

Janusz WYRWAŁ

ANALIZA UKŁADU O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W ramach pracy dokonano analizy modeli opisujących pewną klasę elastycznych układów mechanicznych. Modele matematyczne takich układów mają postać równań różniczkowych cząstkowych wyższych rzędów. Na podstawie teorii liniowych, nieograniczonych operatorów różniczkowych dokonano przejścia do opisu układu w postaci nieskończonego wymiarowego, liniowego, abstrakcyjnego równania stanu w odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Na podstawie analizy widma "operatora stanu" i teorii półgrup analitycznych sformułowano warunki konieczne i wystarczające asymptotycznej stabilności badanego układu. W ostatniej części pracy przedstawiono rozwiązanie równania dynamiki.

THE ANALYSIS OF A DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEM

Summary. In the paper the analysis of mathematical models describing a class of elastic mechanical system is presented. The mathematical models of such systems have the form of partial differential equations of higher orders. On the base of the theory of linear, unbounded, differential operators it was made transformation from partial differential equation describing the system to infinite dimensional, linear, abstract equation of state in Hilbert space. On the ground of the analysis of "state operator" spectrum and analytic semigroup theory it was formulated necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of the system. Finally the solution of equation of dynamics is presented.

Wykaz oznaczeń

- $A = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$ - operator różniczkowania czwartego rzędu
- $\|(\cdot)\|$ - norma funkcji
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny funkcji
- $|z|$ - moduł liczby zespolonej
- \bar{z} - liczba sprzężona do liczby z
- l - długość elastycznego ramienia
- $u(x,t)$ - odkształcenie ramienia w punkcie x i w chwili czasu t
- $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ - pochodna cząstkowa względem zmiennej t
- $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ - pochodna cząstkowa względem zmiennej x
- $b(x)f(t)$ - funkcja wymuszająca równania dynamiki

- λ_i - wartości własne operatora A
- ϕ_i - funkcje własne operatora A
- v_i^* - wartości własne operatora Λ
- sh - sinus hiperboliczny
- ch - cosinus hiperboliczny

1. Wprowadzenie

Większość dotychczas budowanych układów mechanicznych charakteryzowała się dużą masywnością, co nadawało im dużą sztywność. Z jednej strony przesuwało to korzystnie pasmo wibracji rezonansowych, z drugiej powodowało wzrost masy własnej, co z kolei pogarszało dynamikę ruchu i dokładność pozycjonowania. Poszukiwania nowych rozwiązań doprowadziły do konstrukcji nowoczesnych układów mechanicznych na podstawie nowej generacji lekkich materiałów. Znaczne zmniejszenie masy własnej w nowych układach mechanicznych wpłynęło na dużą poprawę dynamiki ruchu. Niestety, jednocześnie zaobserwowano wyraźne pogorszenie się pozycjonowania, spowodowane pojawieniem się wibracji rezonansowych wynikających z elastycznych odkształceń elementów nowych konstrukcji mechanicznych. Kluczowego znaczenia nabral więc problem efektywnego tłumienia tych drgań.

W przypadku gdy elementy konstrukcji mechanicznej ulegają elastycznym odkształceniom, należy je traktować jako elementy o parametrach rozłożonych. W konsekwencji dynamika układów mechanicznych ulegających elastycznym odkształceniom musi być opisywana za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Komplikuje to w znacznym stopniu model matematyczny i utrudnia jego analizę chociażby przez konieczność stosowania bardziej zaawansowanego i złożonego aparatu matematycznego, wykorzystywanego do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.

Wśród istniejących rozwiązań tej klasy zagadnień należy wspomnieć o modelu matematycznym dynamiki elastycznego ramienia, wykonanego z materiału idealnie sprężystego [10]. Równanie dynamiki jest wówczas liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = z(x, t). \quad (1.1)$$

W wielu pracach z dziedziny elastycznych odkształceń równanie (1.1) stanowi podstawę modelu matematycznego, który uzupełnia się dodatkowo czterema warunkami brzegowymi charakterystycznymi dla danej konstrukcji [11]. W układzie opisanym przez ten model występują drgania nietłumione, co wynika z założenia idealnej sprężystości materiału. W układach rzeczywistych mamy do czynienia zazwyczaj ze słabo tłumionymi drganiami. Uwzględnienie tego faktu w modelu matematycznym wymaga wzbogacenia równania (1.1) o pewne dodatkowe składniki, które opisywałyby zjawiska rozpraszania energii w trakcie drgań. W ostatnich latach pojawiło się wiele opracowań [2],[5],[6],[7] poświęconych tym zagadnieniom. W celu uzyskania modelu możliwie najbardziej zbliżonego do układów rzeczywistych równanie (1.1) uzupełnia się między innymi o składniki opisujące zjawisko tzw. tarcia wewnętrznego (strukturalnego). Przez tarcie wewnętrzne rozumiemy zbiór zjawisk zachodzących w ciałach stałych, powodujących, że odkształcenia ciała są procesem nieodwracalnym w sensie energetycznym. Przy opisie tych zjawisk podstawową trudność stanowi niepełna znajomość procesów fizycznych, powodujących nieodwracalność przemian i rozpraszanie energii. Osobne problemy związane są z trudnościami w pomiarze wielkości charakteryzujących te przemiany, co wynika z małych wartości tych wielkości. Ze względu na niepełną znajomość tych zjawisk bardzo często wprowadza się nowe składniki nie tylko na podstawie badań czysto teoretycznych, lecz także na podstawie badań empirycznych. Wprowadzenie dodatkowych składników do równania dynamiki sprawia, że model staje się bardziej dokładny, lecz równocześnie prowadzi do dalszej jego komplikacji. Przypadki takie nie zostały do tej pory w pełni rozwiązane i stanowią obecnie przedmiot intensywnych badań.

2. Model matematyczny

Rozważmy układ mechaniczny, którego dynamikę opisuje liniowe równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^5 u(t, x)}{\partial x^4 \partial t} - 2\beta \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = b(x) f(t) \quad 2.1)$$

dla $x \in (0, l)$ i $t > 0$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= u_1(x) \end{aligned} \quad \text{dla } x \in (0, 1) \quad (2.2)$$

i warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0 \\ u(t, 1) &= \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad \text{dla } t > 0 \quad (2.3)$$

gdzie : $\alpha > 0$, $\beta \in [0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Równanie (2.1) opisuje drgania poprzeczne w płaszczyźnie pionowej X-Y elastycznego ramienia o długości l. Oś ramienia nieodkształconego pokrywa się z osią X. Warunki brzegowe (2.3) odpowiadają przypadkowi, gdy obydwie końce ramienia ($x=0$ i $x=l$) są sztywno przytwierdzone. Funkcja $u(t, x)$ określa przemieszczenie (elastyczne odkształcenie) od położenia równowagi w kierunku osi Y w chwili czasu $t > 0$ i punkcie x ($0 < x < l$).

