

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

O PEWNYM GRAFICZNYM SPOSOBIE PRZEDSTAWIENIA RÓWNANIA

$$y = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} \quad (A_i, \alpha_i \text{ stałe})$$

I JEGO ROZWIĄZANIU ZE WZGLĘDU NA ZMIENNĄ NIEZALEŻNĄ t .

Streszczenie: W pracy rozpatrzono sposób rozwiązania równania (1) ze względu na zmienną niezależną t . Wykorzystano do tego przedstawienie, będące uogólnieniem na przestrzenie n -wymiarowe współrzędnych trójkątowych i czworościennych. Przy odpowiednim doborze układu odniesienia zagadnienie możemy sprowadzić do problemu płaskiego. Przedstawienie pozwala równocześnie przedyskutować przebieg każdego składnika równania (1) z osobna.

1. Wstęp

W pracy doktorskiej pt.: "Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego", autor rozpatrywał oscylacje temperatur układu n ciał, z których jedno posiadało źródło ciepła załączane i wyłączane w określonych chwilach. Rozpatrywane ciała wymieniają ciepło z sobą i z otoczeniem. Liniowa teoria tego zagadnienia prowadzi do rozwiązań dla przebiegów temperaturowych w czasie ogrzewania i ostygnięcia typu

$$v_i^s = \sum_{k=1}^n A_{ik} e^{\alpha_k t} + \theta_i, \quad i=1 \dots n \quad (1)$$

gdzie:

- θ_i - temperatury stanu ustalonego i-tego ciała,
- A_{ik} - stałe wyznaczone z warunków początkowych,
- α_k - stałe rzeczywiste ujemne,
- v_i - temperatura i-tego ciała,
- t - czas.

Koniec ogrzewania lub ostygnięcia charakteryzuje się osiągnięciem przez wybrane ciało pewnej temperatury, na którą jest nastawiony czujnik termoregulatora. Osiągnięcie tej temperatury decyduje o wyłączeniu lub załączeniu źródła ciepła.

Powstaje problem wyznaczenia chwili zakończenia danego procesu, innymi słowy chodzi o rozwiązanie równania (1) ze względu na czas, gdy v_i , θ_i , α_k , A_{ik} są znane.

W części rozdz. IV wymienionej wyżej pracy doktorskiej podano metodę, pozwalającą określić wielkość każdego członu tego równania dla danej temperatury w przypadku $n=3,4 \dots$ ciał. W niniejszej notatce uzupełniono rozważania rozpatrzeniem przypadku dwu ciał, który jest traktowany nieco odmiennie.

2. Układ dwuskładnikowy ($n=2$)

W tym przypadku równanie (1) można napisać następująco:

$$v_i - \theta_i = A_{i1} e^{\alpha_1 t} + A_{i2} e^{\alpha_2 t}, \quad i=1,2 \quad (2)$$

Dla $v_i - \theta_i \neq 0$ można je ująć w postaci:

$$1 = A_{i1} e^{\alpha_1 t} / (v_i - \theta_i) + A_{i2} e^{\alpha_2 t} / (v_i - \theta_i) \quad (3)$$

Wykorzystując tu w mianownikach zależność (2) napiszemy równanie (3) następująco:

$$1 = l_{i1} + l_{i2} \quad i = 1,2 \quad (4)$$

przy czym nowe zmienne l_{i1} , l_{i2} zdefiniowane są następująco:

$$l_{i1} = A_{i1} e^{\alpha_1 t} / (v_i - \theta_i) = A_{i1} / (A_{i1} + A_{i2} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}) \quad (5)$$

$$l_{i2} = A_{i2} e^{\alpha_2 t} / (v_i - \theta_i) = A_{i2} / (A_{i2} + A_{i1} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t})$$

Wprowadzone tak wielkości zmieniają się monotonicznie od wartości

$$A_{i1} / (A_{i1} + A_{i2}) \quad \text{lub} \quad A_{i2} / (A_{i1} + A_{i2})$$

dla $t = 0$ do wartości

$$l_{i1} = 1 \quad \text{lub} \quad l_{i2} = 0$$

dla $t \rightarrow \infty$, jeżeli przyjmie się, że $|\alpha_2| > |\alpha_1|$.

Równania (5) przedstawiają w postaci parametrycznej prostą w układzie (l_{i1}, l_{i2}) . Ponieważ w równaniu (5) temperatura nie figuruje explicite, przez wyliczenie zaznaczamy punkty, odpowiadające poszczególnym temperaturom na tej prostej. Układ tych punktów jest uzależniony od tego, czy wielkości l_{i1} , l_{i2} są jednakowego znaku, czy też znaku przeciwnego.

