

Marian BŁACHUTA

METODY CZASU CIĄGŁEGO W PROJEKTOWANIU CYFROWYCH UKŁADÓW REGULACJI

CZEŚĆ 2: APROKSYMACJE I MODELE W PRZESTRZENI STANU *

Streszczenie. Omówiono relacje pomiędzy płaszczyznami s , w , γ oraz związki pomiędzy odpowiedzią czasową układu dyskretnego i ciągłego - dokładną i wynikającą z aproksymacji wymiernych $\exp s\Delta$. Następnie dokonano przeglądu znanych aproksymacji ciągłych układów z ekstrapolatorem, podstaw tzw. metody pseudociągłej oraz metod realizacji dyskretnej regulatorów ciągłych będących jej wynikiem. Omówiono metody realizacji cyfrowej różniczkowania oraz cyfrowy algorytm PID. Przedstawiono dyskretyzację modeli w przestrzeni stanu dla modeli korzystających z operatorów q , δ , λ oraz transformacje pomiędzy różnymi modelami.

CONTINUOUS-TIME METHODS IN THE DIGITAL SYSTEMS DESIGN PART 2: APPROXIMATIONS AND STATE-SPACE MODELS.

Summary. In the paper, the relationships between the s , w and γ planes as well as between the time responses of a discrete-time plant and a continuous-time ones: an exact and the one that results from different rational approximations of $\exp(s\Delta)$ are discussed. Next an overview of known approximation methods of continuous-time systems with an extrapolator is performed along with the presentation of the so called pseudo-continuous-time method, being a result of that approach. Methods of a digital realization of the differentiator and a digital PID algorithm are discussed. Digitalization of the state-space continuous time models using the operators q , δ and λ as well as transformations between different models are also studied.

* Wykonano w ramach projektu BW-404/RAu1/96

1. Wprowadzenie

W części pierwszej omówiono trzy podstawowe, teoretycznie równoważne, formy transmitancji dyskretnej układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu, związane z transformacjami \mathcal{Z} , Γ oraz \mathcal{W} . Zbadano ich własności graniczne przy okresie próbkowania zmierzającym do zera pokazując, że współczynniki transmitancji określonych zarówno na płaszczyźnie γ , jak i w zmierzają do współczynników transmitancji części ciągłej układu. Rozważania graniczne doprowadziły do sformułowania interesującej aproksymacji transmitancji dyskretnej na płaszczyźnie w , otrzymywanej przez prostą modyfikację transmitancji układu ciągłego. Pokazano również w prosty sposób, iż transmitancja określona na płaszczyźnie z ulega degeneracji polegającej na tym, że jej współczynniki zmierzają do pewnych wartości zależnych jedynie od struktury transmitancji ciągłej (względny rząd, ilość biegunów zerowych).

Omówiono również problem stabilności, własności linii pierwiastkowych oraz charakterystyk częstotliwościowych układów dyskretnych dla wymienionych transformacji. Wykazano, że we wszystkich przypadkach transmitancje określone za pomocą transformacji \mathcal{W} mają korzystniejsze własności od transmitancji określonych za pomocą transformacji Γ , związanej z operatorem δ .

Nurtem dominującym w literaturze są jednak aproksymacje: układu dyskretnego układem ciągłym lub układu ciągłego układem dyskretnym.

Przedmiotem tej pracy jest przegląd i uporządkowanie wyników znanych w literaturze, określenie relacji pomiędzy różnymi formami opisu układów regulacji dyskretnej w czasie oraz prezentacja nowych wyników dotyczących zwłaszcza transformacji \mathcal{W} .

2. Ocena jakości regulacji

2.1. Metody dokładne

Ocena przebiegów regulacji jest na ogół związana z pośrednią oceną rozwiązań czasowych, dokonywaną na podstawie rozkładu biegunów lub zer i biegunów układu regulacji. W przypadku układów stabilnych można mówić o jakości regulacji definiowanej w rozmaity sposób. W przypadku regulacji ciągłej prostym projektowym wskaźnikiem jakości regulacji jest 'zapas stabilności'. W przypadku zastosowania metody linii pierwiastkowych może on być rozumiany jako położenie pierwiastków równania charakterystycznego względem granicy stabilności, będącej osią $j\omega$ na płaszczyźnie $s = \sigma + j\omega$. Uzyskanie odpowiedniego rozkładu pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest również

celem niektórych metod bazujących na opisie w przestrzeni stanu (np. Kailath, 1980; Ackermann, 1985). W przypadku zastosowania metody charakterystyk częstotliwościowych zapas stabilności może być rozumiany jako zapas fazy, zapas modułu, maksimum charakterystyki modułu układu zamkniętego itp. Charakterystykę częstotliwościową w przypadku ciągłym definiuje się jako odwzorowanie osi $j\omega$ dla $-\infty < \omega < \infty$ poprzez transmitancję $K(s)$.

Powyższe metody są dobrze znane wśród inżynierów i są wyposażone w cały szereg praktycznych narzędzi i wskazań projektowych (np. D'Azzo, Houpis, 1988; Kuo, 1975; Franklin et al. 1991). Spośród nowszych metod syntezy układów regulacji bazujących na pojęciu transmitancji należy wymienić metody H^∞ (Francis, 1987) oraz IMC (Morari, Zafriou, 1989).

W przypadku regulacji dyskretnej problem ten jest bardziej złożony. Przede wszystkim należy dokonać rozróżnienia pomiędzy przebiegami w chwilach próbkowania i pomiędzy nimi. Rozróżnienie to jest szczególnie istotne dla zamkniętych układów regulacji. Niezależnie od wyboru formy opisu układu zamkniętego przebiegi w chwilach próbkowania są zależne od pierwiastków równania charakterystycznego układu dyskretnego, podczas gdy przebiegi pomiędzy chwilami próbkowania są dodatkowo zależne od pierwiastków równania charakterystycznego obiektu ciągłego. W niniejszej pracy zajmujemy się jedynie przebiegami w chwilach próbkowania. Okazuje się jednak, że pojęcia teorii układów ciągłych mają istotne znaczenie również dla przebiegów w dyskretnych chwilach czasu. Odpowiedź swobodną układu regulacji dyskretnej w czasie można przedstawić w postaci:

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_i z_i^k = \sum_{i=1}^n c_i (e^{s_i^* \Delta})^k, \quad (2.1)$$

gdzie z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ są pierwiastkami równania charakterystycznego układu dyskretnego, c_i - stałymi zależnymi od warunków początkowych, zaś

$$s_i^* = \frac{1}{\Delta} \ln z_i \quad (2.2)$$

są pewnymi liczbami zespolonymi. Wartości y_k można - zgodnie ze wzorem (2.1) - traktować jako próbki $y^*(t_k)$ pewnego, nie istniejącego w rzeczywistości, sygnału ciągłego $y^*(t)$ w chwilach $t = t_k = k\Delta$. Należy tu podkreślić, że przy odpowiednio wysokiej częstotliwości próbkowania w prawidłowo zaprojektowanym układzie regulacji dyskretnej rzeczywiste przebiegi wielkości regulowanej $y(t)$ nie odchylają się zbytnio od $y^*(t)$. Jest oczywiste, że przy takim postawieniu problemu pojęcia jakości układów ciągłych stają się w pełni adekwatne dla układów dyskretnych.

