam. Metoda ta jest godna podziwu ze względu na swą prostotę, jasność i bezpośredni związek ze stroną fizyczną zjawiska.

3/ Metoda równań różniczkowych o parametrach zredukowanych [10 str.90] w której do równań różniczkowych wprowadza się wielkości zredukowane /bezwymiarowe/ i otrzymuje się zespoły wielkości bezwzględnych o postaci kryteriów podobieństwa.
W metodzie tej nie jest dotrzymany trzeci postulat, ponieważ sposób określania kryteriów nie wynika wprost z definicji podobieństwa.

4/ Metoda wykrywania kryteriów za pomocą analizy wymiarowej [3 str.87]. Metoda ta nie spełnia żadnego z postulatów. Nie jest pewna i jednoznaczna, i zalecana być nie może [4 str.50], gdyż stanowi ostateczność stosowaną tylko tam, gdzie dokładne ustalenie równań różniczkowych /lub innych/ określających zjawisko jest niemożliwe. Metodę tę zastosowaliśmy w części 1/ otrzymując liczbę Prandtla Pr.

5/ Metoda oparta na ogólnej teorii podobieństwa [5 str.41] w której odrzuca się w równaniach różniczkowych wszelkie indeksy, znaki sum /Σ/, symbole wyrażające różniczkowanie itp. i otrzymuje się zespoły wielkości fizycznych, które po podzieleniu przez siebie nawzajem prowadzą do bezwymiarowych wielkości identycznych z kryteriami podobieństwa. Metoda ta jest bardzo szybka i spełnia pierwsze dwa postulaty, jednak sposób wykrywania kryteriów nie wynika z definicji podobieństwa, lecz z faktu, że kryteria są bezwymiarowe. Dzięki temu wady metody 4/ częściowo przenoszą się i na nią. Działania początkowe w tej metodzie, podobne są do wstępnych operacji w metodzie Prandtla /odrzucanie symboli różniczkowania ponieważ stosunek sił jest proporcjonalny do przyrostów tych sił/ jednak faza końcowa pokrywa się w swej istocie z metodą analizy wymiarowej.

4. Wyznaczanie kryteriów podobieństwa w oparciu o postulaty z rozdz. 3

W dalszym ciągu postaramy się trzymając się ściśle postulatów 1-3 ujętych w rozdziale 3 wyprowadzić w szczególnym przypadku dla pewnego zjawiska kryteria podobieństwa.

Zgodnie z postulatem 1 potrzebne nam jest równanie różniczkowe określające pole wielkości fizycznych. Niechaj to będzie równanie Fouriera-Kirchhoffa [7 str.190] ujmujące przebieg temperatury ϑ w zależności od czasu τ i miejsca x oraz współczynnika przewodzenia temperatury a_x w przypadku jednowymiarowego nieustalonego przepływu ciepła. Równanie to przedstawiamy w następującej formie:

$$\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}}{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}} = a_x \tag{4.1}$$

czyli

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a_x \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \tag{4.1.1}$$

Aby zadość uczynić trzeciemu postulatowi wykorzystamy definicję podobieństwa o następującej postaci: "Zjawiska podobne posiadają identyczne profile zredukowanych wielkości". Równanie profilu temperatur otrzymujemy dzieląc poszczególne wielkości w równaniu (4.1) przez wielkości charakterystyczne ϑ_o, τ_o, x_o

$$\frac{\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \tau}}{\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}} \cdot \frac{\dfrac{\tau_o}{\vartheta_o}}{\dfrac{x_o^2}{\vartheta_o}} = \text{idem} = K_x \qquad (4.2)$$

W równaniu powyższym wielkość identyczną oznaczono przez K_x. Po uwzględnieniu równania (4.1) zależność (4.2) upraszcza się do postaci:

$$\frac{a_x \cdot \tau_o \cdot \dfrac{1}{\vartheta_o}}{x_o^2 \cdot \dfrac{1}{\vartheta_o}} = K_x \qquad (4.3)$$

czyli

$$\frac{\vartheta_o}{\tau_o} K_x = a_x \frac{\vartheta_o}{x_o^2} \qquad (4.3.1)$$

W celu wypełnienia drugiego postulatu dla oznaczenia wymiaru charakterystycznego długości pozostawiliśmy symbol "x" dodając do niego indeks "o". Oznacza to, że długość charakterystyczna powinna być obrana dla kierunku zgodnego z przepływem ciepła przewodzonego. Z tego samego powodu kryterium podobieństwa K oznaczamy symbolem K_x. Dzięki zmienności współczynnika przewodzenia temperatury a_x również i wielkość kryterium podobieństwa K_x będzie zmienna: $K_x = f(x)$.