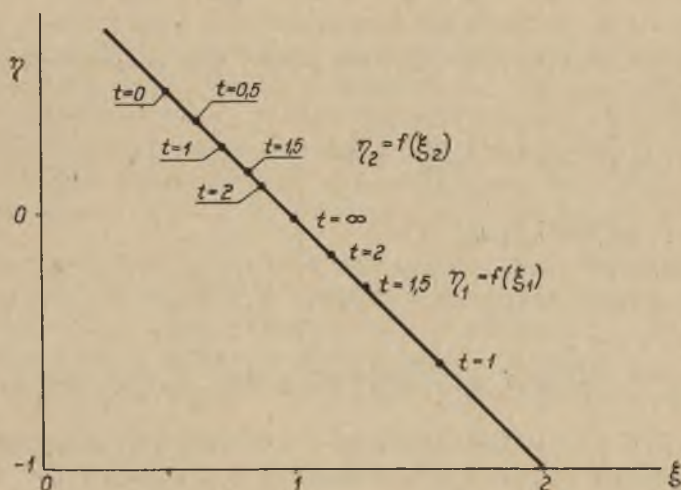
Fizykalnie wiąże się to z problemem, czy dany przebieg temperatury odpowiada źródłu ciepła, czy też ciału, które źródła ciepła nie posiada. Odpowiednio do tego relacja (4) może być przedstawiona w formie odcinka o długości jednostkowej. W przypadku zgodnych znaków, oba odcinki l_{i1} i l_{i2} mieszczą się w obrębie odcinka jednostkowego. W przypadku przeciwnych znaków jeden z nich jest o długość odcinka jednostkowego dłuższy od drugiego.

Na rysunku 1 nakreślono prostą wynikającą z równania (4) i zaznaczono na niej punkty odpowiadające poszczególnym temperaturom w dwu omówionych wyżej przypadkach. W obranym na rysunku 1 przykładzie przyjęto następujące założenia:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -1, \quad A_{i1} = \frac{1}{2} A_{i2} = 1$$

W miejsce l_{i1} , l_{i2} zastosowano symbole ξ, η analogicznie do dalej rozpatrywanych przypadków. Posługiwanie się wykresem jest następujące:

Jeżeli do danej temperatury $\nu_1^h - \theta_1$ znajdziemy na rysunku 1 współrzędną $l_{i1} = \xi$ lub $l_{i2} = \eta$ możemy zna-



Rys.1. Wykres, przedstawiający zmienność składników równania, odnoszącego się do przypadku dwu ciał

leźć odpowiednie t z równania (5). Indeks 2 na rysunku 1 odnosi się do przypadku zgodnych znaków ξ i η , indeks 1 do znaków przeciwnych. Gdyby stosunek A_{i1}/A_{i2} nie był równy jedności, zmieniłoby się położenie poszczególnych punktów na wykresie, przy czym punkt odpowiadający $t = \infty$ nie ulega zmianie.

3. Problem rozwiązania równań wieloskładnikowych

Problem postawiony we wstępie niniejszej pracy daje się w przypadku układu dwuskładnikowego rozwiązać w płaszczyźnie.

W podanej niżej metodzie chodzi o podanie takiej konstrukcji, która byłaby wykonalna w płaszczyźnie dla dowolnego n . Jest to możliwie przez uogólnienie idei znanych z geometrii i licznych zastosowań (w szczególności w nomografii) współ-

rzędnych trójkątowych na przestrzenie wielowymiarowe. Podobnie jak w przypadku współrzędnych trójkątowych, główna trudność polega na podaniu równania i wykresu krzywej, przedstawiającej zmianę temperatury. Przeprowadzono szczegółowe rozumowanie dla trzech ciał, ponieważ w przypadku układów więcej wymiarowych wszystkie rozumowania przenoszą się prawie bez zmian.

4. Układ trójskładnikowy

Do przedstawienia używamy współrzędnych trójkątowych, które pozwalają trzy zmienne przedstawić na płaskim wykresie. W układzie współrzędnych prostokątnych (ξ, η) przyjmujemy trójkąt o bokach a, b, c . W polu tego trójkąta przyjmujemy dowolny punkt i prowadzimy zeń trzy prostopadłe $l_i, i=1,2,3$ do trzech boków. Dla trójkątów utworzonych przez połączenie danego punktu z wierzchołkami pierwotnego trójkąta, wprowadzamy wzory dla obliczenia pól

$$\Delta_1 = l_1 \frac{a}{2}, \quad \Delta_2 = l_2 \frac{b}{2}, \quad \Delta_3 = l_3 \frac{c}{2} \quad (6)$$

Pole pierwotnego trójkąta oznaczamy przez Δ . Wtedy

$$1 = \frac{a}{2\Delta} l_1 + \frac{b}{2\Delta} l_2 + \frac{c}{2\Delta} l_3 \quad (7)$$

Do podobnej postaci doprowadzamy równanie przedstawiające czasową zmienność jednej z temperatur np.

$$A_{31} e^{\alpha_1 t} / (\nu_3 - \theta_3) + A_{32} e^{\alpha_2 t} / (\nu_3 - \theta_3) + A_{33} e^{\alpha_3 t} / (\nu_3 - \theta_3) = 1 \quad (8)$$

przy czym wszystkie wielkości poza t uważamy za stałe i znane.