W przypadku płaszczyzny γ odpowiedniki stopnia stabilności i stopnia oscylacyjności przyjmują postać złożonych krzywych, zależnych dodatkowo od okresu próbkowania Δ .

Wynika to z zależności

$$z = e^{s\Delta}. \quad (2.3)$$

W przypadku wysokich częstotliwości próbkowania krzywe te mogą leżeć bardzo blisko okręgu jednostkowego. Interesujące projektanta wartości biegunów leżą wówczas w pobliżu punktu $z = 1$, zaś istotna informacja projektowa jest zawarta dopiero na dalekich miejscach po przecinku. Problem ten znika przy analizie układu na płaszczyźnie γ :

$$\gamma = \frac{e^{s\Delta} - 1}{\Delta}, \quad s = \frac{1}{\Delta} \ln(1 + \gamma\Delta). \quad (2.4)$$

W przypadku wysokich częstotliwości próbkowania i małych wartości $|s\Delta|$ zachodzi $\gamma \cong s$, dlatego interpretacja pierwiastków γ_i jest zbliżona do interpretacji s_i . Należy jednak podkreślić, że $\text{Re}(\gamma_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ nie gwarantuje stabilności układu.

Ze znacznie lepszą sytuacją mamy do czynienia analizując rozkład pierwiastków na płaszczyźnie w . Dla dowolnych wartości Δ granicą stabilności jest oś $\text{Im}(w)$, zaś przybliżenie $w \cong s$ obowiązuje w szerszym zakresie wartości $|s\Delta|$ niż na płaszczyźnie γ . Wynika to z zależności:

$$s = \frac{1}{\Delta} \ln(z) = \frac{1}{\Delta} \ln\left(\frac{1 + w\Delta/2}{1 - w\Delta/2}\right), \quad w = \frac{2 e^{s\Delta} - 1}{\Delta e^{s\Delta} + 1}. \quad (2.5)$$

Powyższe cechy transformacji \mathcal{W} powodują, że jest ona jednym z ważniejszych narzędzi analizy i projektowania impulsowych układów regulacji za pomocą metod stosowanych do układów ciągłych. Jako przykłady takich metod można wymienić metody częstotliwościowe oraz metody rozkładu pierwiastków i linii pierwiastkowych. Należy podkreślić, że przedstawione tu odwzorowania \mathcal{W} , Γ i \mathcal{Z} stanowią równoważne pod względem matematycznym formy opisu układu dyskretnego. Różnice między nimi polegają na dokładności reprezentacji parametrów za pomocą arytmetyki zmiennoprzecinkowej oraz łatwości interpretacji wyników przez projektanta. Regulatory uzyskane w wyniku projektowania na płaszczyźnie γ lub płaszczyźnie w są regulatorami dyskretnymi w czasie i mogą być zrealizowane w formie równania różnicowego po powrocie na płaszczyznę z i użyciu operatora przesunięcia q lub w formie równania stanu z użyciem operatora q albo operatora δ . Zgadnienia związane z opisem w przestrzeni stanu są omówione w p. 4.5.

2.2. Aproksymacje ciągłe transmitancji dyskretnej

Transmitancja dyskretna, będąca funkcją wymierną zmiennej z , wyrażona jako funkcja zmiennej s jest, ze względu na związek $z = e^{s\Delta}$, funkcją niewymierną. W celu wykorzystania teorii ciągłych układów regulacji o transmitancjach wymiernych dokonuje się wymiernego przybliżenia wyrażenia $z = e^{s\Delta}$.

Z prostego rozwinięcia w szereg MacLaurina i pozostawieniu wyrazów liniowych mamy:

$$z = e^{s\Delta} \cong 1 + s\Delta. \quad (2.6)$$

Z kolei z przybliżenia $z = e^{s\Delta}$ za pomocą wzoru Padé otrzymuje się:

$$z = e^{s\Delta} \cong \frac{1 + s\frac{\Delta}{2}}{1 - s\frac{\Delta}{2}}. \quad (2.7)$$

Podstawienie każdego z tych wyrażeń do transmitancji dyskretnej prowadzi do pewnej transmitancji ciągłej aproksymującej układ dyskretny. Formalnie pierwsze z tych rozwinięć przypomina odwzorowanie na płaszczyznę γ , zaś drugie na płaszczyznę w . Stwarza to szeroko rozpowszechnione, lecz błędne przekonanie, iż projektowanie na płaszczyźnie w i γ ma charakter przybliżony i jest słuszne jedynie dla odpowiednio wysokich częstotliwości próbkowania. Istotną różnicą polega na tym, iż obecnie s jest traktowane jak zmienna w transformacji Laplace'a, zaś uzyskana transmitancja jest transmitancją układu ciągłego.

Warunkiem stabilności jest obecnie $\text{Re}(s_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, zaś charakterystykę częstotliwościową uzyskuje się poprzez podstawienie $s = j\omega$. Jest oczywiste, że obliczone w ten sposób charakterystyki częstotliwościowe różnią się od charakterystyk dokładnych. Dotyczy to charakterystyk Bodego dla obydwu aproksymacji oraz charakterystyk Nyquista dla pierwszej z nich. Istotną zaletą aproksymacji Padé jest to, że zachowuje ona wszelkie pozytywne cechy transformacji \mathcal{W} . W szczególności zachowuje się kształt charakterystyk częstotliwościowych na płaszczyźnie Nyquista oraz warunki stabilności. Natomiast użycie warunku $\text{Re}(s_i) < 0$ jako warunku stabilności w przypadku aproksymacji (2.6) może dać wyniki błędne.