Trzeci i czwarty składnik równania (2.1) opisują zjawisko tarcia wewnętrznego (strukturalnego). Szczegółowy opis tych składników i zjawisk, które modelują, można znaleźć w pracach [3], [6], [7]. Piąty składnik równania (2.1) opisuje efekt działania osiowej siły rozciągającej (ściskającej). Dokładny opis tego zjawiska jest przedstawiony w pracach [1], [11].

3. Określenie operatora różniczkowego "A" i jego własności

Ze względu na występowanie pochodnych względem zmiennej przestrzennej x analiza układu (2.1) jest zadaniem złożonym. Analiza ta będzie przeprowadzona w oparciu o zastosowanie teorii nieograniczonych operatorów liniowych określonych w odpowiednio dobranej przestrzeni Hilberta.

Niech $H=L^2(0,1)$ będzie przestrzenią Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $(0,1)$, z iloczynem skalarnym i normą określoną w następujący sposób:

$$\langle f, g \rangle_H = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{dla } f, g \in H \quad (3.1)$$

$$\|f\|_H = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla } f \in H. \quad (3.2)$$

Zdefiniujmy liniowy nieograniczony operator różniczkowy $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ w następujący sposób:

$$Au(x) = \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} = u^{(4)}(x), \quad u \in D(A) \quad (3.3)$$

$$D(A) = \left\{ u(x) \in H^4(0,1) : \int_0^1 u^2(x) dx < +\infty, \right. \\ \left. u(0) = u'(0) = 0, \right. \\ \left. u(1) = u'(1) = 0 \right\}, \quad (3.4)$$

gdzie $H^4(0,1)$ - przestrzeń Sobolewa czwartego rzędu określona na przedziale $(0,1)$.

Będziemy się starać określić własności operatora A .

Problem wyznaczenia funkcji własnych i wartości własnych operatora A sprowadza się do rozwiązania równania:

$$A\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad (3.5)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi'(0) = 0, \\ \phi(1) &= \phi'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ograniczając się do przypadku $\lambda > 0^1$ można wprowadzić pomocniczy parametr η taki, że $\lambda = \eta^4$, który przekształca równanie (3.5) do postaci:

$$\phi^{(4)}(x) = \eta^4 \phi(x). \quad (3.7)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (3.7) jest funkcja:

$$\phi(x) = A \sin(\eta x) + B \cos(\eta x) + C \operatorname{sh}(\eta x) + D \operatorname{ch}(\eta x),$$

którą można zapisać w wygodniejszej postaci:

¹Szczegółowa analiza wartości własnych wymaga rozpatrzenia rozwiązania równania (3.5) z warunkami brzegowymi (3.6) dla trzech przypadków $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. Nietrudno jednak sprawdzić, że dla $\lambda < 0$ lub $\lambda = 0$ istnieje jedynie rozwiązanie trywialne równania (3.5-3.6) o postaci $\phi \equiv 0$. Z tego względu ograniczamy się w naszych rozważaniach jedynie do przypadku $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \phi(x) = & a[\cos(\eta x) + \operatorname{ch}(\eta x)] + b[\cos(\eta x) - \operatorname{ch}(\eta x)] + \\ & + c[\sin(\eta x) + \operatorname{sh}(\eta x)] + d[\sin(\eta x) - \operatorname{sh}(\eta x)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie a, b, c, d są stałymi, które wyznacza się na podstawie warunków brzegowych. Podstawiając (3.8) do kolejnych warunków brzegowych (3.6) otrzymuje się jednorodny układ równań:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta & 0 \\ \cos(\eta l) + \operatorname{ch}(\eta l) & \cos(\eta l) - \operatorname{ch}(\eta l) & \sin(\eta l) + \operatorname{sh}(\eta l) & \sin(\eta l) - \operatorname{sh}(\eta l) \\ -\sin(\eta l) + \operatorname{sh}(\eta l) & -\sin(\eta l) - \operatorname{sh}(\eta l) & \cos(\eta l) + \operatorname{ch}(\eta l) & \cos(\eta l) - \operatorname{ch}(\eta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania układu (3.9) jest zerowanie się wyznacznika macierzy tego układu, co prowadzi do równania:

$$\operatorname{ch}(\eta l) * \cos(\eta l) - 1 = 0. \quad (3.10)$$

Rozwiązując równanie przestępne (3.10) otrzymujemy nieskończony ciąg pierwiastków η_i ($i=1,2,\dots$) takich, że $\eta_i < \eta_j$ dla $i < j$.

Z pierwszych dwóch równań układu (3.9) mamy:

$$2a=0 \Rightarrow a=0,$$

$$2\eta c=0 \Rightarrow c=0, \text{ ponieważ } \eta \neq 0.$$

Przyjmując $b = -1$ z równania trzeciego można wyznaczyć stałą d :

$$d_i = \frac{\cos(\eta_i l) - \operatorname{ch}(\eta_i l)}{\sin(\eta_i l) - \operatorname{sh}(\eta_i l)}. \quad (3.11)$$

Reasumując: każdej wartości własnej $\lambda_i = \eta_i^4$ odpowiada funkcja własna $\phi_i(x)$ o parametrach $\eta = \eta_i$, $d = d_i$ o postaci:

$$\phi(x) = [\cos(\eta_i x) - \operatorname{ch}(\eta_i x)] + d_i [\sin(\eta_i x) - \operatorname{sh}(\eta_i x)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Można udowodnić, że układ funkcji własnych $\{\phi_i; i \in \mathbb{N}\}$ operatora A jest układem ortogonalnym w przestrzeni H .

Dowód

Całkując dwukrotnie przez części wyznaczamy całkę:

$$\begin{aligned} \lambda_i \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx &= \int_0^1 \phi_i''(x) \phi_j(x) dx = \\ &= \left[\phi_i'(x) \phi_j(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx = \\ &= \left[\phi_i''(x) \phi_j(x) \right]_0^1 - \left[\phi_i'(x) \phi_j'(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wykorzystując warunki brzegowe (3.6) otrzymujemy równanie (3.13) w postaci:

$$\lambda_i \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \int_0^1 \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx. \quad (3.14)$$

Analogiczne równanie otrzymuje się przekształcając funkcję $\phi_j(x)$:

$$\lambda_j \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \int_0^1 \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx. \quad (3.15)$$

Odejmując stronami równania (3.14) i (3.15) otrzymujemy:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0. \quad (3.16)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$

$$\int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad (3.17)$$

co kończy dowód.