Wykonujemy następujące przyporządkowanie

$$l_i a_i / 2\Delta = A_{3i} e^{\alpha_i t} / (\nu_3 - \theta_3), i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c$$

Poszczególne funkcje wykładnicze są więc proporcjonalne do wysokości, poprowadzonych z punktu na polu trójkąta lub też na zewnątrz niego. Jest to uzależnione od umowy dotyczącej znaku tych wysokości oraz od znaku odpowiednich członów prawej strony równania (9).

Miejsce geometryczne punktów przedstawiających badany przebieg temperatury znajdujemy następująco: W równaniach (9) występuje wspólna zmienna, mianowicie czas. Musimy więc tak przekształcić równanie, by przez rozwiązanie jednego z nich, nie otrzymać z pozostałych równań wartości sprzecznej.

W tym celu eliminujemy czas z równań (9). Daje to nam następującą relację

$$\left(\frac{l_1 a A_{32}}{l_2 b A_{31}} \right)^{\alpha_1 - \alpha_3} = \left(\frac{l_1 a A_{33}}{l_3 c A_{31}} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (10)$$

Jest to równanie szukanej krzywej w układzie (ξ, η) . Aby to zobaczyć wyrażamy l_i , $i=1,2,3$ przez zmienne ξ, η . Wielkości l_i przedstawimy jako równania boków trójkąta w formie normalnej. Wygodnie jest przyjąć następujące boki: w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych dwa boki w kierunku osi współrzędnych, trzeci bok przecinający je dowolnie. Wtedy

$$l_1 = \xi, \quad l_2 = \eta, \quad l_3 = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi + p$$

przy czym $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, p oznaczają stałe, za pomocą których możemy wpływać na wygląd wykresu.

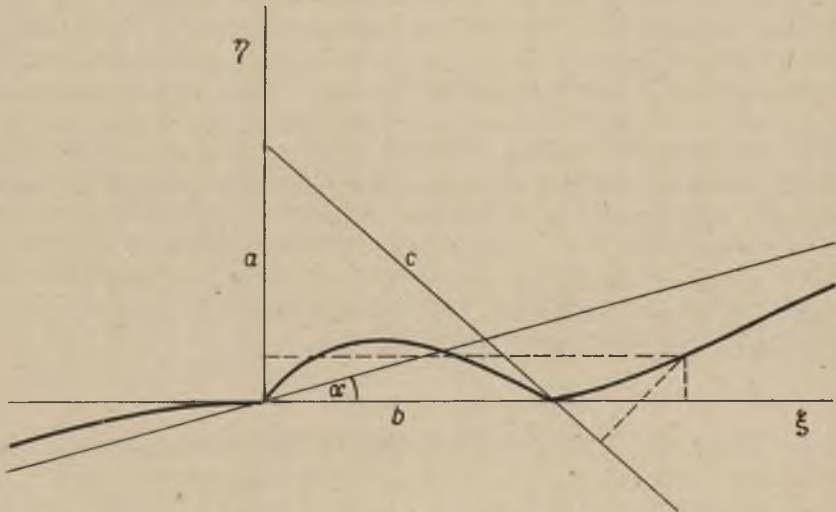
Równanie krzywej (10) możemy więc napisać następująco

$$\left(\frac{\xi a A_{32}}{\eta b A_{31}} \right)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}} = \frac{\xi a A_{33}}{(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi + p) c A_{31}} \quad (12)$$

Bok c (rys.2) odcina na obu osiach następujące dodatnie odcinki:

$$\begin{aligned} \text{dla } \xi &= 0, & \eta &= -p/\sin \varphi = a \\ \text{dla } \eta &= 0, & \xi &= -p/\cos \varphi = b \end{aligned}$$

Wynikają stąd możliwości wyboru znaków stałych wielkości φ , p . (Szczegółowa dyskusja została podana w przypisach).