Konfrontując ze sobą równania (4.1.1.) i (4.3.1) dostrzegamy uderzającą analogię: kolejność i miejsce poszczególnych wielkości są identyczne, w miejsce wielkości zmiennych związanych z polem temperatur równania (4.1.1.) w równaniu (4.3.1.) występują analogiczne wielkości charakterystyczne. W równaniu (4.3.1.) brak jest symboli operatorów matematycznych różniczkowania. Z tego powodu równanie (4.3.1) można nazwać r ó w n a-n i e m r a m o w y m względem równania różniczkowego (4.1.1.) Dzięki powyższej analogii, równanie ramowe można odtworzyć bezpośrednio z równania różniczkowego, opisującego zjawisko.

Aby utworzyć równanie ramowe, należy w równaniu różniczkowym opisującym zjawisko: 1/ usunąć symbole takich operacji jak różniczkowanie /także, jak łatwo wykazać i całkowanie/, 2/ w miejsce wielkości fizycznych i współrzędnych wprowadzić odpowiednie wielkości charakterystyczne /symbole najlepiej pozostawić niezmienione dla zachowania jednoznaczności a dodać tylko indeks np. x_o, y_o, z_o itp./ i 3/ jedną ze stron równania pomnożyć przez K tj. poszukiwane kryterium.

Jak widać określenie równania ramowego jest proste i szybkie. Rozwiązanie tego równania nie nasuwa najmniejszych trudności: po uproszczeniu wyznaczamy poszukiwane kryterium z równania (4.3.1)

$$K_x = \frac{a_x \cdot \tau_o}{x_o^2} \qquad (4.4)$$

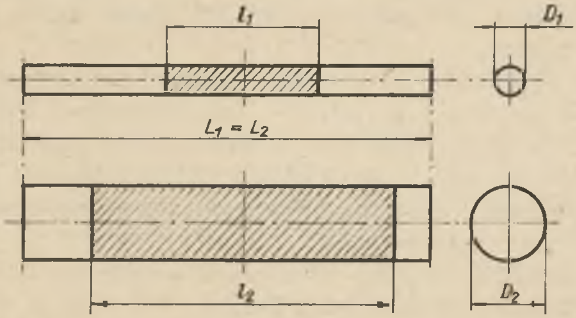
Otrzymaliśmy znane kryterium Fouriera Fo. Jeśli założyć, że zmiana współczynnika a_x spowodowana zmianą temperatury jest nieznaczna, to w przypadku płyty /np. arkusza blachy/ w miejsce x_o trzeba podstawić wymiar charakterystyczny w kierunku przepływu ciepła a więc grubość blachy δ. W przypadku nagrzewania /lub chłodzenia/ pręta cylindrycznego, wymiarem charakterystycznym w kierunku przepływu ciepła będzie średnica D.

Powyższy przykład wskazuje na to, że istnieje metoda krótka, szybka i jednoznaczna, w której spełnione są wszystkie trzy postulaty, podane w części 3. Oczywiście w konkretnych przypadkach uzasadnienie opisane w równaniach od (4.1) do (4.4) nie musi być powtarzane, bowiem wynik jest z góry wiadomy.

Pozostają do wyjaśnienia następujące kwestie:

1/ Czy rzeczą konieczną jest robić tak ostre zastrzeżenia co do obierania charakterystycznych wymiarów liniowych? Jeżeli zjawiska są podobne, to np. stosunek wymiarów podłużnych do poprzecznych x_o/y_o będzie taki sam, jak to wynika z pierwszego warunku podobieństwa, zatem obojętne jest jaki wymiar liniowy obieramy jako charakterystyczny. Czy wobec tego konieczną rzeczą jest w omówionym poprzednio przykładzie brać średnicę pręta? Czy nie mogłaby to być długość?