Dzieląc każdą funkcję własną przez jej normę można otrzymać ortonormalny układ funkcji, przy czym normę funkcji można wyznaczyć bezpośrednio z zależności (3.2) lub też przeprowadzając następujące rozumowanie:

$$\int_0^1 \phi_i^2(\eta, x) dx = \lim_{\eta \rightarrow \eta_i} \int_0^1 \phi(\eta x) \phi_i(\eta, x) dx \quad (3.18)$$

Uwzględniając:

$$\eta_i^4 \int_0^1 \phi(\eta x) \phi_i(\eta, x) dx = \int_0^1 \phi(\eta x) \phi_i''(\eta, x) dx \quad (3.19)$$

$$\eta^4 \int_0^1 \phi(\eta x) \phi_i(\eta, x) dx = \int_0^1 \phi''(\eta x) \phi_i(\eta, x) dx \quad (3.20)$$

(3.18) otrzymujemy w postaci:

$$\int_0^1 \phi_i^2(\eta, x) dx = \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left\{ \frac{\int_0^1 \phi_i'''(\eta x) \phi_i(\eta, x) dx - \int_0^1 \phi_i(\eta x) \phi_i'''(\eta, x) dx}{\eta^4 - \eta_0^4} \right\} = \quad (3.21)$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left\{ \frac{[\phi_i'''(\eta x) \phi_i(\eta, x) - \phi_i''(\eta x) \phi_i'(\eta, x) - \phi_i''(\eta, x) \phi_i(\eta x) + \phi_i'(\eta, x) \phi_i'(\eta x)]_0^1}{\eta^4 - \eta_0^4} \right\}.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$h(\eta) = [\phi_i'''(\eta x) \phi_i(\eta, x) - \phi_i''(\eta x) \phi_i'(\eta, x) - \phi_i''(\eta, x) \phi_i(\eta x) + \phi_i'(\eta, x) \phi_i'(\eta x)]_0^1 \quad (3.22)$$

(3.21) otrzymujemy w postaci :

$$\int_0^1 \phi_i^2(\eta, x) dx = \left[\frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} * \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \frac{1}{(\eta + \eta_0)(\eta^2 + \eta_0^2)} = \frac{1}{4\eta_0^3} \left[\frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} \quad (3.23)$$

Wprowadzając zmienne pomocnicze $y = \eta x$ i $z = \eta, x$, dla których zachodzą związki:

$$\frac{\partial^k \phi(\eta x)}{\partial x^k} = \eta^k \frac{\partial^k \phi(y)}{\partial y^k}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^k \phi_i(\eta x)}{\partial x^k} = \eta_i^k \frac{\partial^k \phi(z)}{\partial z^k},$$

zależność (3.22) otrzymujemy w postaci:

$$h(\eta) = [\eta^3 \phi_i'''(y) \phi_i(z) - \eta^2 \eta_i \phi_i''(y) \phi_i'(z) - \eta_i^3 \phi_i''(z) \phi_i(y) + \eta_i^2 \eta \phi_i'(z) \phi_i'(y)]_0^1, \quad (3.25)$$

a zatem

$$\frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta} = [3\eta^2 \phi_i'''(y) \phi_i(z) - \eta^3 x \phi_i(y) \phi_i'(z) - 2\eta \eta_i x \phi_i''(y) \phi_i'(z) - \eta^2 \eta_i x \phi_i''(y) \phi_i'(z) - \eta_i^3 x \phi_i'(z) \phi_i'(y) + \eta^2 \phi_i''(z) \phi_i'(y) + \eta_i^2 \eta x \phi_i''(y) \phi_i''(z)]_0^1. \quad (3.26)$$

Po przekształceniach i wykorzystaniu warunków brzegowych (3.6) równanie (3.23) przyjmuje postać:

$$\int_0^1 \phi_i(\beta, x) dx = \frac{1}{4} I[\phi_i'(I)]^2 \quad \text{dla } i=1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Tak więc normę funkcji własnej ϕ_i można wyznaczyć korzystając z zależności:

$$\|\phi_i\|^2 = \frac{1}{4} l [\phi_i'(l)]^2 \text{ dla } i=1,2,\dots \quad (3.28)$$

Ze względu na fakt, że układ funkcji własnych operatora A jest układem zupełnym w przestrzeni H , istnieje jednoznaczna reprezentacja każdej funkcji $u \in H$ w postaci rozwinięcia w szereg względem funkcji własnych

$$u(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \phi_i(x) \quad (3.29)$$

W celu znalezienia współczynników c_i rozwinięcia mnożymy obie strony powyższej równości przez $\phi_j(x)$, a następnie całkujemy w przedziale $[0, l]$.

$$\int_0^l u(x) \phi_j(x) dx = \int_0^l \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (3.30)$$

Na mocy warunku ortogonalności (3.17) suma występująca po prawej stronie (3.30) zredukuje się do jednego wyrazu o indeksie j .

$$\int_0^l u(x) \phi_j(x) dx = c_j \int_0^l \phi_j^2(x) dx. \quad (3.31)$$

Stąd otrzymujemy:

$$c_j = \frac{\int_0^l u(x) \phi_j(x) dx}{\int_0^l \phi_j^2(x) dx} = \frac{\langle u(x), \phi_j(x) \rangle}{\|\phi_j\|^2}. \quad (3.32)$$

Zatem zależność (3.29) przyjmuje ostateczną postać:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\langle u(x), \phi_i(x) \rangle}{\|\phi_i\|^2} \phi_i(x). \quad (3.33)$$

Korzystając z zależności (3.29) i własności układu funkcji własnych $\{\phi_i; i \in N\}$ otrzymujemy:

$$u^{**}(x) = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} c_i \phi_i(x) \right]^{***} = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \phi_i^{**}(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i c_i \phi_i(x). \quad (3.34)$$

Z drugiej strony zgodnie z definicją (3.3)

$$Au(x) = u^{**}(x). \quad (3.35)$$

Porównując (3.34) i (3.35) otrzymujemy:

$$Au(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i c_i \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \frac{\langle u, \phi_i \rangle}{\|\phi_i\|^2} \phi_i(x), \quad u \in D(A). \quad (3.36)$$

Podsumowując wyniki przedstawionych rozważań należy stwierdzić, że:

1. Widmo operatora A $\sigma(A)$ jest dyskretne (złożone całkowicie z wartości własnych λ_i) $\sigma(A) = \{\lambda_i; i \in \mathbb{N}\}$.
2. Każdej wartości własnej $\lambda_i = -\eta_i^4$ odpowiada funkcja własna operatora A

$$\phi(x) = [\cos(\eta_i x) - \operatorname{ch}(\eta_i x)] + d_i [\sin(\eta_i x) - \operatorname{sh}(\eta_i x)], \quad i = 1, 2, \dots; x \in (0, l)$$

$$d_i = \frac{\cos(\eta_i l) - \operatorname{ch}(\eta_i l)}{\sin(\eta_i l) - \operatorname{sh}(\eta_i l)}.$$

- a) wartości parametru η_i wyznacza się z równania (3.10),
 - b) $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$, $\lambda_i < \lambda_j$ dla $i < j$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty$,
 - c) układ $\{\phi_i; i \in \mathbb{N}\}$ jest układem ortogonalnym i zupełnym w przestrzeni H ,
 - d) normę funkcji własnych można wyznaczyć z zależności (3.28).
3. Ze względu na fakt, że wartości własne λ_i są rzeczywiste i dodatnie, operator A jest samosprężony i dodatnio określony.
 4. Istnieje operator odwrotny A^{-1} i jest on operatorem ograniczonym.
 5. Można zdefiniować potęgę ułamkową operatora A , tj. $A^\alpha, 0 < \alpha < 1$. Operator A^α jest operatorem odwrotnym liniowego operatora ograniczonego

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-\alpha} (A - zI)^{-1} dz, \quad (3.37)$$

przy czym całkowanie odbywa się wzdłuż konturu Γ , który przebiega od $-\infty$ do $+\infty$ omijając przedziały $(-\infty, 0], [\lambda_1, +\infty)$ na osi rzeczywistych.