Rys.2. Wykres, przedstawiający zmienność składników równania, odnoszącego się do przypadku trzech ciał

Jeżeli przyjmiemy kąt φ w pierwszej ćwiartce, możliwe jest spełnienie ostatnich zależności dla $p < 0$. Na podstawie dyskusji, przeprowadzonej w przypisach, należy przyjąć $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ ujemne.

Oznaczając

$$z = \eta / \xi, \quad c = \left| \frac{A_{31} b}{A_{32} a} \right|^{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}} \cdot \frac{A_{33} a}{A_{31} c} \quad (13)$$

otrzymujemy z równania (12)

$$\xi = p/(C |z| \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} - z \sin \varphi - \cos \varphi) \quad (14)$$

$$\eta = z \xi$$

Przy uczynionych wyżej założeniach o φ i p , otrzymujemy przebieg krzywej jak na rys.2. Krzywa dotycząca ciała, które ma źródło ciepła, leży wewnątrz trójkąta (wszystkie wysokości dodatnie). Dla ciał bez źródeł ciepła, krzywa jest nieciągła i leży na zewnątrz trójkąta ze względu na różne znaki poszczególnych wysokości. Kształt krzywej jest zależny od stałej C , od wartości stosunków

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \text{ i } \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

oraz od wyboru boku c . Zmiana parametrów układu wpływa na położenie asymptoty, wskutek czego krzywa wygina się w górę albo w dół.

Zmienna niezależna z ma następującą postać (zob. równanie (9))

$$z = l_2/l_1 = a A_{32} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} / b A_{31} \quad (15)$$

Przy założeniu, że $|\alpha_2| > |\alpha_1|$, wielkość ta zmienia się od $a A_{32}/b A_{31}$ dla $t = 0$, do zera dla $t \rightarrow \infty$.

Jeżeli z lewej strony podstawimy za $\xi = l_1$ wartość z (9), równanie (15) pozwala przyporządkować poszczególnym punktom krzywej temperatury $\nu_i - \theta_i$. Mając tak wycechowaną krzywą, możemy odwrotnie do każdego $\nu_i - \theta_i$ znaleźć odpowiednie t oraz wartość poszczególnych członów równania (8).

5. Układ czterokładnikowy

Układ czterokładnikowy może być przedstawiony w przestrzeni trójwymiarowej za pomocą współrzędnych czworościennej.

Jeżeli w dowolnym czworościanie obierzemy dowolny punkt, położenie jego możemy określić za pomocą czterech odległości od ścian czworościanu l_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Jeżeli objętość czworościanu oznaczymy przez V , objętości czworościanów częściowych, powstałych przez połączenie danego punktu z wierzchołkami czworościanu, oznaczymy przez V_i , $i = 1 \dots 4$. Oznaczając pola trójkątów podstaw częściowych czworościanów przez P_i , $i = 1 \dots 4$ otrzymuje się następujące oczywiste związki

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_i = l_i P_i / 3, \quad i=1 \dots 4 \quad (16)$$

lub po prostych przekształceniach:

$$1 = l_1 P_1 / 3 V + l_2 P_2 / 3 V + l_3 P_3 / 3 V + l_4 P_4 / 3 V \quad (17)$$

Jeżeli przebieg temperatur napiszemy w postaci

$$v_i - \theta_i = \sum_{k=1}^4 A_{ik} e^{\alpha_k t}, \quad i = 1 \dots 4 \quad (18)$$

można zastosować następujące przyporządkowanie

$$l_k P_k / 3 V = A_{ik} e^{\alpha_k t} / (v_i - \theta_i), \quad k=1 \dots 4 \quad (19)$$

Równania płaszczyzn ograniczających czworościan ujęto w formie normalnej:

$$l_1 = \xi, \quad l_2 = \eta, \quad l_3 = \zeta,$$

$$l_4 = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma + p \quad (20)$$

gdzie:

ξ, η, ζ - współrzędne prostokątne przestrzenne,

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, p$ - wielkości stałe.

Ze względu na występujący w l_i wspólny czas, spełnione są następujące związki

$$(\xi P_1 A_{i2} / \eta P_2 A_{i1})^{\alpha_1 - \alpha_3} = (\xi P_1 A_{i3} / \zeta P_3 A_{i2})^{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$(\xi P_1 A_{i2} / \eta P_2 A_{i1})^{\alpha_1 - \alpha_4} = \left[\xi P_1 A_{i4} / (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma + p) P_4 A_{i1} \right]^{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (21)$$