Aby odpowiedzieć na to pytanie posłużymy się przypadkiem ogrzewania prętów, jaki zachodzi w praktyce. A więc stwierdzono, że czas ogrzewania prętów o pewnej średnicy wynosi τ_1. Jak długo należy nagrzewać pręt o średnicy dwa razy większej? Aby zjawiska były podobne, kryteria Fouriera muszą być takie same. Zatem w przypadku ogrzewania prętów z tego samego materiału, do tej samej końcowej temperatury, lecz o średnicy dwa razy większej czas nagrzewania powinień być około cztery razy większy. /Z zastrzeżeniem, że warunki brzegowe będą podobne/. Gdyby zgodnie z tym co było powiedziane na początku, postawić kwestię w następujący sposób: jaki jest czas nagrzewania prętów dwa razy dłuższych? - stało by się jasne, że pytanie jest źle sformułowane. Ze względu na to, że przepływ ciepła ma w tym przypadku kierunek promieniowy, czas nagrzewania n i e j e s t zależny od długości pręta. Jeżeli mamy do czynienia z prętami o różnych średnicach, lecz o równych długościach, jak to zazwyczaj bywa, to warunek podobieństwa geometrycznego nie jest spełniony. Mimo to możemy korzystać z wniosków, które otrzymaliśmy analizując poprawnie zestawione kryteria podobieństwa. Dowodzi tego następujące rozumowanie: z obu prętów wyodrębnić myślowo dwa układy geometryczne podobne../Rys.1/. Układy te



Rys.1. Podobieństwo zjawisk nagrzewania dwu prętów. Przy określaniu kryterium podobieństw- Fo /Fouriera/ istotną jest średnica, a nie długość

będą ograniczone płaszczyznami prostopadłymi do osi. Dla wyodrębnionych w ten sposób układów można już łatwiej dobrać warunki podobieństwa, wyszczególnione w części 2. Można natomiast jako wymiar charakterystyczny brać promień pręta, ponieważ byłoby to w zgodzie z myślą przewodnią prawa wyrażonego równaniem Fouriera-Kirchhoffa: przepływ ciepła odbywa się w kierunku największego gradientu temperatury.

2/ Wywód zmierzający do określenia równania ramowego był przeprowadzony na przykładzie bardzo prostego równania, złożonego z dwu wyrażeń rozdzielonych znakiem równości. Czy można wywód ten uogólnić, gdy równanie zawiera wiele wyrazów?

Prandtl wykazał, że dla zjawisk podobnych stosunki odpowiadających sobie sił muszą być takie same. Pomiędzy siłami zachodzi stan równowagi, gdy wprowadzi ~~się~~ siłę bezwładności. Jeżeli mamy większą ilość sił, to dla dowolnej pary sił ich wzajemny stosunek będzie taki sam. Myśl tę można dalej rozwinąć: każdą z sił można rozłożyć na składowe i dla podobnie zorientowanych układów odniesienia stosunek dowolnej pary składowych sił będzie taki sam, gdy zjawiska są podobne. Stąd wynika wniosek: w równaniu wyrażającym warunek równowagi sił można wybrać dowolną parę wyrażeń, które po podzieleniu muszą być takie same dla zjawisk podobnych. Inaczej mówiąc, jeżeli stosunek odpowiednich sił jest taki sam, to i stosunek składowych tych sił, otrzymanych przez rzutowanie na osie układu, musi być również identyczny.

Również i w tym przypadku równania Fouriera-Kirchhoffa, które jest wyrazem prawa zachowania energii możemy zastosować identyczne rozumowanie: Stosunek dwu odpowiadających sobie wielkości energii jest taki sam dla zjawisk podobnych.

W celu wykrycia kryteriów podobieństwa wystarczy rozpatrzeć przypadek jedno- lub najwyżej dwuwymiarowego przepływu ciepła lub masy. Pozostałe wymiary nie wnoszą nic nowego poza kryterium podobieństwa geometrycznego. Natomiast czas należy traktować niezależnie od współrzędnych liniowych.

Rzecz prosta należy brać pod uwagę te wielkości oraz te współrzędne, które odgrywają d e c y d u j ą c ą rolę w rozpatrywanym zjawisku. Jednak dla określenia kryteriów podobieństwa nie jest konieczne posługiwanie się ostateczną formą równania różniczkowego. Na jednym z przykładów /por. przykład 5 z części 5/ wykazano, że dla określenia kryteriów podobieństwa wystarcza zestawienie równań ujmujących prawa, które obowiązują w rozważanym przypadku.

Dla otrzymania kryteriów podobieństwie nie tylko nie jest konieczne rozwiązywanie równań różniczkowych, ale w pewnych przypadkach nie jest nawet konieczna znajomość samego równania różniczkowego /może to mieć znaczenie w tych przypadkach, gdy wynik operacji matematycznych prowadzi do skomplikowanych układów równań różniczkowych/.

5. Przykłady

Dla wyjaśnienia omówionej w części 4 metody określania kryteriów przerobimy kilka przykładów z dziedziny przepływu ciepła.