Na podstawie zależności (3.29) można wykazać, że dla operatora samosprężonego o dyskretnym widmie zachodzą następujące związki:

$$A^\alpha u = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^\alpha \frac{\langle u, \phi_i \rangle}{|\phi_i|^2} \phi_i, \quad u \in D(A^\alpha)$$

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H : \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{2\alpha} \left| \frac{\langle u, \phi_i \rangle}{|\phi_i|^2} \right|^2 < +\infty \right\}$$
(3.38)

W szczególności

$$A^{\frac{1}{2}} u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u''.$$
(3.39)

4. Równanie stanu

Na podstawie definicji i własności operatora różniczkowego A możemy przedstawić równanie różniczkowe cząstkowe (2.1) z warunkami brzegowymi (2.3) jako liniowe równanie ewolucji w przestrzeni Hilberta H

$$\ddot{u}(t) + Au(t) + 2\alpha A\dot{u}(t) + 2\beta A^{\frac{1}{2}}\dot{u}(t) + \gamma A^{\frac{1}{2}}u(t) = bf(t), \quad t > 0,$$
(4.1)

gdzie: $\ddot{u}(t), \dot{u}(t), u(t) \in H$.

Równanie (4.1) jest abstrakcyjnym równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu względem t , określonym w nieskończonej wymiarowej przestrzeni H . W celu sprowadzenia równania (4.1) do układu równań pierwszego rzędu posłużymy się procedurą zaproponowaną przez Sakawę [7].

Poczynimy dwa dodatkowe założenia:

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_1^{\frac{1}{2}} < (1 - \beta^2) / 2\alpha,$$
(4.2)

$$\lambda_i \neq (1 - \beta)^2 / \alpha^2, \quad i = 1, 2, \dots$$
(4.3)

Niech X oznacza przestrzeń Hilberta będącą iloczynem $X = H \times H$, z iloczynem skalarnym

$$\left\langle [u_1, v_1]^T, [u_2, v_2]^T \right\rangle_X = \langle u_1, u_2 \rangle_H + \langle v_1, v_2 \rangle_H.$$
(4.4)

Wprowadźmy funkcję:

$$g(\lambda) = \left\{ (\alpha\lambda + \beta\lambda^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda > 0.$$
(4.5)

Z uwagi na fakt, że A jest operatorem samosprzężonym, można dla funkcji $g(\lambda)$ zdefiniować w przestrzeni H liniowy operator $g(A)$ w sposób następujący:

$$g(A)u = \sum_{i=1}^{+\infty} g(\lambda_i) \frac{\langle u, \phi_i \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} \phi_i. \quad (4.6)$$

Dziedzinę $D(g(A))$ operatora $g(A)$ określa się następująco:

$$D(g(A)) = \left\{ u \in H : \sum_{i=1}^{+\infty} \left| g(\lambda_i) \frac{\langle u, \phi_i \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} \right|^2 < +\infty \right\} = D(A).$$

Należy zwrócić uwagę, że istnieje taka liczba całkowita $m \geq 1$, że $g(\lambda_i)$ będzie liczbą zespoloną dla $i=1, 2, \dots, m$ i liczbą rzeczywistą dla $i > m$. Spełnienie tego założenia (4.3) zapewnia, że $g(\lambda_i) \neq 0$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Mając to na uwadze możemy zdefiniować operator odwrotny $g(A)^{-1}$:

$$g(A)^{-1}u = \sum_{i=1}^{+\infty} g(\lambda_i)^{-1} \frac{\langle u, \phi_i \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} \phi_i. \quad (4.7)$$

Dziedzinę $D(g(A)^{-1})$ operatora $g(A)^{-1}$ określa się następująco:

$$D(g(A)^{-1}) = \left\{ u \in H : \sum_{i=1}^{+\infty} \left| g(\lambda_i)^{-1} \frac{\langle u, \phi_i \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} \right|^2 < +\infty \right\} = H.$$

Ponieważ ciąg $\{|g(\lambda_i)^{-1}|^2; i \in \mathbb{N}\}$ jest zbieżny, operator $g(A)^{-1}$ jest ograniczony. Ponadto zachodzą związki:

$$\begin{aligned} g(A)^{-1}g(A) &= I \quad \text{w } D(A) \\ g(A)g(A)^{-1} &= I \quad \text{w } H, \end{aligned}$$

gdzie: I - operator identycznościowy.

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie $u(t)$ abstrakcyjnego równania (4.1). Wprowadźmy nową funkcję $v(t)$ zdefiniowaną w następujący sposób:

$$v(t) = g(A)^{-1} \left\{ \dot{u}(t) + \alpha Au(t) + \beta A^{\frac{1}{2}} u(t) \right\}, \quad t > 0, u(t) \in D(A). \quad (4.8)$$

Wyznamy $\dot{u}(t)$ z równania (4.8):

$$\dot{u}(t) = -(\alpha A + \beta A^{\frac{1}{2}})u(t) + g(A)v(t). \quad (4.9)$$

Różniczkując obustronnie równość (4.8) względem t i korzystając z zależności (4.1) i (4.9) otrzymujemy:

$$\dot{v}(t) = (g(A) - \gamma g(A)^{-1} A^{\frac{1}{2}})u(t) - (\alpha A + \beta A^{\frac{1}{2}})v(t) + g(A)^{-1}bf(t). \quad (4.10)$$

Przyjmując $\xi(t) = u(t) + v(t)$, $\mu(t) = u(t) - v(t)$ i korzystając z (4.9), (4.10) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = -A^* \xi(t) - T \xi(t) - T \mu(t) + g(A)^{-1}bf(t) \\ \dot{\mu}(t) = -A^- \mu(t) + T \xi(t) + T \mu(t) - g(A)^{-1}bf(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

gdzie:

$$A^* = \alpha A + \beta A^{\frac{1}{2}} \mp g(A) \quad A^*: D(A^*) = D(A) \subset H \rightarrow H \quad (4.12)$$

$$T = \frac{\gamma}{2} g(A)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \quad T: D(T) = D(A^{\frac{1}{2}}) \subset H \rightarrow H$$

Układ równań (4.11) można zapisać w postaci:

$$\dot{\zeta}(t) = \Lambda \zeta(t) + Bf(t), \quad t > 0, \quad (4.13)$$

gdzie:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -A^* - T & -T \\ T & -A^- + T \end{bmatrix} \quad \Lambda: D(\Lambda) = D(A) \times D(A) \subset X \rightarrow X$$

$$B = \begin{bmatrix} g(A)^{-1}b \\ -g(A)^{-1}b \end{bmatrix} \quad B: D(B) = X \rightarrow X$$

Operator B jest ograniczony.