Wprowadzając oznaczenia

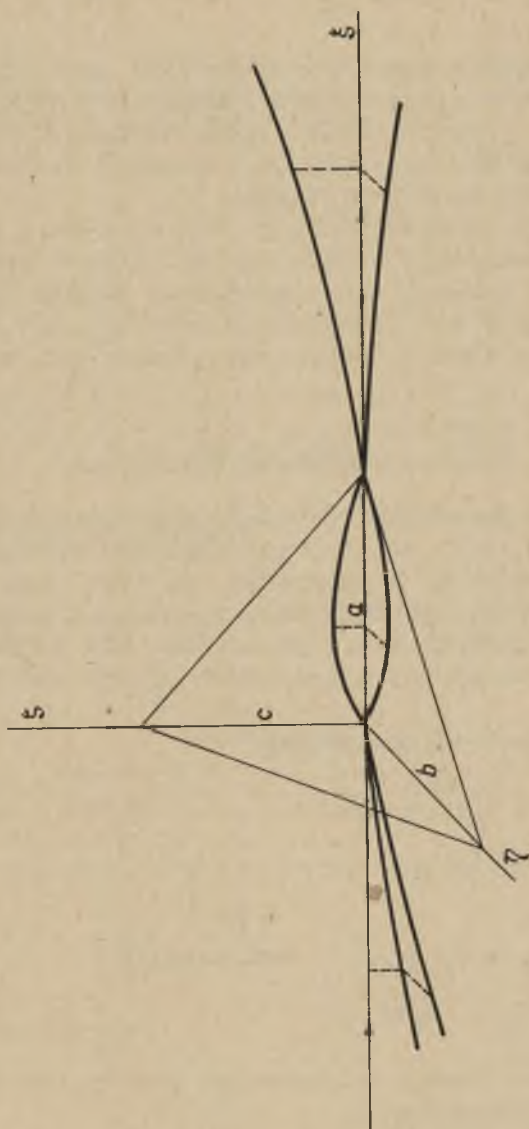
$$z = \eta / \xi, \quad v = \zeta / \xi$$

$$C = \left| \frac{P_2 A_{i1}}{P_1 A_{i2}} \right| \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{P_3 A_{i1}}{P_1 A_{i3}}$$

$$D = \left| \frac{P_2 A_{i1}}{P_1 A_{i2}} \right| \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{P_4 A_{i1}}{P_1 A_{i4}} \quad (22)$$

otrzymujemy

$$\xi = p / (D |z| \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_3} - z \cos \beta - C \cos \gamma |z| \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} - \cos \alpha) \quad (23)$$



Rys.3. Wykres, przedstawiający zmienność składników równania, odnoszącego się do przypadku czterech ciał

albo

$$\xi = p / \left(D \left| \frac{v}{c} \right| \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_3} - \cos \beta \left| \frac{v}{c} \right| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} - v \cos \gamma - \cos \alpha \right) \quad (24)$$

Krzywa jest określona przez równanie (23) lub (24) w połączeniu z jednym z pierwszych dwu równań (22). Dyskusję jej przebiegu możemy przeprowadzić w płaszczyźnie (ξ, η) lub (ξ, ζ) . Przebieg obu krzywych daje rysunek 3. Szczegóły konstrukcji podane są w przypisach.

Rysunek 3 jest perspektywiczny. Krzywe leżące wewnątrz czworościanu odpowiadają źródłu ciepła. Krzywe leżące na zewnątrz dotyczą ciała nie posiadającego źródła ciepła. Krzywe narysowano w dwu przekrojach płaskich. Do rozwiązania zagadnienia wystarczy oczywiście jeden taki przekrój.

6. Układ n-składnikowy, $n > 4$

Uogólnienie poprzednich rozważań na przypadek $n > 4$ można przeprowadzić w sposób podobny pod względem formalnym do przypadków poprzednich. W przypadku n ciał można by znaleźć również interpretację geometryczną podobną do podanych poprzednio, w przestrzeni $n-1$, wymiarowej. Nie wchodząc w interpretację geometryczną, uogólnienie przeprowadzimy czysto formalnie.

Wprowadzamy następujące związki:

$$1 = Q_1/Q + Q_2/Q + Q_3/Q + \dots + Q_n/Q \quad (25)$$

przy czym

$$Q_i = l_i k_i, \quad i=1 \dots n$$

gdzie:

l_i - odległości punktu przestrzeni $n-1$ wymiarowej od tworów $n-2$ wymiarowych;

k_i - wielkości stałe.

Przez porównanie tych wielkości z członami wyrażenia na przebieg czasowy temperatury, otrzymujemy

$$l_s k_s Q = \Lambda_{is} e^{\alpha_s t} (v_i - \theta_i), \quad s=1 \dots n \quad (26)$$

Przestrzeń $n-1$ wymiarową charakteryzujemy za pomocą współrzędnych prostokątnych (ξ_i) , $i=1 \dots n-1$ i równania dowolnie położonej hiperpłaszczyzny

$$\left. \begin{aligned} l_i &= \xi_i, \quad i=1 \dots n-1 \\ l_n &= \xi_1 \cos \alpha_1 + \dots + \xi_n \cos \alpha_n + p \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$\cos \alpha_i$ ($i=1 \dots n-1$), p_n - wielkości stałe, charakteryzujące położenie hiperpłaszczyzny.