Odpowiedź czasową układu dyskretnego aproksymujemy obecnie odpowiedzią układu ciągłego:

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t_k} = \sum_{i=1}^n c_i (e^{s_i \Delta})^k. \quad (2.8)$$

Dla wartości $|s_i \Delta| \ll 1$ zachodzi:

$$s_i \cong s_i^* = \frac{1}{\Delta} \ln(z_i) = \frac{1}{\Delta} \ln\left(\frac{1 + w_i \Delta/2}{1 - w_i \Delta/2}\right) \cong w_i. \quad (2.9)$$

Zależność (2.9) uzasadnia stosowanie niektórych kryteriów jakości właściwych dla układów ciągłych również dla układów dyskretnych. Oznacza to, że wskazania projektowe dotyczące np. maksimum modułu charakterystyki nadążania i oparte na jej związku z cechami odpowiedzi skokowej układu ciągłego można przenieść na układy dyskretne, oczekując np. takich samych przeregulowań przy takich samych wartościach maksymalnych charakterystyk częstotliwościowych. Warto podkreślić, że w przypadku zastosowania

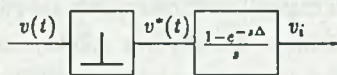
aproxymacji Padé wartości maksymalne obydwu charakterystyk częstotliwościowych - dokładnej i przybliżonej - nie różnią się bez względu na wartość okresu próbkowania. Zmianie - tym mniejszej im okres próbkowania jest krótszy - podlega jedynie wartość pulsacji rezonansowej.

3. Podejście pseudociągłe

3.1. Aproksymacja ciągła układu z ekstrapolatorem

W literaturze znane są również inne, znacznie prostsze metody aproksymacji układów dyskretnych układami ciągłymi. Polegają one na prostej, multiplikatywnej korekcji transmitancji ciągłej obiektu regulacji $K(s)$. Człon korygujący uzyskuje się w wyniku aproksymacji ekstrapolatora za pomocą pewnej transmitancji wiążącej sygnał wyjściowy ekstrapolatora z jego wejściem ciągłym.

Rozważmy schemat zastępczy układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Układ z ekstrapolatorem zerowego rzędu

Fig. 1. System with a zero-order hold

Oznaczmy transformatę Fouriera sygnału $v(t)$ poprzez $V(j\omega)$. Wówczas transformatą Fouriera ciągu impulsów $v^*(t)$ będzie (np. Kuo, 1970; Åström, Wittenmark, 1984):

$$V^*(j\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} V[j(\omega + k\omega_s)], \omega_s = 2\pi/\Delta. \quad (3.1)$$

Zakładając, że wyższe harmoniczne zawarte w sygnale $v^*(t)$ będą tłumione przez transmitancję:

$$K_0(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s} K(s), \quad (3.2)$$

można w przybliżeniu ograniczyć się do pierwszej harmonicznej sygnału $V^*(t)$. Odpowiada to przyjęciu za transmitancję impulsatora idealnego wartości $1/\Delta$.

W konsekwencji transmitancją charakteryzującą obiekt z ekstrapolatorem dla pierwszej harmonicznej będzie:

$$K^*(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s\Delta} K(s). \quad (3.3)$$

Transmitancja (3.3) jest niewymierna i niekiedy korzystnie jest aproksymować ją transmitancją wymierną. W przypadku aproksymacji opóźnienia trzema wyrazami szeregu MacLaurina uzyskuje się (Åström, Wittenmark, 1984):

$$K^*(s) = \left(1 - s\frac{\Delta}{2}\right)K(s), \quad (3.4)$$

zaś w przypadku zastosowania aproksymacji Padé pierwszego rzędu (Kuo, 1970, Franklin et al., 1991):

$$K^*(s) = \frac{1}{1 + s\frac{\Delta}{2}}K(s). \quad (3.5)$$

Zaletą aproksymacji (3.4) jest to, że nie zwiększa ona rzędu układu i jest zgodna z przybliżeniem

$$\bar{K}(w) \cong \left(1 - s\frac{\Delta}{2}\right)K(s) \Big|_{s=w}, \quad (3.6)$$

stosowanym dla syntezy regulatora na płaszczyźnie w . Jej nieminimalnofazowość może się natomiast okazać wadą. Aproksymacja (3.5) jest dokładniejsza i nie wnosi nieminimalnofazowości; ceną jest zwiększenie rzędu układu o 1.

W literaturze (Åström, Wittenmark, 1989; Isermann, 1980) spotyka się przybliżanie ekstrapolatora transmitancją $e^{-s\Delta/2}$. Wówczas zastępcza transmitancja $K^*(s)$ zespołu ekstrapolator-obiekt jest określona wzorem:

$$K^*(s) = e^{-s\Delta/2}K(s). \quad (3.7)$$

Nie posiada ona żadnych istotnych zalet w porównaniu z (3.4)-(3.6). Można zauważyć, że (3.4) może być również traktowane jako przybliżenie (3.8) za pomocą dwu wyrazów rozwinięcia MacLaurina.

3.2. Aproksymacja dyskretna transmitancji układu ciągłego

Stosując podejście pseudociągłe wybiera się jedną z omówionych w poprzednim punkcie metod modyfikacji obiektu ciągłego, a następnie dokonuje się syntezy regulatora ciągłego. Zgodnie z przyjętą filozofią sygnał wyjściowy tego regulatora winien być próbkowany i, po przetworzeniu przez ekstrapolator, wprowadzany jako sygnał regulujący na wejście obiektu ciągłego o transmitancji $K(s)$.

Jednakże istotą stosowania regulacji cyfrowej jest realizacja algorytmu sterowania w postaci cyfrowej. Pojawia się zatem problem aproksymacji algorytmu ciągłego algorytmem dyskretnym.

Realizację dyskretną otrzymuje się w najprostszym przypadku, podstawiając w miejsce s^{-j} , $j = 1, 2, \dots, n$ w algorytmie ciągłym $R(s)$ odpowiednią realizację dyskretną operatora całkowania rzędu j , wyrażoną poprzez zmienną 'z', otrzymując algorytm $R^*(z)$.

Postępowanie to jest słuszne dla transmitancji $R(s)$ właściwych, tzn. takich, w których stopień licznika jest nie większy od stopnia mianownika. W transmitancjach regulatorów stopień licznika jest na ogół równy stopniowi mianownika.

Metody dyskretnej aproksymacji układów ciągłych są burzliwie rozwijającym się działem teorii przetwarzania sygnałów i teorii sterowania (np. Kowalczyk, 1993).

