ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Aleksander BACHMAN, Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

ANALIZA JEDNOMASZYNOWYCH PROBLEMÓW SZEREGOWANIA ZADAŃ Z CZASOWO ZALEŻNYMI CZASAMI WYKONYWANIA*

Streszczenie. W pracy dokonano przeglądu literaturowego jednomaszynowych problemów szeregowania zadań, których czasy wykonywania są pewnymi funkcjami zależnymi od momentu rozpoczęcia ich wykonywania. Autorzy dokonali porównania różnych modeli opisujących rozpatrywaną zależność czasu wykonywania zadania ze względu na stosowane kryteria.

A STATE OF ART SURVEY OF SINGLE MACHINE SCHEDULING PROBLEMS WITH DETERIORATING JOBS

Summary. The paper deals with the single machine scheduling problems, where the job processing time is given as a function dependent on the processing start time. We presented the wide survey of the models and studied problems for the phenomenon of the job processing time deterioration.

1. Wprowadzenie

Niniejsza praca opisuje jednomaszynowe problemy szeregowania zadań, w których czas wykonywania jest dany jako pewna funkcja zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania. Procesy, w których czas wykonywania zadania jest uzależniony czasowo, znajdują dosyć szerokie zastosowanie w hutnictwie, medycynie, ekonomii, a także w sferze wojskowej. Dwudziestoletni dorobek naukowy związany z zadaniami zależnymi od momentu rozpoczęcia ich wykonywania obejmuje zaledwie trzydzieści trzy prace. Autorzy w większej mierze skupiali się na wprowadzaniu nowych modeli opisujących fenomen zmiany czasu wykonywania w zależności od momentu rozpoczęcia wykonywania niż na ich dogłębnym analizowaniu. W niniejszej pracy autorzy przedstawili osiągnięcia związane z badaną tematyką w porządku chronologicznym ze względu na badane kryteria. Dokonano ujednolicenia oznaczeń, a uzyskane wyniki stabelaryzowano. Obecna publikacja stanowi rozszerzenie analizy jednomaszynowych problemów szeregowania zadań przedstawionej w pracy [3].

* Publikacja jest częściowo finansowana przez Grant KBN 8T11F001 11

Ze względu na to, że najczęściej rozpatrywanym kryterium była minimalizacja czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań, a tylko kilka prac było związanych z kryterium innej postaci, niniejsza praca została podzielona na trzy części. W pierwszej analizowane były czasowo zależne modele czasu wykonywania zadania przy kryterium minimalizacji czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań, natomiast w drugiej modele przy pozostałych kryteriach. Trzecia część pracy zawiera krótkie podsumowanie aktualnego stanu badań.

2. Minimalizacja czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań

Pierwsza publikacja związana z modelami czasowo zależnymi pojawiła się w 1979. Melnikov i Shafransky [35] rozpatrywali model składający się z dwóch części, z których tylko jedna była zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania. Analizowali oni model, w którym część zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania $f(t_i)$ była określona jako pewna funkcja monotoniczna o wartościach nieujemnych:

$$p_i = a_i + f(t_i); \quad a_i > 0, \tag{1}$$

gdzie:

p_i - czas trwania wykonania zadania (*processing time*),

a_i - część niezależna od momentu rozpoczęcia wykonywania (*fixed part*),

t_i - moment rozpoczęcia wykonywania zadania (*starting time*).

W ich pracy zostało pokazane, że optymalne uszeregowanie jest zapewnione przez niemalejące uszeregowanie zadań według ich niezależnych części czasów wykonywania, czyli według $a_i \le a_{i+1}$, jeżeli część zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania jest określona przez jednakową dla wszystkich zadań funkcję rosnącą. Jeżeli natomiast część zależna jest określona przez jednakową dla wszystkich zadań funkcję malejącą, to optymalne uszeregowanie jest zapewnione przez nierosnące uszeregowanie zadań według ich niezależnych części czasów wykonywania, tj. $a_i \ge a_{i+1}$. Oprócz ogólnego modelu Melnikov i Shafransky rozpatrywali trzy szczególne przykłady funkcji opisujących część zależną od momentu rozpoczęcia wykonywania: $f(t_i) = \lambda t_i$, $\lambda > 0$, $f(t_i) = e^{\lambda t_i}$, $\lambda > 0$ oraz $f(t_i) = \lambda t_i^{\alpha}$, $\lambda > 0$, $\alpha > 1$.

Prawie dziesięć lat później pojawiła się publikacja [17], w której Gupta, Kunnathur i Dandapani przedstawili szczegółowe zastosowanie zadań czasowo zależnych w ekonomii. Podali oni przykład spłaty wielu zaciągniętych pożyczek, przy założeniach że spłacający posiada pewne ograniczone środki finansowe, a odsetki od zaciągniętych przez spłacającego pożyczek charakteryzują się pewną, stałą stopą procentową. Pokazali oni, że problem minimalizacji maksymalnej raty pożyczki jest równoważny problemowi minimalizacji największego czasu wykonywania zadania. Autorzy publikacji [17] podali również algorytm oparty na technice podziału i ograniczeń rozwiązujący analizowany przez nich problem.