Wyprowadzając oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} z_{ik} &= \xi_i / \xi_k, \quad i, k=1 \dots n-1, i \neq k \\ z_{k1} &= C_{k-2} z_{21} \frac{\alpha_1 - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad k=3 \dots n \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

otrzymujemy ostatnie równanie w następującej postaci

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_n / (C_{n-2} |z_{21}| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} - \cos \alpha_1 - z_{21} \cos \alpha_2 - \\ &- C_1 \cos \alpha_3 \cdot |z_{21}| \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} + \dots + C_{n-3} \cos \alpha_{n-1} |z_{21}| \frac{\alpha_1 - \alpha_{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (29)$$

przy czym

$$C_{k-2} = \left| \frac{k_2 A_{i1}}{k_1 A_{i2}} \right| \frac{\alpha_1 - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{k_1 A_{ik}}{k_k A_{i1}}, \quad k=3, \dots, n$$

Podobnie możemy napisać kilka dalszych równań, będących rzutami krzywej na inne płaszczyzny.

Każdorazowo problem sprowadzamy do problemu płaskiego. Krzywa, mimo bardziej złożonej postaci równania, ma przebieg podobny jak w przypadku 3 czy 4 ciał. Inne szczegóły omówiono obszernie w przypadku układu trójskładnikowego.

PRZYPISY

P.I. Dyskusja krzywej (14)

Przypadek I. $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$, więc $p < 0$.

a) $c > 0$.

W tym przypadku jest $A_{33}/A_{31} > 0$, ponieważ zaś przy założeniu $|\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3|$ jest $\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} > 1$, prze-

to dla dużych "z" przeważa znak pierwszego członu mianownika. Dla $z=0$ mianownik jest równy $-\cos \varphi$, następuje więc w miejscu pośrednim zmiana znaku mianownika. ξ zmienia się od $\xi = -p/\cos \varphi > 0$ dla $z=0$ przez $+\infty$, skok do $-\infty$ i do $\xi = 0$ dla $z = \infty$ (rys.2). Wykluczony jest bok b trójkąta.

Równanie definiujące z, może być zinterpretowane w płaszczyźnie (ξ, η) jako równanie prostej o nachyleniu zmiennym w zależności od wartości z, przy czym przy zmianie z od zera do ∞ prosta ta od położenia, pokrywającego się z osią ξ , przechodzi do położenia, pokrywającego się z osią η . Ponieważ skok krzywej (14) zachodzi dla z skończonego, odpowiadająca mu prosta, jest asymptotą krzywej.

Krzywa nie ma ekstremów, co wynika z badania pochodnej ze względu na z . Jeżeli napiszemy

$$\eta = p / (C |z| \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} - \sin \varphi - \frac{1}{z} \cos \varphi \right|) \quad (P 1)$$

pochodna mianownika ma postać następującą:

$$C \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} |z| \left| \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1 \right| + \cos \varphi / z^2 \right) > 0 \quad (P 2)$$

co wynika z założenia $|\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3|$. (Rys.2 odpowiada z dodatniemu).

Badanie, która krzywa odpowiada przebiegowi temperatury ϑ_3 przeprowadza się następująco:

Wykorzystując równania (8) i (9) otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{2\Delta}{a} A_{31} e^{\alpha_1 t} / \sum_{i=1}^3 A_{3i} e^{\alpha_i t} \\ l_2 &= \frac{2\Delta}{b} A_{32} e^{\alpha_2 t} / \sum_{i=1}^3 A_{3i} e^{\alpha_i t} \\ l_3 &= \frac{2\Delta}{c} A_{33} e^{\alpha_3 t} / \sum_{i=1}^3 A_{3i} e^{\alpha_i t} \end{aligned} \right\} \quad (P 3)$$

Stąd dla $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{2\Delta}{a} A_{31} / (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \\ l_2 &= \frac{2\Delta}{b} A_{32} / (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \\ l_3 &= \frac{2\Delta}{c} A_{33} / (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{P } 4)$$

dla $t = \infty$ przy założeniach $o |\alpha_1|$, jak wyżej

$$l_1 = 2\Delta/a = b, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0. \quad (\text{P } 5)$$