Warunek początkowy dla równania (4.13) ma postać:

$$\zeta_0 = \zeta(0) = [\xi(0), \mu(0)]^T = [\xi_0, \mu_0]^T. \quad (4.14)$$

Równanie różniczkowe (4.13) z warunkiem początkowym (4.14) można interpretować jako równanie stanu układu mechanicznego (2.1). Ze względu na fakt, że jest on opisany równaniem różniczkowym cząstkowym, jest to układ nieskończenie wymiarowy, a zatem odpowiadające mu równanie stanu jest również nieskończenie wymiarowe. Miejsce macierzy stanu występującej w układach skończenie wymiarowych zajmuje pewien liniowy nieograniczony operator różniczkowy Λ , określony w odpowiednio dobranej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta.

5. Stabilność

W niniejszym rozdziale rozpatrzmy stabilność układu opisanego równaniem stanu:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \Lambda \zeta(t) + b f(t) \\ \zeta_0 = [\xi_0, \mu_0]^T \end{cases} \quad t > 0 \quad (5.1)$$

W celu zbadania układu (5.1) należy przeanalizować rozkład widma $\sigma(\Lambda)$ operatora Λ na płaszczyźnie zespolonej C .

Wartości własne operatora Λ wyznaczamy z układu równań:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda \begin{bmatrix} \phi_i \\ p_i \phi_i \end{bmatrix} &= v_i^+ \begin{bmatrix} \phi_i \\ p_i \phi_i \end{bmatrix} \\ \Lambda \begin{bmatrix} p_i \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} &= v_i^- \begin{bmatrix} p_i \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_i^\pm = -(\alpha \lambda_i + \beta \lambda_i^{\frac{1}{2}}) \pm h(\lambda_i) \\ p_i = \frac{\gamma \lambda_i^{\frac{1}{2}}}{2g(\lambda_i)\{g(\lambda_i) + h(\lambda_i)\} - \gamma \lambda_i^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (5.3)$$

gdzie:

$$h(\lambda) = \left\{ (\alpha \lambda + \beta \lambda^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda - \gamma \lambda^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ponadto spełnione są następujące zależności:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i^+ &= -\frac{1}{2\alpha}, \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i^- &= -\infty. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Widmo operatora Λ ma postać:

$$\sigma(\Lambda) = \{v_i^+, v_i^-; i \in N\} \cup \left\{-\frac{1}{2\alpha}\right\}. \quad (5.5)$$

²Taką postać funkcji własnych można przyjąć biorąc pod uwagę fakt, że wszystkie składowe operatora Λ są funkcjami tylko i wyłącznie operatora różniczkowego A .

Układ funkcji własnych operatora Λ $\{[\phi_i, p_i\phi_i]^T, [p_i\phi_i, \phi_i]^T; i \in N\}$ jest układem ortogonalnym, zupełnym w przestrzeni X . Biorąc pod uwagę fakt, że:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i < \dots, \lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty, \quad (5.6)$$

można prześledzić rozkład widma $\sigma(\Lambda)$ na płaszczyźnie zespolonej C , badając przebieg krzywych $\{v^\pm(\lambda); \lambda > 0\}$, gdzie:

$$v_i^\pm(\lambda) = -(\alpha\lambda + \beta\lambda^{\frac{1}{2}}) \pm \left\{ (\alpha\lambda + \beta\lambda^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda - \gamma\lambda^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Zgodnie z [5] można wyróżnić cztery różne przypadki przebiegu krzywych $v^\pm(\lambda)$ w zależności od parametrów α, β, γ . Wprowadźmy oznaczenia:

- Γ^\pm - oznacza krzywe $\{v^\pm(\lambda); \lambda > 0\}$,
- Γ_i^+ - kolejne fragmenty krzywej $v^+(\lambda)$,
- Γ_i^- - kolejne fragmenty krzywej $v^-(\lambda)$.

Przypadek 1: $\gamma \geq \beta/\alpha$ (rys. 1)

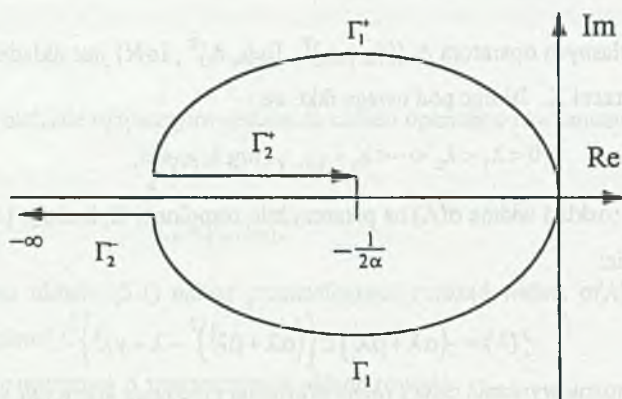
$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+, \quad \Gamma^- = \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^-.$$

Z założenia (4.2) wynika, że

$$\Re v_i^+ > \frac{(\beta^2 - 1)}{2\alpha} \geq -\frac{1}{2\alpha}. \quad (5.8)$$

Istnieje zatem liczba naturalna $m_1 > 1$ taka, że

$$\begin{cases} \{v_i^+; i = 1, \dots, m_1\} \subset \Gamma_1^+ \\ \{v_i^+; i = m_1 + 1, \dots\} \subset \Gamma_2^+ \\ \{v_i^-; i = 1, \dots, m_1\} \subset \Gamma_1^- \\ \{v_i^-; i = m_1 + 1, \dots\} \subset \Gamma_2^- \end{cases} \quad (5.9)$$



Rys. 1. Rozkład wartości własnych operatora Λ na płaszczyźnie zespolonej dla przypadku 1
 Fig. 1. The distribution of eigenvalues of operator Λ on the complex plane for case 1

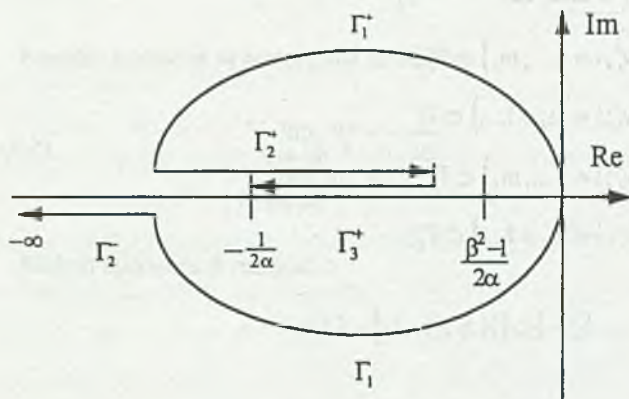
Przypadek 2: $0 \leq \gamma < \beta/\alpha$, ($\beta > 0$), (rys. 2)

$$\Gamma^* = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^* \cup \Gamma_3^* \quad , \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Z zależności (5.8) wynika, że istnieje liczba całkowita $m_2 > 1$ taka, że

$$\begin{cases} \{v_i^*; i = 1, \dots, m_2\} \subset \Gamma_1^* \\ \{v_i^*; i = m_2 + 1, \dots\} \subset \Gamma_2^* \cup \Gamma_3^* \\ \{v_i; i = 1, \dots, m_2\} \subset \Gamma_1 \\ \{v_i; i = m_2 + 1, \dots\} \subset \Gamma_2 \end{cases} \quad (5.10)$$

Γ_2^* zawiera skończoną liczbę pierwiastków v_i^* .