W niniejszym punkcie zajmiemy się prostymi metodami bazującymi na aproksymacji dyskretnej operacji całkowania, kompatybilnymi z operatorami δ i λ .

W najprostszym przypadku wartość całki można przybliżyć powierzchnią prostokątów utworzonych poprzez dyskretne wartości funkcji. Dla tego przypadku zależność pomiędzy sygnałem wyjściowym i wejściowym integratora cyfrowego będzie miała postać wzoru rekurencyjnego

$$y(i\Delta + \Delta) = y(i\Delta) + \Delta x(i\Delta). \quad (3.8)$$

Zapisując (3.8) w postaci:

$$x(i\Delta) = \frac{y(i\Delta + \Delta) - y(i\Delta)}{\Delta} = \delta y(i\Delta) \quad (3.9)$$

widać, że integrator ten jest operatorem odwrotnym w stosunku do operatora δ .

Stosując transformację \mathcal{Z} , dostaje się transmitancję dyskretną tego integratora w postaci

$$H_I(z) = \frac{\Delta}{z-1} = \frac{\Delta z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (3.10)$$

Jest oczywiste, że

$$\tilde{K}_I(\gamma) = \frac{1}{\gamma}. \quad (3.11)$$

Jeśli wartość całki przybliżyć powierzchnią utworzoną przez łamaną łączącą kolejne dyskretne wartości funkcji, to równanie różnicowe wiążące sygnał wyjściowy i wejściowy członu całkującego będzie postaci:

$$y(i\Delta + \Delta) = y(i\Delta) + \Delta[x(i\Delta + \Delta) + x(i\Delta)]/2. \quad (3.12)$$

Równanie (3.12), zwane regułą trapezów, definiuje jednocześnie operator λ Tustina.

$$\lambda y(i\Delta) = x(i\Delta). \quad (3.13)$$

Stąd transmitancją dyskretną na płaszczyźnie z jest:

$$H_I(z) = \frac{\Delta}{2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{\Delta}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (3.14)$$

Jest oczywiste, że

$$\tilde{K}_I(w) = \frac{1}{w}. \quad (3.15)$$

Oprócz przedstawionych istnieje wiele różnych dyskretnych aproksymacji operatora całkowania charakteryzujących się małymi lub zerowymi błędami w odniesieniu do pewnych specjalnych funkcji. Na przykład reguła trapezów (3.12) daje zerowy błąd całkowania dla funkcji będącej łamaną, zaś reguła Simpsona daje zerowy błąd dla funkcji sklejanej drugiego rzędu. Innymi znanymi metodami są tzw. formy z Boxa-Thalera oraz Madweda (np. Kowalczyk, 1993). Ich zastosowanie nie jest jednak powszechne.

Obecnie prześledzimy aproksymację transmitancji ciągłej transmitancją dyskretną za pomocą przybliżenia całkowania regułą trapezów (3.14). Jest ona zgodna z transformacją biliniową i w związku z tym oprócz niewątpliwiej prostoty posiada wiele zalet. Zasadniczą zaletą jest zachowanie stabilności układu zamkniętego po dyskretyzacji regulatora.

Zauważmy, że dla transmitancji pierwszego rzędu

$$K_0(s) = \frac{1}{sT + 1} \quad (3.16)$$

po podstawieniu

$$s = \frac{2z - 1}{\Delta z + 1} \quad (3.17)$$

mamy

$$H_0^*(z) = \frac{z + 1}{2} \frac{1 - d^*}{z - d^*}, \quad (3.18)$$

gdzie

$$d^* = \frac{1 - \frac{\Delta}{2T}}{1 + \frac{\Delta}{2T}}. \quad (3.19)$$

Załóżmy, że transmitancja obiektu ciągłego jest określona wzorem:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (sT_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (sT_j + 1)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{sT_i + 1}, \quad (3.20)$$

gdzie $n > m$ oraz $T_i \neq T_j$ dla $i \neq j$.

Dokonując podstawienia (3.12) mamy:

$$H^*(z) = \frac{z + 1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \frac{1 - d_i}{z - d_i} = \frac{z + 1}{2} \frac{b_0^* z^{n-1} + \dots + b_{n-2}^* z + b_{n-1}^*}{z^n + a_1^* z^{n-1} + \dots + a_{n-1}^* z + a_n^*}. \quad (3.21)$$

Przedstawiony wynik pokazuje strukturę $H^*(z)$. Algorytm otrzymywania $H^*(z)$ nie wymaga dokonywania rozkładu na ułamki proste i polega na prostym podstawieniu:

$$H^*(z) = K\left(\frac{2z - 1}{\Delta z + 1}\right). \quad (3.22)$$

Bardzo istotną zaletą tej aproksymacji jest identyczność charakterystyk Nyquista oryginalu ciągłego i aproksymacji dyskretny. Dzięki temu dyskretyzacja regulatora nie pociąga za sobą konieczności jego przeprojektowania. Konsekwencją odkształcenia skali pulsacji (zwłaszcza dla pulsacji wyższych) na charakterystykach Bodego jest odkształcenie

przebiegów czasowych, zwłaszcza w ich początkowych fragmentach. Przy odpowiednio wysokich częstotliwościach próbkowania fragmenty te praktycznie nie obejmują chwil czasu odpowiadających przeregulowaniom i dalszych. Dzięki temu czasy regulacji także nie ulegają zmianie.

Opisana metodyka może być również użyta do przybliżonego wyznaczania transmitancji dyskretnej układu z ekstrapolatorem (Janiszowski, 1993). Przypomnijmy, że dokładna transmitancja dyskretna układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu jest określona wzorem:

$$H_0(z) = \frac{1-d}{z-d}, \quad d = e^{-\Delta/T}. \quad (3.23)$$

Z (3.19) widać, że d^* jest aproksymacją Padégo wielkości d . Dla małych wartości Δ/T zachodzi $d^* \cong d$, zatem na podstawie (3.20):

$$H^*(z) \cong \frac{z+1}{2} H(z), \quad (3.24)$$

gdzie $H(z)$ jest dokładną transmitancją dyskretną układu o transmitancji $K(s)$ z ekstrapolatorem zerowego rzędu. W związku z tym dla przybliżonej transmitancji $H_T(z)$ otrzymanej w wyniku transformacji Tustina ze wzoru (3.24) wynika formuła:

$$H(z) \cong H_T(z) = \frac{2}{z+1} H^*(z). \quad (3.25)$$

Dla oceny dokładności aproksymacji w tabelach 1, 2 zamieszczono wartości dokładne d oraz otrzymane w oparciu o (3.19).