Z nierówności $A_{33}/A_{31} > 0$ i z warunku początkowego

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = v_3^8 - \theta_3 < 0, \quad (\text{P } 6)$$

wynika

$$A_{32}/A_{31} < 0.$$

Przyjęcie

$$A_{31} \leq 0, \quad A_{32} \geq 0, \quad A_{33} \leq 0$$

pociąga na podstawie powyższego

$$l_1 \geq 0, \quad l_2 \leq 0, \quad l_3 \geq 0$$

Ponieważ jednym z punktów krzywej jest punkt $(b, 0, 0)$, więc wchodzi w grę jedynie krzywe z ćwiartki 1 albo 4. Pierwszej odpowiadają $l_1 > 0, l_2 > 0, l_3 < 0$, drugiej $l_1 < 0, l_2 > 0, l_3 < 0$.

W przypadku dolnych nierówności dla A_{31} , krzywa leży w 4-tej ćwiartce. Wynika to stąd, że z jest ujemne, ponieważ l_1/l_3 posiada znak A_{31}/A_{32} .

b) $c < 0$

W tym przypadku mianownik ma przy z dodatnim stały znak i ξ zmienia się od $\xi = -p/\cos\varphi$, dla $z=0$ do $\xi = 0$ dla $z = \infty$. Odpowiednio η zmienia się od zera do zera przechodząc przez ekstremum, które w tym przypadku istnieje ze względu na przeciwne znaki obu członów pierwszej pochodnej ze względu na z . Krzywa przebiega wewnątrz trójkąta, co odpowiada wszystkim l_i dodatnim. Krzywa taka odpowiada temperaturze źródła ciepła. Wydaje się na pierwszy rzut oka, że krzywa ta przebiega nieprawidłowo, ze względu na występowanie ekstremum. Jest to spowodowane tym, że w l_i poza monotoniczną funkcją $e^{\alpha_i t}$ występuje w mianowniku zmienna wielkość $v_3 - \theta_3$. Jeżeli chodzi o przyporządkowanie punktów krzywej temperaturom, to w przypadku $v_1 - \theta_1$, dla $t = \infty$ otrzymujemy punkt $(b, 0, 0)$, natomiast dla $t = 0$ punkt o współrzędnych:

$$l_1 = \frac{2A}{a} A_{11} / (A_{11} + A_{12} + A_{13})$$

$$l_2 = \frac{2A}{b} A_{12} / (A_{11} + A_{12} + A_{13}) \quad (P 7)$$

$$l_3 = \frac{2A}{c} A_{13} / (A_{11} + A_{12} + A_{13})$$

W poprzedniej dyskusji przyjęto, że z jest dodatnie. W przypadku przeciwnego znaku, możliwe jest zerowanie się mianownika. Mielibyśmy więc następujące znaki: dla $z=0$ mianownik ujemny równy $-\cos\varphi$; dla większych $|z|$ o jego znaku decyduje dodatni człon $-z \sin\varphi$ oraz ujemny pierwszy człon mianownika.

Zmiana znaku występowałaby dwa razy. Ponieważ ujemnemu mianownikowi odpowiada dodatnie ξ , pojawiałyby się dwie gałęzie krzywych w ćwiartce 4, jedna zaczynająca się od $\xi = b$, druga od $\xi = 0$. Obie gałęzie miałyby asymptoty. Z tych gałęzi należy odrzucić zaczynającą się w $\xi = 0$, ponieważ musiałaby ona przeciąć bok c trójkąta, co oznaczałoby zmianę znaku współrzędnej l_3 , to zaś jest fizycznie niemożliwe. Gałąź odpowiadającą ujemnym ξ należy odrzucić również, ponieważ nie przechodzi ona przez punkt $(b, 0, 0)$.

Ze względu na $C < 0$, mamy w tym przypadku $A_{33}/A_{31} < 0$ oraz $A_{32}/A_{31} < 0$ (ze względu na $z < 0$), więc przy $A_{31} \leq 0$, $A_{32} \geq 0$, $A_{33} \geq 0$, otrzymujemy $l_1 \geq 0$, $l_2 \leq 0$, $l_3 \leq 0$. Rozwiązanie należy odrzucić ze względu na niezgodność znaków l_i ze znakami odpowiadającymi ćwiartce 4 układu współrzędnych.

Gdyby mianownik nie zerował się, mielibyśmy krzywą, stanowiącą odbicie w osi ξ krzywej leżącej wewnątrz trójkąta. Ponieważ, jak wyżej znaki l_i nie są zgodne ze znakami odpowiadającymi ćwiartce 4 układu współrzędnych, możliwość ta odpada.