5.1. Ogólnym równaniem ujmującym przepływ ciepła przez przewodzenie i transport energii za pomocą strugi czynnika jest

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \cdot \Delta t$$

znane pod nazwą równania Fouriera-Kirchhoffa. W równaniu tym oznaczają

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

gdzie: Dt - jest to tzw. różniczka substancjonalna /zupełna/ temperatury,

τ - czas,

w_x, w_y, w_z - składowe prędkości czynnika w kierunku osi układu odniesienia,

a - współczynnik przewodzenia temperatury,

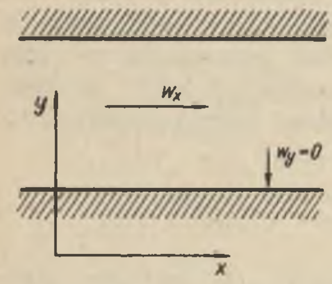
t - temperatura,

Δ - operator Laplace'a

$$\Delta t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Jeżeli rozważyć /rys.2/ przypadek zjawiska ustalonego w czasie $/\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0/$ i dwuwymiarowego $/w_z = 0, \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0/$ a ponadto uczynić składowe prędkości w kierunku normalnym do ścianki równymi zeru /jak to istotnie ma miejsce w rurze i szczelinie/ $/w_y=0/$ oraz pominąć przewodzenie ciepła w kierunku przepływu czynnika $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$ to równanie Fouriera Kirchhoffa przyjmie postać:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$



Rys.2. Przepływ ustalony w rurze lub szczelinie. Prędkość Wy w warstwie granicznej jest równa zeru. Rysunek pomocniczy dla ustalenia kryterium podobieństwa termodynamicznego

Jak widzimy pozostały jedynie te wielkości, które odgrywają decydującą rolę w przypadku wymiany ciepła przez przewodzenie w kierunku normalnym do ścianki y oraz unoszenie energii wraz ze strugą czynnika w kierunku równoległym do ścianki x.

Równanie ramowe otrzymamy jeśli zgodnie z wytycznymi 1-3 podanymi w części 4 odrzucimy symbole różniczkowania, wprowadzimy wielkości t_o, x_o, y_o, pomnożymy jedną ze stron przez kryterium K i założymy, że współczynnik przewodzenia temperatury "a" zmienia się bardzo nieznacznie:

$$w_o \frac{t_o}{x_o} = a \frac{t_o}{y_o^2} \cdot K$$

Po uproszczeniu stronami przez t_o otrzymamy ostatecznie

$$K = \frac{w_o y_o}{a} \cdot \frac{y_o}{x_o}$$

Pierwsza część otrzymanego kryterium nosi nazwę liczby Pecleta, druga zaś y_o/x_o jest niezmiennikiem podobieństwa geometrycznego. W przypadku przepływu cieczy w rurze, w miejsce y_o należy położyć średnicę d, dla szczeliny jej szerokość s jak to uzgodniliśmy na początku tego przykładu. Ostatecznie otrzymane kryterium można przedstawić w postaci

$$K = (Pe)_d \cdot \frac{d}{L} \quad \text{lub} \quad K = (Pe)_s \frac{s}{L}$$

z których pierwsza dotyczy rury, natomiast druga szczeliny. Liczby Pe oznaczone indeksami "d" lub "s" nie pozostawiają żadnych wątpliwości co do tego jaka długość powinna być przyjęta jako charakterystyczna. Ponieważ stosunki d/L i s/L stanowią jak wspomnieliśmy niezmienniki podobieństwa geometrycznego, których równość jest podstawowym warunkiem podobieństwa, przeto dzieląc otrzymane kryteria przez d/L lub s/L otrzymamy ostatecznie liczby Pecleta w klasycznej postaci, jako kryteria podobieństwa cieplnego.

5.2. Podobieństwo warunków brzegowych w zjawisku przepływu ciepła można określić łącząc ze sobą równania będące wyrazem praw Fouriera i Newtona [7 str.15 i 20] otrzymana w ten sposób zależność

$$-\lambda \frac{d\Theta}{dx} = \alpha \cdot \Theta$$

w której poza znanymi wielkościami oznaczają: α - współczynnik wnikania ciepła, Θ = różnica temperatur pomiędzy ścianką i płynem - może posłużyć do otrzymania poszukiwanych kryteriów. Tworząc równanie ramowe zgodnie z wytycznymi 1......3 przytoczonymi w części 4 dochodzimy do zależności

$$K \cdot \lambda \frac{\Theta_o}{x_o} = \alpha \cdot \Theta_o$$

Po uproszczenou przez Θ_o i wykonaniu otrzymamy

$$K = \frac{\alpha \cdot x_o}{\lambda}$$

Otrzymane kryterium K nosi nazwę liczby Nusselta Nu, gdy λ dotyczy płynu graniczącego ze ścianką, liczby zaś

Biota Bi w przypadku gdy λ oznacza współczynnik przewodzenia ciepła ciała stałego.