Tabela 1

Δ/T	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
d	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679

Tabela 2

Δ/T	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
d^*	0.9048	0.8182	0.7391	0.6667	0.6000	0.5385	0.4815	0.4285	0.3793	0.3333

Jak widać z (3.23), w przypadku $\Delta \rightarrow 0$ pojawiają się takie same problemy graniczne jak w przypadku dokładnej transmitancji dyskretnej.

Problemy te mogą być rozwiązane za pomocą operatora δ lub transformacji Γ . Możliwe są tu dwa rozwiązania:

$$\tilde{H}^*(\gamma) = H^*(z) |_{z=1+\gamma\Delta}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{H}^*(\gamma) = K(s) \Big|_{s=\gamma/1+\gamma\Delta} \quad (3.27)$$

Drugie z tych rozwiązań jest zarówno dokładniejsze (nie wymaga tworzenia wrażliwej na błędy zaokrążeń reprezentacji $H^*(z)$), jak i mniej pracochłonne.

3.3. Porównanie niektórych aproksymacji

W przypadku projektowania regulatora dyskretnego metodami czasu ciągłego na płaszczyźnie w otrzymuje się, w przeciwieństwie do metody pseudociągłej, jego dokładną transmitancję dyskretną. Można jednakże zauważyć, że przyjmując w metodzie dokładnej aproksymację transmitancji dyskretniej określoną wzorem (3.6) oraz wybierając aproksymację (3.4) transmitancji obiektu z ekstrapolatorom w metodzie pseudociągłej, a następnie dyskretyzując wyznaczoną transmitancję regulatora otrzymuje się ten sam wynik, przy założeniu, iż zastosowano tę samą metodę syntezy regulatora. Wskazuje to na nieznaczne różnice pomiędzy różnymi metodami, zwłaszcza przy wysokich częstotliwościach próbkowania.

3.4. Dyskretna aproksymacja różniczkowania

W przypadku transmitancji niewłaściwych, jak np. transmitancji idealnego regulatora PID, pojawia się problem dyskretniej realizacji różniczkowania. Odwrócenie realizacji cyfrowej operatora całkowania na ogół nie prowadzi do uzyskania stabilnej realizacji operatora różniczkowania. Na przykład operator (3.17) odwrotny do (3.14) posiada biegun $z = -1$ i daje na wyjściu niegasnące oscylacje.

W najprostszym przypadku pochodną funkcji $x(t)$ w chwili $i\Delta$ możemy przybliżyć ilorazem różnicowym:

$$x'(i\Delta) \cong \frac{x(i\Delta) - x(i\Delta - \Delta)}{\Delta} \quad (3.28)$$

W związku z tym sygnał wyjściowy $y(i\Delta)$ najprostszego dyskretnego elementu różniczkującego będzie określony równaniem różnicowym:

$$y(i\Delta) = \frac{x(i\Delta) - x(i\Delta - \Delta)}{\Delta} \quad (3.29)$$

zaś transmitancja najprostszego filtru różniczkującego jest stabilną odwrotnością (3.10) i ma postać:

$$H_D(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta} = \frac{z - 1}{\Delta z} \quad (3.30)$$

Łatwo zauważyć, że przy $\Delta \rightarrow 0$ zachodzi $H_D(e^{s\Delta}) \rightarrow s$.

Jeśli wymagana jest wyższa jakość różniczkowania przy danym okresie próbkowania Δ , wówczas można zastosować bardziej złożony algorytm określony transmitancją:

$$H_D(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (1 - z^{-1})^k \quad (3.31)$$

lub

$$H_D(z) = \frac{1}{\Delta} (1 + 3z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})/6. \quad (3.32)$$

Należy podkreślić, że w przeciwieństwie do algorytmów całkowania dokładność algorytmów różniczkowania numerycznego jest bardzo silnie zależna od częstotliwości próbkowania.

3.5. Cyfrowy regulator PID

Jako jedną z możliwych prostych realizacji cyfrowych regulatora PID można przyjąć układ o transmitancji dyskretniej

$$H_R(z) = k_p \left(1 + \frac{\Delta}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_d}{\Delta} \frac{z-1}{z} \right). \quad (3.33)$$

Zastosowanie transformacji \mathcal{W} prowadzi do:

$$\tilde{K}_R(w) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i w} + \frac{T_d w}{1 + w\Delta/2} \right). \quad (3.34)$$

Jak widać, transmitancja regulatora na płaszczyźnie \mathcal{W} odpowiada dosyć dokładnie idealnej transmitancji regulatora PID z wyjątkiem inercji w składowej różniczkującej. Charakterystyki Bodego regulatora dyskretnego (3.34) i analogicznego ciągłego (tzn. otrzymanego po podstawieniu s w miejsce w) wykazują oczywiście rozbieżności wzrastające w miarę zbliżania się do wartości granicznej pulsacji $\omega\Delta \cong \pi$.

Jak się okazuje, stała czasowa $\Delta/2$ w (3.34) na ogół ogranicza skuteczność części różniczkującej regulatora dla częstotliwości próbkowania, przy których regulator dyskretny P lub PI daje rezultaty niewiele gorsze od analogicznego ciągłego. Efektywność składowej różniczkującej wzrasta dopiero przy zastosowaniu bardzo wysokich częstotliwości próbkowania.

W praktycznych realizacjach często stosuje się aproksymację dyskretną regulatora z filtracją pochodnej (Åström, Wittenmark, 1984, Isermann, 1985). Szerokie omówienie problematyki realizacji dyskretniej regulatora PID można znaleźć w pracy Kowalczyka (1989).

4. Modele w przestrzeni stanu

Modele w przestrzeni stanu mogą stanowić opis pierwotny układu dynamicznego, być konstruowane na podstawie transmitancji bądź też mogą stanowić postacie pośrednie w algorytmach obliczających transformacje pomiędzy różnymi formami opisu (Rostgaard et al., 1993).