Rys. 2. Rozkład wartości własnych operatora Λ na płaszczyźnie zespolonej dla przypadku 2
 Fig. 2. The distribution of eigenvalues of operator Λ on the complex plane for case 2

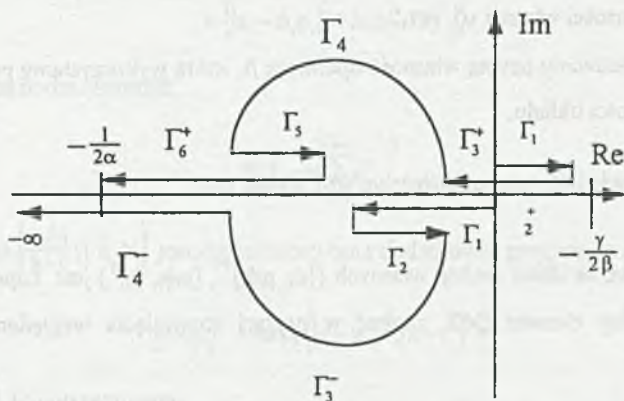
Przypadek 3: $\gamma_0 < \gamma < 0$, $\gamma_0 = \left\{ 2\beta(9 - \beta^2) - 2(\beta^2 + 3)^2 \right\} / 27\alpha$; (rys. 3)

$$\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^6 \Gamma_i^* \quad , \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$$

Istnieje liczba całkowita m_3 taka, że

$$\left\{ \begin{array}{l} \{v_i^* ; i = 1, \dots, m_3\} \subset \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i^* \\ \{v_i^* ; i = m_3 + 1, \dots\} \subset \Gamma_5^* \cup \Gamma_6^* \\ \{v_i^* ; i = 1, \dots, m_3\} \subset \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i \\ \{v_i^* ; i = m_3 + 1, \dots\} \subset \Gamma_4 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

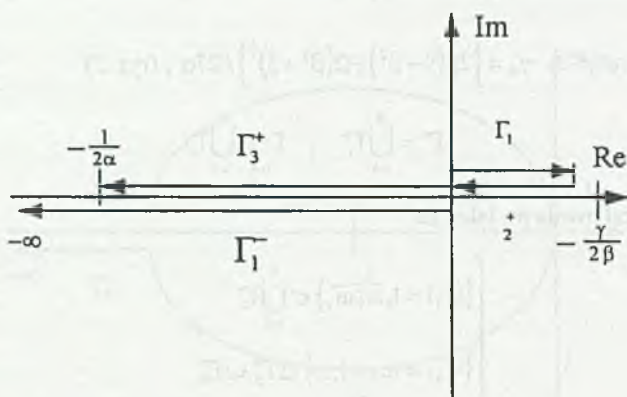
Γ_3^* zawiera skończoną liczbę pierwiastków v_i^* .



Rys. 3. Rozkład wartości własnych operatora Λ na płaszczyźnie zespolonej dla przypadku 3
 Fig. 3. The distribution of eigenvalues of operator Λ on the complex plane for case 3

Przypadek 4: $\gamma \leq \gamma_0$; (rys. 4)

$$\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i^* \quad , \quad \Gamma = \Gamma_1$$



Rys. 4. Rozkład wartości własnych operatora Λ na płaszczyźnie zespolonej dla przypadku 4
 Fig. 4. The distribution of eigenvalues of operator Λ on the complex plane for case 4

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku 3 i 4 (rys. 3, 4) odcinek $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ może zawierać pewną skończoną liczbę wartości własnych v_i^* , $i=1,2,\dots,m$ lub może nie zawierać żadnego v_i^* , $i=1,2,\dots$. Jest to uzależnione od wartości γ i λ_1 . Gdy $\lambda_1 \leq (-\gamma)^2$, to na odcinku $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ znajduje się pewna skończona liczba wartości własnych v_i^* , $i=1,2,\dots,m$. Jeżeli $\lambda_1 > (-\gamma)^2$, to odcinek $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ nie zawiera żadnej wartości własnej v_i^* , $i=1,2,\dots$.

Obecnie przedstawimy pewną własność operatora Λ , którą wykorzystamy przy formułowaniu warunków stabilności układu.

Operator Λ generuje półgrupę analityczną $S(t): X \rightarrow X$, $t > 0$

Dowód

Z uwagi na fakt, że układ funkcji własnych $\{[\phi_i, p_i \phi_i]^T, [p_i \phi_i, \phi_i]^T\}$ jest zupełny w przestrzeni X , można dowolny element $\zeta \in X$ zapisać w postaci rozwinięcia względem układu funkcji własnych

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ a_i \begin{bmatrix} \phi_i \\ p_i \phi_i \end{bmatrix} + b_i \begin{bmatrix} p_i \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.12)$$

gdzie:

$$a_i = \frac{\langle \zeta, [\phi_i, p_i \phi_i]^T \rangle_X}{\|[\phi_i, p_i \phi_i]^T\|_X^2}, \quad b_i = \frac{\langle \zeta, [p_i \phi_i, \phi_i]^T \rangle_X}{\|[p_i \phi_i, \phi_i]^T\|_X^2}. \quad (5.13)$$

Z zależności (5.12) i (3.36) możemy napisać:

$$\Lambda \zeta = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ a_i v_i^* \begin{bmatrix} \phi_i \\ p_i \phi_i \end{bmatrix} + b_i v_i \begin{bmatrix} p_i \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \right\}, \quad \zeta \in D(\Lambda). \quad (5.14)$$

Dla $z \notin \sigma(\Lambda)$ można zdefiniować liniowy operator R będący rezolwentą operatora Λ

$$R(z; \Lambda) \zeta = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_i}{z - v_i^*} \begin{bmatrix} \phi_i \\ p_i \phi_i \end{bmatrix} + \frac{b_i}{z - v_i} \begin{bmatrix} p_i \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.15)$$

Ponieważ ciąg $\left\{ |z - v_i^*|^{-1}, |z - v_i|^{-1}; i \in \mathbb{N} \right\}$ jest ograniczony, zatem rezolwenta $R(z; \Lambda)$ jest operatorem ograniczonym w przestrzeni X .