5.3. Transport ciepła w wymiennikach można przedstawić za pomocą równania różniczkowego [7, str.45]:

$$- W \cdot d\Theta = k \cdot dF \cdot \Theta$$

w którym: W - oznacza równoważnik wodny natężenia przepływu jednego z czynników,
Θ - różnicę temperatur pomiędzy czynnikami w rozpatrywanym miejscu,
k - współczynnik przenikania ciepła,
F - powierzchnia wymiany ciepła.

Równanie ramowe ma postać:

$$K \cdot W \cdot \Theta_o = k \cdot F_o \cdot \Theta_o$$

stąd

$$K = \frac{k \cdot F_o}{W}$$

Otrzymana wielkość K jest istotnie sprawdzianem podobieństwa wymienników, co potwierdza bardzo proste rozumowanie. Podobne wymienniki powinny posiada identyczne sprawności wewnętrzne. Biorąc pod uwagę wzór na sprawność wymiennika [7 str.46]:

$$\eta_w = 1 - \exp\left(\frac{k \cdot F_o}{W}\right)$$

łatwo jest stwierdzić, że spełnienie warunku podobieństwa

$$K = \mathrm{idem}$$

powoduje tym samym zapewnienie otrzymania identycznych sprawności wewnętrznych η_w wymienników.

5.4. Przepływ ciepła w prętach przewodzących ciepło. W przypadku ustalonego przepływu ciepła zjawiskiem rządzi równanie [7 str.30]

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{\sigma \cdot \alpha}{F \cdot \lambda} \cdot \Theta$$

W celu określenia kryterium podobieństwa dla tego przypadku tworzymy w znany sposób równanie ramowe:

$$K \cdot \frac{\theta_o}{x_o^2} = \frac{\sigma \cdot \alpha}{F \cdot \lambda} \cdot \theta_o$$

Po uproszczeniu i wykonaniu otrzymamy

$$K \cdot \frac{\sigma \cdot \alpha}{F \cdot \lambda} \cdot x_o^2 = \Lambda^2 x_o^2$$

Nietrudno jest wykazać, że w przypadku, gdy liczby K są takie same dla dwu zjawisk, stosunki dwóch odpowiednich różnic temperatur muszą być takie same. Weźmy np. wzór [7 str.32] określający tzw. metodyczny błąd pomiaru temperatury, spowodowany wpływem tulei ochronnej termometru:

$$\theta_p = \frac{\theta_k}{\cosh(AL)}$$

Wprowadzając wyprowadzone wyżej kryterium podobieństwa można powyższy wzór przedstawić w następującej formie:

$$\frac{\theta_p}{\theta_k} = \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{K}\right)}$$

Jak widzimy stosunki różnic temperatur θ_p / θ_k będą takie same gdy liczby bezwymiarowe K, stanowiące kryteria podobieństwa będą identyczne.

5.5. Rozpatrzymy jeszcze taki przypadek, gdy ze względu na żmudne działania matematyczne chcemy otrzymać kryterium podobieństwa bez korzystania z ostatecznej formy równania różniczkowego. Rozpatrzymy następujący przykład:

"Wewnątrz adiabatycznej rury przepływa czynnik (rys.3), którego równoważnik wodny wynosi W kcal/h.grd. Czynnik ten omywa pręt przewodzący ciepło, umieszczony osiowo wewnątrz rury. Znane są następujące wartości:

F_p m^2 - powierzchnia przekroju prostopadłego pręta,

O_p m - obwód przekroju poprzecznego pręta,

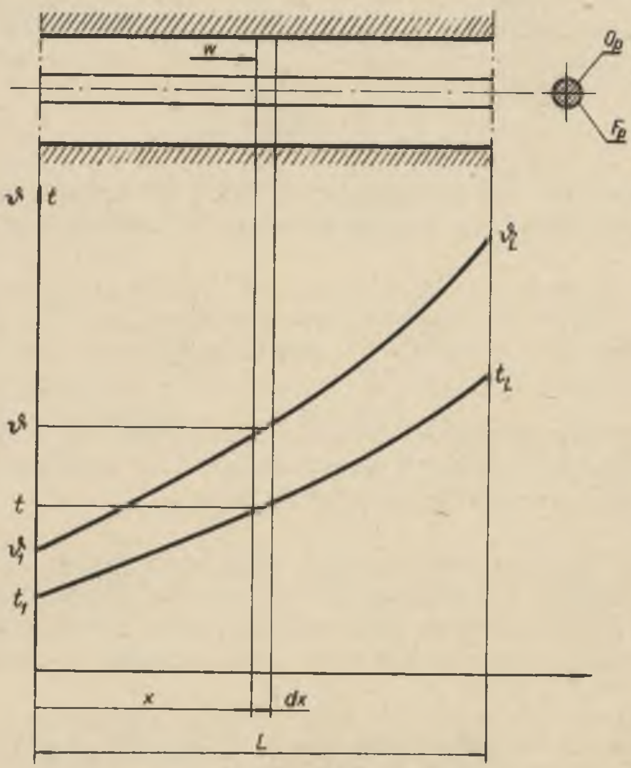
λ kcal/m.h.grd - współczynnik przewodzenia ciepła materiału pręta,

α kcal/m^2.h.grd - współczynnik wnikania ciepła od pręta do czynnika,

L m - długość pręta,

ϑ_1 ^oC - temperatura początkowa pręta,

t_1 ^oC - temperatura początkowa czynnika



Rys.3. Przepływ osiowy płynu wzdłuż pręta przewodzącego ciepło, umieszczonego wewnątrz rury adiabatycznej. Wykres temperatur. Rysunek pomocniczy dla określenia kryterium podobieństwa

Po przyjęciu następujących założeń upraszczających:
1. wielkości W, λ, α, F_p, O_p są niezmienne /jednakowe w każdy przekroju pręta/,
2. przekrój pręta nie jest duży, dzięki czemu izotermy w w pręcie nie wiele się różnią od płaszczyzn prostopadłych do osi pręta,
3. zjawisko jest ustalone w czasie,
   - należy określić kryteria podobieństwa dla rozważanego przypadku.

Rozwiązanie

W dowolnym miejscu adiabatycznej rury prowadzimy dwie płaszczyzny prostopadle do osi pręta, odległe od siebie o dx.
Dla otrzymanego w ten sposób elementarnego układu ustalamy prawa rządzące przepływem ciepła. Rozpoczniemy od ustalenia elementarnego bilansu. Ponieważ przepływ jest ustalony, zatem ubytek ciała przewodzonego - dQ^*_λ/przez pręt jest równy ciepłu oddanemu do strugi czynnika dQ^*_α/ na drodze konwekcji

$$- dQ^*_\lambda = dQ^*_\alpha \qquad (5.5.1)$$

Poszczególne wyrażenia powyższego bilansu wyrazimy w oparciu o prawa Fouriera i Newtona:

$$- dQ^*_\lambda = F_p \cdot \lambda \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} \cdot dx \qquad (5.5.2)$$

$$dQ^*_\alpha = O_p \cdot dx \cdot \alpha (\vartheta - t) \qquad (5.5.3)$$

Ciepło pobrane przez strugę płynącego czynnika powoduje zwiększenie entalpii dI^* tego czynnika:

$$dQ^* = dI^* = W\, dt \qquad (5.5.4)$$

Łącząc ze sobą równania (5.5.3) i (5.5.4) otrzymamy

$$W \frac{dt}{dx} = O_p \cdot \alpha (\vartheta - t) = O_p \cdot \alpha \cdot \theta \qquad (5.5.5)$$

Powyższe równanie stanowi podstawę do określenia jednego z kryteriów dla rozważanego przypadku.

Tworząc w omówiony w części 4 sposób równanie ramowe względem (5.5.5) otrzymamy:

$$K' W \frac{t_o}{x_o} = O_p \cdot \alpha \cdot \theta_o \qquad (5.5.6)$$

W przypadku zjawisk podobnych stosunek θ_o/t_o powinien być stały. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$K_1 = \frac{K'}{\frac{\theta_o}{t_o}}$$

otrzymamy ostatecznie po zastosowaniu oznaczenia $x_o = L$

$$K_1 = \frac{O_p \cdot L \cdot \alpha}{W} \qquad (5.5.7)$$

Drugie kryterium podobieństwa otrzymamy łącząc równania (5.5.1), (5.5.2) i (5.5.3):

$$F_p \cdot \lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = O_p \cdot \alpha \cdot (\vartheta - t) \qquad (5.5.8)$$