4.1. Opis obiektu ciągłego

Niech obiekt regulacji będzie opisany układem równań stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (4.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(t), \quad (4.2)$$

gdzie \mathbf{x} jest n -wymiarowym wektorem stanu, \mathbf{A} jest macierzą $n \times n$, zaś \mathbf{b} i \mathbf{c} są wektorami n wymiarowymi. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że obiekt regulacji zapisany równaniami (4.1), (4.2) jest zarówno sterowalny jak i obserwowalny. Poddając równania (4.1), (4.2) transformacji \mathcal{L} Laplace'a można wyznaczyć transmitancję dyskretną $K(s)$.

$$K(s) = \mathbf{c}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (4.3)$$

Z kolei dysponując opisem (4.3) można z łatwością utworzyć model (4.1)-(4.2), np. na podstawie jednej z postaci kanonicznych (Ackermann, 1972).

4.2. Operator przesunięcia q i transformacja Z

Biorąc pod uwagę fakt, że w przypadku ekstrapolatora zerowego rzędu sterowanie jest pomiędzy momentami próbkowania t_i i t_{i+1} funkcją stałą:

$$u(t) = u(t_i + \sigma) = u_i, \quad \text{dla } 0 < \sigma \leq \Delta, \quad t_i = i\Delta, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

otrzymuje się równanie różnicowe obowiązujące dla dyskretnych momentów próbkowania

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_i + \mathbf{g}u_i, \quad (4.5)$$

$$y_i = \mathbf{c}'\mathbf{x}_i. \quad (4.6)$$

Pomiędzy opisem dyskretnym a ciągłym zachodzą następujące związki:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\Delta} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{g} = \int_0^{\Delta} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}d\tau \quad (4.8)$$

Algorytmy numeryczne do wyznaczania F i g są omówione w pracach (Grace et al., 1992; Thompson, 1989).

Równanie (4.5) można również zapisać za pomocą operatora przesunięcia q :

$$qx_i = Fx_i + gu_i, \quad (4.9)$$

co prowadzi do opisu wejściowo-wyjściowego:

$$A(q)y_i = B(q)u_i, \quad (4.10)$$

gdzie

$$A(q) = \det(qI - F) = q^n + a_1q^{n-1} + \dots + a_n, \quad (4.11)$$

$$B(q) = c' \text{adj}(qI - F)g = b_1q^{n-1} + \dots + b_n. \quad (4.12)$$

Transmitancja dyskretna $H(z)$ jest określona zależnością:

$$H(z) = c'(zI - F)^{-1}g = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (4.13)$$

Algorytmy numeryczne do wyznaczania transmitancji na podstawie opisu w przestrzeni stanu omówiono obszernie w pracach Grace et al., 1992; Thompson, 1989.

Wprowadzenie macierzy Ω :

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta e^{A\tau} d\tau = I + \frac{1}{2!}(A\Delta) + \frac{1}{3!}(A\Delta)^2 + \dots \quad (4.14)$$

pozwala na wyrażenie zarówno F , jak i g poprzez Ω :

$$F = I + \Omega A \Delta, \quad (4.15)$$

$$g = \Omega b \Delta. \quad (4.16)$$

Równanie (4.14) definiujące macierz Ω jest poprawne numerycznie i może być użyte do jej numerycznego wyznaczania. Można z łatwością sprawdzić, że

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F = I, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} g = 0. \quad (4.17)$$

Wynik ten wskazuje na degenerację opisu (4.5), (4.6) dla wysokich częstotliwości próbkowania.

4.3. Opis za pomocą operatora δ

Operator δ , będący w istocie operatorem ilorazu różnicowego, wyraża się poprzez operator q następująco (Goodwin et al., 1986; Middleton, Goodwin, 1990):

$$\delta = \frac{q-1}{\Delta}. \quad (4.18)$$

Wprowadzając ten operator do równań (4.5)-(4.6) otrzymujemy:

$$\delta \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_i + \bar{\mathbf{b}} u_i, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}_i \Delta, \quad (4.20)$$

$$y_i = \mathbf{c}' \mathbf{x}_i, \quad (4.21)$$

przy czym:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{I}}{\Delta} = \Omega \mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{g}}{\Delta} = \Omega \mathbf{b}. \quad (4.22)$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}. \quad (4.23)$$

Widać zatem, że przy wzroście częstotliwości próbkowania równanie (4.19) nie degeneruje się i dąży w granicy do równania różniczkowego (4.1).

Równania (4.19)-(4.21) mogą zostać użyte do symulacji układu z ekstrapolatorem dla dowolnie szerokiego zakresu częstotliwości próbkowania. Według Middletona i Goodwina (1990) przy wysokich częstotliwościach próbkowania błąd zaokrągleń może być o rząd mniejszy niż w przypadku zastosowania równań (4.5)-(4.6).

Opis w dziedzinie operatora δ może być również zastosowany do równań dyskretnych, aproksymujących regulator ciągły. Problem ten omawia się w punkcie 4.6.

Podobnie jak uprzednio, na podstawie (4.19)-(4.21) można napisać równania wejściowo-wyjściowe

$$\bar{\mathbf{A}}(\delta) y_i = \bar{\mathbf{B}}(\delta) u_i, \quad (4.24)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\delta) = \det(\delta \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \delta^n + \bar{a}_1 \delta^{n-1} + \dots + \bar{a}_n, \quad (4.25)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\delta) = \mathbf{c}' \text{adj}(\delta \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \bar{b}_1 \delta^{n-1} + \dots + \bar{b}_n. \quad (4.26)$$

Podobnie, przyjmując zmienną zespoloną γ , można dokonać transformacji Γ równań (4.19),(4.21) otrzymując transmitancję:

$$\tilde{K}(\gamma) = \mathbf{c}'(\gamma \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{b}} = \frac{\bar{\mathbf{B}}(\gamma)}{\bar{\mathbf{A}}(\gamma)}. \quad (4.27)$$

Formuła (4.27) wraz z (4.22)-(4.23) może być uważana za efektywną i dokładną metodę znajdowania transmitancji $\tilde{K}(\gamma)$ na podstawie $K(s)$.