Na podstawie nierówności Schwarz'a otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\|R(z; \Lambda) \zeta\|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \frac{2(|p_i|^2 + 1)}{|p_i^2 - 1|^2} \left(\frac{1}{|z - v_i^*|^2} + \frac{1}{|z - v_i|^2} \right) \zeta_i^2 \right\}, \quad \zeta \in X. \quad (5.16)$$

gdzie:

$$\zeta_i = \left(|a_i + b_i p_i|^2 + |a_i p_i + b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$\|\zeta\|_X = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \zeta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

Ponieważ ciąg $\left\{ \frac{|p_i|^2 + 1}{|p_i^2 - 1|}; i \in \mathbb{N} \right\}$ jest ograniczony oraz dodatkowo przyjmując dla każdego i

$$|z - v_i|^{-1} = \max \left\{ |z - v_i^*|^{-1}, |z - v_i|^{-1} \right\},$$

z nierówności (5.16) otrzymujemy:

$$\|R(z; \Lambda) \zeta\|^2 \leq C_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\zeta_i^2}{|z - v_i|^2}, \quad \zeta \in X, \quad (5.18)$$

gdzie C_1 jest pewną stałą niezależną od z i ζ .

Dla każdego $b > \gamma / (2\beta)$ zachodzi inkluzja:

$$\rho(\Lambda) \supset P_b = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > b\}, \quad (5.19)$$

gdzie $\rho(\Lambda)$ oznacza zbiór rezolwenty operatora Λ .

Na podstawie rys.3 i 4 można stwierdzić, że jeżeli $z \in P_b$, to istnieje taka stała $\varepsilon > 0$, i $v_m \in \{v_i^+, v_i^-; i \in N\}$ niezależne od z takie, iż $\varepsilon \leq |z - v_m| \leq |z - v_i|$ dla każdego $i \in N$. Tak więc z zależności (5.18) otrzymamy:

$$\|R(z, \Lambda)\| \leq C_2(1 + |z - b|)^{-1}, \quad z \in P_b \quad (5.20)$$

gdzie $C_2 = \sqrt{C_1} \{1 + (1 + |v_m - b|) / \varepsilon\}$ jest niezależne od z .

Zgodnie z [8, twierdzenie 3.3.1 i 3.3.2] spełnienie nierówności (5.20) stanowi warunek wystarczający, aby operator Λ generował półgrupę analityczną $S(t): X \rightarrow X$, dla $t > 0$.

Zgodnie z [2] układ (5.1) jest jednostajnie stabilny, jeżeli $\|S(t)\| \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow +\infty$.

Z analizy funkcjonalnej [5,8] wiadomo, że

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0, \quad (5.21)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \max\{\Re \nu_i^+, \Re \nu_i^-; i \in N\}.$$

W świetle powyższych faktów można przytoczyć wnioski dotyczące stabilności układu (5.1):

- W przypadku 1 i 2 (rys.1, 2) układ (5.1) jest jednostajnie stabilny.
- W przypadku 3 i 4 (rys.3, 4) układ (5.1) jest jednostajnie stabilny, jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek $\lambda_1 > (-\gamma)^2$.

6. Rozwiązanie równania dynamiki

Rozwiązania równania dynamiki (2.1) poszukujemy w postaci szeregu będącego rozwinięciem szukanej funkcji $u(x, t)$ względem układu funkcji własnych operatora różniczkowego A .

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) p_i(t). \quad (6.1)$$

Podobnie rozwijamy w szereg wymuszenie zewnętrzne:

$$b(x) f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) b_i f(t). \quad (6.2)$$

gdzie:

$$b_i = \frac{\langle b(x), \phi_i(x) \rangle_H}{\|\phi_i\|^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Na podstawie równania różniczkowego (4.1) i zależności (6.1), (6.2) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) \ddot{p}_i(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i''(x) p_i(t) + 2\alpha \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i''(x) \dot{p}_i(t) + 2\beta \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i'(x) \dot{p}_i(t) + \gamma \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i'(x) p_i(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) b_i f(t), \quad (6.3)$$

Przekształcając równanie (6.3) i korzystając z (3.36), (3.38) uzyskuje się:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \ddot{p}_i(t) + (2\alpha\lambda_i + 2\beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}) \dot{p}_i(t) + (\lambda_i + \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}}) p_i(t) \right\} \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i f(t) \phi_i(x). \quad (6.4)$$

Równanie (6.4) jest równoważne nieskończonemu układowi równań o następującej postaci:

$$\ddot{p}_i(t) + (2\alpha\lambda_i + 2\beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}) \dot{p}_i(t) + (\lambda_i + \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}}) p_i(t) = b_i f(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Warunki początkowe dla układu równań różniczkowych (6.5) wyznaczamy rozwijając (2.2) w szereg względem układu funkcji własnych operatora różniczkowego A

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) p_i(0), \quad (6.6)$$

$$u_1(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) \dot{p}_i(0), \quad (6.7)$$

gdzie:

$$p_i(0) = \frac{\langle u_0(x), \phi_i(x) \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} = u_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

$$\dot{p}_i(0) = \frac{\langle u_1(x), \phi_i(x) \rangle_H}{\|\phi_i\|^2} = u_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (6.5) są oczywiście równe wartościom własnym operatora A

$$v_i^{\pm} = \begin{cases} -\left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right) \pm j \left[-\left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \lambda_i + \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{gdy } \left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} -\left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right) \pm \left[\left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{gdy } \left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \geq 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Jak wiadomo z teorii równań różniczkowych zwyczajnych, rozwiązanie równania (6.5) można zapisać w postaci:

$$p_i(t) = p_i^0(t) + p_i^z(t), \quad (6.12)$$

gdzie:

$p_i^0(t)$ - rozwiązanie równania jednorodnego przy warunkach początkowych (6.8), (6.9),

$p_i^z(t)$ - rozwiązanie równania niejednorodnego przy zerowych warunkach początkowych.

Uwzględniając fakt, że wszystkie pierwiastki v_i^z są pojedyncze, mamy:

$$p_i^0(t) = \begin{cases} C_{i1}e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_i t) + C_{i2}e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t) & ; \text{ w przypadku (6.10)} \\ C_{i1}e^{-\sigma_i t} \operatorname{sh}(\omega_i t) + C_{i2}e^{-\sigma_i t} \operatorname{ch}(\omega_i t) & ; \text{ w przypadku (6.11)} \end{cases} \quad (6.13)$$

$$p_i^z(t) = \begin{cases} \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.10)} \\ \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \operatorname{sh}(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.11)} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$p_i^z(t) = \begin{cases} \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.10)} \\ \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \operatorname{sh}(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.11)} \end{cases} \quad (6.15)$$

$$p_i^z(t) = \begin{cases} \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \operatorname{sh}(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.11)} \\ \frac{b_i}{\omega_i} \int_0^t e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_i(t-\tau)) f(\tau) d\tau & ; \text{ w przypadku (6.10)} \end{cases} \quad (6.16)$$

gdzie:

$$\sigma_i = \alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_i = \begin{cases} \left\{ -(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}})^2 + \lambda_i + \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{ gdy } (\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} < 0 \\ \left\{ (\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{ gdy } (\alpha\lambda_i + \beta\lambda_i^{\frac{1}{2}})^2 - \lambda_i - \gamma\lambda_i^{\frac{1}{2}} \geq 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Stałe C_{i1} i C_{i2} wyznacza się wstawiając (6.12) do warunków początkowych (6.8), (6.9)

$$C_{i1} = \frac{(\sigma_i u_{oi} + \dot{u}_{ji})}{\omega_i} \quad i=1,2,\dots \quad (6.18)$$

$$C_{i2} = u_{oi}$$

Zgodnie z (6.1) rozwiązanie równania dynamiki można ostatecznie przedstawić w postaci:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) p_i^0(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i(x) p_i^z(x). \quad (6.19)$$