Przypadek II. $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ ujemne, p dodatnie

$$a) C > 0$$

Ze względu na zmianę znaku $\cos \varphi$, otrzymujemy sytuację taką, jak w przypadku I-b).

$$b) C < 0$$

Przypadek ten odpowiada przypadkowi I-a).

P.II Dyskusja równania (23)

Jak w poprzednim przypadku zakładamy, że

$|\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < |\alpha_4|$, skąd wynikają następujące nierówności

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2} > \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} > 1$$

Odcinki, które płaszczyzna l_4 odcina na osiach układu w współrzędnych (rys.3) dane są następującymi wyrażeniami

$$a = -p/\cos \alpha$$

$$b = -p/\cos \beta$$

$$c = -p/\cos \gamma$$

Wynika z nich, że przy a, b, c dodatnich, wszystkie współczynniki kierunkowe muszą być zgodne znaku.

Rozumowanie będziemy przeprowadzać w płaszczyźnie (ξ, η) . Z równań (18)-(20) wynika

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{3V}{P_1} A_{i1} e^{\alpha_1 t} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} e^{\alpha_k t} \\ \eta &= \frac{3V}{P_2} A_{i2} e^{\alpha_2 t} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} e^{\alpha_k t} \\ \zeta &= \frac{3V}{P_3} A_{i3} e^{\alpha_3 t} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} e^{\alpha_k t} \end{aligned} \right\} \quad (P 1)$$

Stąd dla $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{3V}{P_1} A_{i1} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} \\ \eta &= \frac{3V}{P_2} A_{i2} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} \\ \zeta &= \frac{3V}{P_3} A_{i3} / \sum_{k=1}^4 A_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (P 2)$$

dla $t = \infty$

$$\xi P_1 / 3V = 1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad (P 3)$$

Ze względu na

$$V = a b c / 6,$$

$$P_1 = b c / 2, \quad P_2 = a c / 2, \quad P_3 = a b / 2 \quad (P 4)$$

ostatni punkt ma współrzędne $(a, 0, 0, 0)$, jest to więc punkt, odpowiadający stanowi ustalonemu dla wszystkich przebiegów temperaturowych. Ponieważ $(\alpha_1 - \alpha_4)/(\alpha_1 - \alpha_2)$ jest największym wykładnikiem dla dużych $z > 0$, a wartości mianownika decyduje człon pierwszy, dla $z = 0$ człon ostatni. Wynika stąd, że dla $D > 0$ i $z > 0$ krzywa przebiega tak, jak w przypadku Ia) układu trójskładnikowego. Podobnie przedstawia się sprawa dla $z < 0$.

W przypadku $D < 0$, wartość mianownika dla dużych $z > 0$ i dla $z = 0$ ma taki sam znak. Jeżeli mianownik nie zeruje się ($z > 0$), mamy krzywą wewnątrz trójkąta, jak w przypadku Ib) układu trójskładnikowego. Jeżeli mianownik zeruje się ($z < 0$), musi zerować parzystą ilość razy. Ze względu na sens fizyczny należy obrócić gałąź krzywej przechodzącą przez punkt $(a, 0, 0, 0)$ przebieg krzywych jest podobny jak w przypadku Ib).

Podobnie przebiega dyskusja w drugim rzucie (ξ, η) .

Praca wpłynęła do redakcji 10.XI.1961 r.

ОБ НЕКОТОРОМ ГРАФИЧЕСКОМ ИЗОБРАЖЕНИИ
УРАВНЕНИЯ ТИПА

$$y = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} \quad (\alpha_i, A_i, i = 1 \dots n \text{ постоянные})$$

И ЕГО РЕШЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЗАВИСИМОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ t

Резюме

В работе дан метод решения уравнения типа (1) (α_i отрицательная действительная, A_i действительная постоянная $i = 1 \dots n$) относительно независимой переменной t . К этой цели использовано обобщение треугольных и четырехстепенных координат на n -мерные пространства. Надлежащий выбор координатной системы дает возможность свести задачу к двухмерной плоскости. Этот способ изображения пригоден для дискуссии изменения любого члена уравнения (1).

A GRAPHICAL REPRESENTATION OF THE EQUATION

$$y = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} \quad (A_i, \alpha_i, i = 1, \dots n \text{ constants})$$

AND HIS RESOLUTION FOR THE INDEPENDENT VARIABLE t .

Summary

In the paper is given the method of the solution of the equation (1) (α_i real negative root, A_i real constant) with respect to the independent variable t . For this purpose is used a geometrical representation, based on the generalisation of the triangle and tetrahedron coordinates to n -dimensional space. By adequately choice of the coordinate frame the problem can be investigated in the two-dimensional plane. The representation is adapted for discussion of the variation of each term of the equation (1).