4.4. Operator Tustina i przekształcenie \mathcal{W}

Operator Tustina λ jest zdefiniowany poprzez operator q następująco:

$$\lambda = \frac{2q - 1}{\Delta q + 1}. \quad (4.28)$$

Zależność

$$\lambda x_i = v_i \quad (4.29)$$

należy traktować jako symboliczny zapis operacji:

$$\frac{1}{\Delta}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}(v_{i+1} + v_i). \quad (4.30)$$

Oczywiście, operator przesunięcia q można wyrazić poprzez operator λ :

$$q = (1 + \frac{\Delta}{2}\lambda) / (1 - \frac{\Delta}{2}\lambda). \quad (4.31)$$

Po podstawieniu (4.31) do (4.5) mamy:

$$(1 + \frac{\Delta}{2}\lambda)x_i = (1 - \frac{\Delta}{2}\lambda)(Fx_i + gu_i), \quad (4.32)$$

$$y_i = c'x_i. \quad (4.33)$$

Wprowadzając zmienną stanu

$$\bar{x}_i = x_i + (F + I)^{-1}gu_i, \quad (4.34)$$

po przekształceniach dostaje się następujący układ równań:

$$y_i = c'\bar{x}_i + \bar{d}u_i, \quad (4.35)$$

$$\lambda\bar{x}_i = \bar{A}\bar{x}_i + \bar{b}u_i, \quad (4.36)$$

przy czym

$$\bar{A} = \frac{2}{\Delta}(F + I)^{-1}(F - I), \quad (4.37)$$

$$\bar{b} = \frac{4}{\Delta}(F + I)^{-2}g, \quad (4.38)$$

$$\bar{d} = -c'(F + I)^{-1}g. \quad (4.39)$$

Równania (4.37)-(4.39) są dla małych wartości Δ wrażliwe na błędy zaokrągleń. Biorąc pod uwagę (4.22) można je napisać w postaci poprawnej numerycznie:

$$\bar{A} = (I + \frac{\Delta}{2}\Omega A)^{-1}\Omega A, \quad (4.40)$$

$$\bar{b} = (I + \frac{\Delta}{2}\Omega A)^{-2}(I + \Delta\Omega A)\Omega b, \quad (4.41)$$

$$\bar{d} = c'(I + \frac{\Delta}{2}\Omega A)^{-1}\Omega b. \quad (4.42)$$

Biorąc pod uwagę (4.15), (4.16) widać, że

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{A} = A, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{b} = b, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{d} = 0. \quad (4.43)$$

Podobnie jak uprzednio równanie wejściowo-wyjściowe można napisać w kategoriach operatora λ

$$\bar{A}(\lambda)y_i = \bar{B}(\lambda)u_i, \quad (4.44)$$

gdzie:

$$\bar{A}(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^n + \bar{a}_1\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_n, \quad (4.45)$$

$$\bar{B}(\lambda) = c'adj(\lambda I - \bar{A})\bar{b} = \bar{b}_1\lambda^{n-1} + \dots + \bar{b}_n. \quad (4.46)$$

Transmitancja dyskretna $\bar{K}(w)$ jest określona jako:

$$\bar{K}(w) = c'(wI - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \frac{\bar{B}(w)}{A(w)}. \quad (4.47)$$

Powyższa formuła, wraz z (4.40)-(4.42) i (4.22)-(4.23), prowadzi do efektywnego i dokładnego algorytmu wyznaczania $\bar{K}(w)$.

Wbrew niekiedy prezentowanym opiniom (Rostgaard et al., 1993), operator λ może być łatwo zrealizowany na drodze cyfrowej (Węgrzyn, 1972) tak, że równania (4.35)-(4.36) mogą być wykorzystane bezpośrednio do obliczeń rekurencyjnych.

Jednakże, ponieważ operator λ jest operatorem bardziej złożonym od operatorów q i δ , ze względu na prostotę obliczeń nieco korzystniej jest stosować do tego celu zapis z operatorem δ . W związku z tym potrzebne są relacje wiążące parametry opisu z użyciem operatora δ z parametrami opisu z użyciem operatora λ .

4.5. Konstrukcja modelu w dziedzinie δ na podstawie modelu w dziedzinie λ

Zalóżmy, że syntezę regulatora przeprowadzono na płaszczyźnie \mathcal{W} . W celu realizacji regulatora wygodnie jest zapisać jego równania w dziedzinie operatora δ . Podstawiając zależność pomiędzy operatorami λ i δ :

$$\lambda = \frac{\delta}{1 + \frac{\Delta}{2}\delta} \quad (4.48)$$

do równań (4.35)-(4.36) otrzymamy następujące związki charakteryzujące reprezentację (4.19)-(4.21), wykorzystującą operator δ :

$$\bar{A} = (I - \frac{\Delta}{2}\bar{A})^{-1}\bar{A}, \quad (4.49)$$

$$\bar{b} = (I - \frac{\Delta}{2}\bar{A})^{-1}\bar{b}, \quad (4.50)$$

$$\bar{d} = \bar{d} + c'(I - \frac{\Delta}{2}\bar{A})^{-1}\frac{\Delta}{2}\bar{b}. \quad (4.51)$$

Zapewniają one zachowanie wysokiej dokładności obliczeń nawet w przypadku wysokiej częstotliwości próbkowania.

4.6. Aproksymacje dyskretne układu ciągłego

Niniejszy punkt zawiera ujęcie p.3.2 dla opisu w przestrzeni stanu. Jego głównym zastosowaniem jest realizacja dyskretna regulatorów ciągłych, których równania są zapisane jako równania stanu. Równania te mogą stanowić albo realizację minimalną transmitancji regulatora otrzymanego za pomocą metod klasycznych, albo też mogą być wynikiem syntezy dokonanej bezpośrednio w przestrzeni stanu. Przyjmijmy, że równaniami układu ciągłego są:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (4.52)$$

$$y(t) = c'x(t) + du(t). \quad (4.53)$$

Przybliżenie dyskretne za pomocą operatora λ ma postać:

$$\lambda x_i = Ax_i + bu_i, \quad (4.54)$$

$$y_i = c'x_i + du_i. \quad (4.55)$$

Równania (4.54)-(4.55) mogą być bezpośrednio wykorzystane do obliczeń rekurencyjnych wykorzystując cyfrową realizację operatora λ .