Dyskusja rozwiązania

Pierwszy składnik rozwiązania (6.19) zależy jedynie od rozkładu odkształcenia i prędkości ugięcia na elastycznym ramieniu w chwili początkowej. Opisuje on więc drgania własne (swobodne) elastycznego ramienia. Drugi składnik (6.19) zależy tylko od zewnętrznej funkcji wymuszającej $b(x)f(t)$, opisuje więc drgania wymuszone elastycznego ramienia. Postać rozwiązania zależy od położenia wartości własnych v_i^* (pierwiastków równania charakterystycznego) układu na płaszczyźnie zespolonej.

Przypadek 1: $\gamma \geq \beta/\alpha$, (rys.1)

Występuje tu pewna skończona liczba m_1 składowych periodycznych o częstotliwościach ω_i , które zanikają wykładniczo (6.13). Odpowiadają one wartościom własnym v_i^* położonym na krzywych Γ_1^+ . Drgania wymuszone opisuje wówczas zależność (6.15). Dla $i > m_1$ wśród drgań własnych występują składowe nieokresowe zanikające wykładniczo. W zależności (6.19) korzystamy wówczas z (6.14) i (6.16).

Przypadek 2: $0 \leq \gamma < \beta/\alpha$, (rys.2)

Postać rozwiązania (6.19) jest tu praktycznie identyczna z przypadkiem 1. W rozwiązaniu występuje pewna skończona liczba m_2 składowych periodycznych $v_i^* \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$, zanikających wykładniczo. Pozostałym wartościom własnym odpowiada nieskończenie wiele składowych nieokresowych zanikających wykładniczo.

Przypadek 3: $\gamma_0 < \gamma < 0$, (rys.3)

Gdy $\lambda_1 > (-\gamma)^2$, to początkowym wartościom własnym odpowiadają składowe nieokresowe zanikające wykładniczo (6.14), (6.16). Następnie występuje pewna skończona liczba składowych periodycznych, zanikających wykładniczo (6.13), (6.15). Kolejnym wartościom własnym odpowiada nieskończenie wiele składowych nieokresowych, zanikających wykładniczo. W rozwiązaniu (6.19) korzystamy z (6.14), (6.16).

Gdy $\lambda_1 \leq (-\gamma)^2$, to odcinki $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ zawierają skończoną liczbę wartości własnych v_i^* i w rozwiązaniu pojawia się dodatkowa skończona liczba składowych nieokresowych narastających wykładniczo.

Przypadek 4 : $\gamma \leq \gamma_0$, (rys.4)

Wśród drgań własnych występują jedynie składowe nieokresowe. Jeżeli $\lambda_1 > (-\gamma)^2$, to wszystkie składowe nieokresowe zanikają wykładniczo. Jeżeli $\lambda_1 \leq (-\gamma)^2$, to występuje pewna skończona liczba składowych nieokresowych narastających wykładniczo. W rozwiązaniu (6.19) korzystamy z (6.14), (6.16).

Należy zwrócić uwagę, że zagadnienia poruszone w pracy mogą stanowić punkt wyjścia w procesie projektowania układów regulacji umożliwiających aktywne tłumienie drgań w elastycznych układach mechanicznych. Rozwiązanie tego typu zagadnień stanowi naturalną kontynuację przedstawionych w niniejszej pracy rozważań.

LITERATURA

1. Burgreen D., Brooklyn N.Y., Free Vibrations of Pin-Ended Column with distance between pin ends, Journal of Applied Mechanics, June 1951, pp. 135-139
2. Balakrishnan A.V. , Analiza funkcjonalna stosowana, 1992
3. Chen G., Russell D.L., A mathematical model for linear elastic systems with structural damping, Quaterly of Applied Mathematics, Vol 39, 1982 , pp.433-454
4. Huang F., On the mathematical model with analytic damping, SIAM J. Control Optimization, 26-3, 1988 , pp. 714-724
5. Ito K., Kunimatsu N., Stabilization of non-linear distributed parameter vibratory system, International Journal of Control, Vol 48, 1988, pp.2389-2415
6. Ito K., Kunimatsu N., Semigroup model of structurally damped Timoshenko beam with boundary input, International Journal of Control, Vol 54, 1991, pp.367-391
7. Sakawa Y., Feedback control of second order evolution equation with damping, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 22, No. 3, 1984, pp.343-361
8. Sakawa Y., Feedback stabilization of linear diffusion system, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 21, No. 5, 1983, pp.667-675
9. Tanabe H., Equations of evolution, 1979
10. Timoshenko S., Vibration problems in engineering, 1955

11. Woikowsky-Krieger, The effect of an axial force on vibration of hinged of bars, Journal of Applied Mechanics, March 1950

Recenzent: Dr hab.inż. Ewaryst Rafajłowicz
Prof. Politechniki Wrocławskiej

Wpłynęło do Redakcji 12.06.1995 r.

Abstract

In the paper the analysis of mathematical models describing a class of elastic mechanical systems is presented. In the case when elements of mechanical constructions undergo elastic deformation we have to treat them as the distributed parameter elements. Therefore the dynamics of the elastic mechanical systems has to be described by partial differential equations. This fact complicates the mathematical model and makes it's analysis difficult. Much more complicated and advanced mathematical methods have to be used to analyze the distributed parameter systems.

The paper is devoted to the analysis of distributed parameter system described by partial differential equation (2.1) fourth order with respect to spatial coordinate and second order with respect to time. Equation (2.1) was completed by two initial conditions and four boundary conditions. Equation of dynamics contains terms describing so called internal (structural) damping.

On the base of spectral theory of linear, unbounded, differential operators defined in appropriate Hilbert space the analysis of system is presented. The fourth order differential operator with respect to spatial coordinate with appropriate boundary conditions was introduced. It was solved eigenvalues and eigenfunctions problem for this operator. The main properties of the operator was presented (self-adjointness, completeness and orthogonality of eigenfunctions set). Using defined differential operator the partial differential equation of dynamics was transformed into linear equation of evolution (4.1) (an abstract ordinary differential equation) in infinite dimensional Hilbert space. The evolution equation was finally transformed into equation of state (4.13). On the ground of the analysis of "state operator" spectrum the necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of the system were formulated. The solution of equation of dynamics is finally presented.