Postępując jak poprzednio otrzymamy

$$K_2 = \frac{O_p \cdot \alpha}{F_p \cdot \lambda} \cdot L^2 \qquad (5.5.9)$$

Rozwiązanie szczegółowe równania różniczkowego

$$\frac{d^3 t}{dx^3} + \frac{O_p \cdot \alpha}{W} \cdot \frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{O_p \cdot \alpha}{F_p \cdot \lambda} \cdot \frac{dt}{dx} = 0$$

ujmującego rozpatrywany przypadek po uwzględnieniu warunków brzegowych można przedstawić w następującej formie

$$n = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4 \cdot K_2}{K_1^2}} \operatorname{ctgh} \left(\sqrt{\frac{1}{4} K_1^2 + K_2^2}\right)\right. \qquad (5.5.10)$$

gdzie n oznacza stosunek

$$n = \frac{\vartheta_L - t_1}{t_L - t_1}$$

W którym poza znanymi wielkościami, podanymi w tekście zadania, oznaczają:

ϑ_L - temperatura pręta na końcu /dla x = L/,

t_L - temperatura czynnika u wylotu /dla x = L/.

Jak to widać wyraźnie z równania (5.5.10) stosunek różnic temperatur n jest funkcją wyłącznie kryteriów K_1 i K_2 określonych za pomocą równań (5.5.7) i (5.5.9). Jest to najlepszym dowodem tego, że kryteria K_1 i K_2 były określone poprawnie, bowiem dla zjawisk podobnych stosunki odpowiednich różnic temperatur powinny być takie same.

6. Wnioski końcowe

Przytoczone wywody pozwalają na wyprowadzenie niżej podanych wniosków:

1/ Definicja podobieństwa zjawisk powinna być ujęta za pomocą teorii pola wielkości fizycznych. Definicję tę można wówczas wykorzystać m.in. dla określenia kryteriów podobieństwa w sposób bardziej ogólny niż np. w metodzie współczynników /ściślej stosunków/ proporcjonalności.

2/ Kryteria podobieństwa powinny być określane na podstawie równań różniczkowych, wynikających z praw fizycznych rządzących w sposób wyczuwalny rozpatrywanym zjawiskiem.

3/ Metoda określania kryteriów podobieństwa powinna opierać się w sposób wyraźny i zdecydowany na definicji podobieństwa i posługiwać się równaniami różniczkowymi aktualnymi w danym przypadku. Dzięki temu w kryteriach podobieństwa mogą się znaleźć tylko te wyrażenia, które występują w równaniach różniczkowych rozpatrywanego zjawiska.

4/ Określając wielkości charakterystyczne, występujące w kryteriach podobieństwa należy brać pod uwagę ich sens fizyczny, wynikający z praw i zasad fizyki.

5/ Metodę zastosowaną przez Prandtla w przypadku równania Naviera-Stokesa a polegającą na wykorzystaniu faktu, że w zjawiskach podobnych stosunki dwu dowolnych sił muszą być identyczne /lub ich składowych/ - można rozszerzyć także i dla równania termodynamicznego strugi płynącego czynnika /Fouriera-Kirchhoffa/ wówczas jednak w miejsce sił należy brać wartości energii.

6/ Dla określenia kryteriów podobieństwa nie tylko nie jest konieczna znajomość rozwiązania równań różniczkowych, ale nie jest nawet konieczna znajomość ostatecznej formy równań różniczkowych, wystarczą bowiem jak to wykazano na przykładzie 5.5. znajomość wyjściowych równań, które ujmują w sposób wystarczający zjawisko.

7/ Natomiast konieczna jest znajomość wszystkich praw, które wpływają na rozpatrywany przypadek.

8/ Określanie kryteriów podobieństwa metodami zwanymi "analizą wymiarową" prowadzi do możliwości poważnych pomyłek /np. paradoks Riabuszyńskiego, lub rozpatrzone przez Rayleigha zjawisko ogrzewania kuli zanurzonej w płynie bez uwzględnienia lepkości cieczy/. Przyczyną tego jest luźny związek metody z sensem praw fizycznych. Związek ten, jak wykazano /8/ polega jedynie na tym, że wymiar wielkości pochodnej jest wtórną konsekwencją prawa fizycznego lub definicji. Dlatego właśnie posługując się analizą wymiarową - stosujemy jednak prawa fizyki, lecz w formie pozbawionej precyzji, nie wnikając zbytnio w sens fizyczny używanych wielkości.

9/ Metoda równań ramowych posiada zaletę jednoznaczności i samorzutności tzn. po ustaleniu praw rządzących zjawiskiem i określeniu wielkości charakterystycznych w oparciu o te prawa, budowa kryteriów podobieństwa jest prosta i nie budzi żadnych wątpliwości.