Możliwe są jednakże rozwiązania alternatywne korzystające z operatorów q oraz δ . Korzystając z definicji operatora λ otrzymuje się następującą reprezentację równania (4.54):

$$(I - \frac{\Delta}{2}A)x_{i+1} = (I + \frac{\Delta}{2}A)x_i + \frac{\Delta}{2}b(u_{i+1} + u_i). \quad (4.56)$$

$$y_i = c'x_i + du_i. \quad (4.57)$$

Wprowadzając nową zmienną stanu z_i

$$z_i = (I - \frac{\Delta}{2}A)x_i - \frac{\Delta}{2}bu_i \quad (4.58)$$

uzyskuje się układ równań dyskretnych:

$$z_{i+1} = A^*z_i + b^*u_i, \quad (4.59)$$

$$y_i = c^*z_i + d^*u_i, \quad (4.60)$$

gdzie:

$$A^* = \left(I + \frac{\Delta}{2}A\right)M, \quad (4.61)$$

$$b^* = Mb\Delta, \quad (4.62)$$

$$c^* = M'c, \quad (4.63)$$

$$d^* = d + c'Mb\frac{\Delta}{2} \quad (4.64)$$

oraz

$$M = \left(I - \frac{\Delta}{2}A\right)^{-1}. \quad (4.65)$$

Ponieważ

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} A^* = I, \text{ oraz } \lim_{\Delta \rightarrow 0} b^* = 0, \quad (4.66)$$

więc korzystniejsze własności numeryczne będzie posiadała realizacja oparta na operatory δ :

$$y_i = \tilde{c}'z_i + \tilde{d}'u_i, \quad (4.67)$$

$$\delta z_i = \bar{A}^*z_i + \bar{b}^*u_i, \quad (4.68)$$

$$z_{i+1} = z_i + \delta z_i \Delta, \quad (4.69)$$

gdzie

$$\bar{A}^* = MA, \quad \bar{b}^* = Mb, \quad \tilde{c}^* = c^*, \quad \tilde{d}^* = d^*. \quad (4.70)$$

Obecnie

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{A}^* = A \text{ oraz } \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{b}^* = b. \quad (4.71)$$

5. Podsumowanie

W artykule omówiono relacje pomiędzy płaszczyznami z , w , γ oraz związki pomiędzy odpowiedzią czasową układu dyskretnego i ciągłego - dokładną i wynikającą z aproksymacji wymiernych $e^{s\Delta}$. Następnie dokonano przeglądu znanych aproksymacji ciągłych układów z ekstrapolatorem, podstaw tzw. metody pseudociągłej oraz metod realizacji dyskretnych regulatorów ciągłych będących jej wynikiem. Omówiono metody realizacji cyfrowej różniczkowania oraz cyfrowy algorytm PID. Wykazano, że metoda pseudociągła, przy wyborze jednej z aproksymacji obiektu z ekstrapolatorem i dyskretyzacji regulatora za pomocą operatora Tustina, daje ten sam wynik co metoda dokładna przy zastosowaniu pewnej aproksymacji transmitancji $\bar{K}(w)$, wprowadzonej w części pierwszej. Przeprowadzono szeroką dyskusję modeli w przestrzeni stanu, ich dyskretyzacji dla operatorów q , δ , λ oraz transformacji pomiędzy różnymi formami opisu. Modele te mogą być użyte zarówno do numerycznego wyznaczania transmitancji dyskretnych, projektowania regulatorów, jak również do ich realizacji i symulacji układu regulacji.

LITERATURA

1. Ackermann J. (1972), *Abtastregelung*, Springer-Verlag
2. Åström K. J., P. Hagander and J. Sternby (1984), Zeros of sampled systems, *Automatica*, vol. 20, pp. 31-38
3. Åström K. J. and B. Wittenmark (1984), *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall
4. Błachuta M. (1994), *Regulacja dyskretna w czasie*, [w:] *Laboratorium Teorii Sterowania i Podstaw Automatyki*, Praca zbiorowa pod redakcją M. Błachuty, Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1851, Gliwice
5. D'Azzo J. D. and C. H. Houpis (1988), *Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern*, McGraw-Hill
6. Francis B. A. (1987), *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer-Verlag
7. Franklin G. F. and J. D. Powell (1980), *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
8. Franklin G. F., J. D. Powell and A. Emami-Naeini (1991), *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
9. Franklin G. F., J. D. Powell and M. L. Workman (1990), *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
10. Goodwin G. C., C. Lozano-Leal, D. Q. Mayne and R. H. Middleton (1986), Rapprochment between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, vol. 22, pp. 199-207
11. Grace A., J. N. Laub, J. N. Little and C. Thompson (1992), *Control Systems Toolbox for use with MATLAB*, The Matworks, Inc., Natick, Massachusetts
12. Houpis C. H. and G.B. Lamont (1985), *Digital Control Systems*, McGraw-Hill
13. Iserman R. (1980) *Digital Control Systems*, Springer-Verlag
14. Janiszowski K. B. (1993), A modification of the Tustin transformation, *IEEE Trans. Auto. Control*, vol AC. 38, pp. 1313-1316
15. Kailath T., (1980), *Linear Systems*, Prentice-Hall

16. Kowalczyk Z. (1989), Finite register length issue in the digital implementation of discrete PID algorithms, *Automatica*, vol. 25, pp. 393-405
17. Kowalczyk Z. (1993), Discrete approximation of continuous-time systems: a survey, *IEE Proc. (part G)*, vol. 140, pp. 264-278
18. Kuo B. C. (1975), *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall
19. Kuo B. C. (1970), *Discrete-Data Control Systems*, Prentice-Hall
20. Middleton R. H. and G. C. Goodwin (1990), *Digital Estimation and Control: A Unified Approach*, Prentice-Hall
21. Morari M. and E. Zafriou (1989), *Robust Process Control*, Prentice-Hall International
22. Phillips C. L. and H. T. Nagle (1990), *Digital Control Systems Analysis and Design*, Prentice-Hall
23. Ragazzini J. R. and G. F. Franklin (1958), *Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill
24. Rostgaard M., N. K. Poulsen and O. Ravn (1993), A rapprochement between discrete-time operators, *Preprints of the ECC93, Groningen, The Netherlands*
25. Thompson P. M. (1989), *Program CC Version 4, Tutorial and User's Guide*, Systems Technology, Inc., Hawthorne, California
26. Tustin A. (1947), A method of analyzing the behaviour of linear systems in terms of time series, *JIEE (London)*, vol. 94, pt IIA, pp. 130-142
27. Węgrzyn S. (1972), *Podstawy Automatyki*, PWN, Warszawa

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Duda
AGH Kraków

Wpłynęło do Redakcji dnia 28.11.1994

Abstract

In the paper, the relationships between the s , w and γ planes as well as between the time responses of a discrete-time plant and a continuous-time ones: an exact and the one that results from different rational approximations of $\exp(s\Delta)$ are discussed. Next an overview of known approximation methods of continuous-time systems with an extrapolator is performed along with the presentation of the so called pseudo-continuous-time method, being a result of that approach. Methods of a digital realization of the differentiator and a digital PID algorithm are discussed. Digitalization of the state-space continuous time models using the operators q , δ and λ as well as transformations between different models are also studied.