10/ Wyprowadzenie metody podano dla przypadku nader szczegółowego. Należy przypuszczać, że wyprowadzenie jej dla ogólnego przypadku, podobnie jak udowodnienie II teorematu podobieństwa nie jest jeszcze możliwe.

LITERATURA

[1] E. E c k e r t - "Einführung in den Wärme-und Stoffaustausch" Springer-Verlag, Berlin,1949

[2] H. G r ö b e r - S. E r k - "Die Grundgesetze der Wärmeübertragung" Springer-Verlag, Berlin 1933

[3] T. H o b l e r - "Ruch ciepła i wymienniki" PWT, W-wa,1953

[4] М.В. К и р п и ч е в "Анализ Размерности", Изв. АН.СССР - ОТ.Т.Н. 9/53

[5] А.В. Л ы к о в"Теория Теплопроводности" Техн. Теор. Лит. Москва 1952

[6] М.А. М и х е е в"Основы Теплопередачи " Гос. Эн Издат. М - Л 1956

[7] St. O c h ę d u s z k o - "Teoria Maszyn Cieplnych" cz.III, Warszawa PWT, 1955

[8] W. O k o ł o - K u ł a k - "Właściwe zastosowanie analizy wymiarowej". Zeszyty Nauk. Politechniki Śląskiej ENERGETYKA II, PWN,1957

[9] W. O k o ł o - K u ł a k - "Kryteria podobieństwa cieplnego w przypadku konwekcji naturalnej" Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ENERGETYKA III,PWN

[10] O. S a u n d e r s, P. C l a d e r - "Теплообмен в сопле при сверхзвуковых скоростях" Вопр. Рак. Тех 1/54

[11] P r a n d t l: "Dynamika przepływów" PWT W-wa, 1956

Определение критериев подобия при помощи метода „рамовых уравнений”

Резюме

Основной темой работы установление правильного метода определения критериев подобия физических явлений. Доказано, что основой на которой должен опираться такой метод есть дефиниция подобия явлений при одновременном употреблении дифференциальных (или иных) уравнений, обнимающих законы физики, имеющие существенное влияние на развитие рассматриваемого явления. Установлено требования, которым должен соответствовать правильный метод нахождения критериев подобия. Метод Прандтля можно расширить принимая вместо уравнений Навье-Стокса термодинамическое уравнение струи протекающего фактора (Фурье-Кирхгофа). Однако тогда вместо сил следует брать значения энергии или её приращения. Подано способ, который отвечает упомянутым выше требованиям — метод рамовых уравнений. Доказано, что при употреблении предложенного метода не только не является обязательным знание решений дифференциальных уравнений, но даже не обязательно знание окончательного вида упомянутых уравнений. Достаточно, как это было доказано на одном из многочисленных примеров, знание только исходных уравнений однако под условием, что они определают явление достаточным образом. Предложенный метод „рамовых уравнений” имеет преимущество однозначности, быстроты и простоты. Характер и значение отдельных величин при употреблении этого метода не вызывает никаких сомнений, так как связан с законами управляющими рассматриваемым явлением. Для иллюстрации упомянутых выводов подано многочисленные примеры.

The Determination of Criteria of Similarity by Means of the "Frame Equation" Method

SUMMARY

The ain of this paper is to find out a proper method of determining the criteria of similarity in physical phenomena. The basis on which such a method should operate, is the definition of similarity of phenomena, At the same time differential equations /or equations of any other kind/ should be used- which express physical laws being of substantial influence on the course of the phenomenon in question, Demands were set up, to which the proper method of making out the criteria of similarity should answer, Prandtl's method might be enlarged by using the thermodynamic equation of the streem of a flowing medium /Fourier-Kirchhoff/, instead of that of Navier-Stokes. In such cases, however, instead of force, the value of energy must be taken, or its increase. A method is given which meets all those demands mentioned above- i,e, the "frame equation" technique. It was shown also, that using the proposed method it is not necessary to know how to solve a differential equation neither is it necessary to know the final form of those equations, The knowledge of only basic equations - as it was shown on one of the numerous examples, that are given here - ought to be sufficient for the purpose, under the condition, however, that these basic equations illustrate the phenomenon clearly enough.
The proposed "frame equation method" has the advantage of being synonymous, simple, and quick in operation.
The character and meaning of the used values do not arouse any doubts- as they are strictly connected with the laws ruling the phenomenon in question. To illustrate the subject better the author gives a lot of examples.