W 1988 roku J.N.D Gupta i S.K. Gupta [16] wprowadzili trzy nowe modele, w których czas wykonywania zadania był opisany przez zależność liniową, kwadratową i wielomianową:

$$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i;\quad a_i \geq 0;\quad b_i \geq 0 \qquad \text{- model liniowy,} \tag{2}$$

$$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2;\quad a_i \geq 0;\quad b_i \geq 0;\quad c_i \geq 0 \qquad \text{- model kwadratowy,} \tag{3}$$

$$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2 + \ldots + m_i t_i^m;\ a_i, b_i, c_i, \ldots, m_i \geq 0 \qquad \text{- model ogólny, wielomianowy,} \tag{4}$$

b_i, c_i, ..., m_i - współczynniki wzrostu długości zadania (*deterioration rates*).

Dla tak zdefiniowanych modeli tylko dla zależności liniowej pokazali, że uszeregowanie optymalne jest dane przez niemalejące uszeregowanie zadań według $\frac{a_i}{b_i}$. Dla zależności kwadratowej i wielomianowej, powołując się na [11], wysunęli podejrzenie o NP-zupełności problemów.

Alidaee w [1] wprowadził bardzo ogólny model zależności czasu wykonywania zadania od momentu rozpoczęcia jego wykonywania. Założył on, że czas wykonywania zadania jest dany jako niemalejąca, różniczkowalna funkcja różna dla każdego zadania:

$$p_i = f_i(t_i)\,. \tag{5}$$

Powołując się na [11] Alidaee stwierdził, że przy tak ogólnym założeniu problem minimalizacji czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań jest NP-zupełny. W dalszej części pracy Alidaee analizował modele kwadratowy i wykładniczy jako szczególne przypadki modelu ogólnego.

Jedyna w swoim rodzaju praca związana z zadaniami czasowo zależnymi, gdzie problem szeregowania zadań został potraktowany stochastycznie, pojawiła się w 1990 roku. Browne i Yechiali [8] pokazali, że minimalizacja oczekiwanego czasu zakończenia wykonywania zadań dla liniowego modelu czasu wykonywania zachodzi przy niemalejącym uszeregowaniu zadań według stosunku oczekiwanej wartości stałej części czasu wykonywania do współczynnika wzrostu, tj. $\frac{E(a_i)}{b_i}$.

Kunnathur i Gupta w [21] wprowadzili jeszcze jeden nowy model czasu wykonywania zadania:

$$p_i = a_i + b_i; \qquad b_i = \max\{0, v_i(t_i - d_i)\}; \qquad v_i \geq 0. \tag{6}$$

Pokazali oni, że problem szeregowania zadań przy kryterium C_{max} i tak zdefiniowanym modelu jest trudniejszy niż NP-zupełny problem szeregowania zadań przy kryterium ważonych opóźnień wykonania zadań. Ze względu na NP-zupełność prezentowanego modelu autorzy pracy [21] zastosowali dwa optymalne podejścia oparte na programowaniu dynamicznym i technice podziału i ograniczeń. W obu przypadkach rozwiązywano problemy zawierające nie więcej niż 15 zadań.

Pewien ograniczony model liniowy, bo składający się tylko z części zależnej od momentu rozpoczęcia wykonywania, zaproponował Mosheiov w [23]:

$$p_i(t_i) = b_i t_i; \qquad b_i \geq 0. \tag{7}$$

Pokazał on, że niezależnie od uszeregowania zadań z czasami wykonywania określonych powyższym modelem kryterium C_{max} jest zawsze minimalizowane.

Pewne rozszerzenie modelu podanego przez Kunnathura i Guptę w pracy [21] zaproponowali Kubiak i van de Velde w [20]. Wprowadzili oni dwa momenty krytyczne d i D, po przekroczeniu pierwszego z nich wydłużenie zadania było proporcjonalne do wielkości opóźnienia względem momentu krytycznego, natomiast po przekroczeniu drugiego z nich wydłużenie zadania było stałe:

$$p_i(t_i) = \begin{cases} a_i, & t_i \leq d, \\ a_i + v_i(t_i - d), & d < t_i < D, \\ a_i + v_i(D - d), & t_i \geq D, \end{cases} \qquad d \geq 0;\ D \geq 0;\ a_i > 0;\ v_i > 0 \tag{8}$$

d - wspólny moment krytyczny, po przekroczeniu którego zadania ulegają wydłużaniu,

D - największy moment krytyczny, po którym wydłużenie jest stałe.

W ich pracy zostało również pokazane, że problem szeregowania zadań, przy założeniu że największy moment krytyczny jest nieskończenie duży, tzn. $D = \infty$, jest NP-zupełny. Oprócz tego zastosowali oni dwa podejścia, wykorzystujące metodę programowania dynamicznego i technikę podziału i ograniczeń rozwiązujące wspomniany problem w sposób optymalny dla 15 zadań.

Inną interpretację zmiany długości czasu wykonywania zadania zaprezentował Mosheiov w [24]. Założył on, że czas wykonywania zadania wzrasta skokowo odpowiednio do przekraczanych krytycznych momentów rozpoczęcia wykonywania. Zakładał on w ogólnym przypadku, że dowolne zadanie jest opisane przez pewien zestaw krytycznych momentów rozpoczęcia wykonywania i odpowiadający mu zestaw długości czasów wykonywania. Każde przekroczenie następnego w kolejności momentu rozpoczęcia wykonywania jest związane z dodatkowymi działaniami, które muszą zostać przeprowadzone w ramach wykonania zadania.

$$p_i = \begin{cases} a_i, & t_i \le D, \\ v_i > a_i, & t_i > D. \end{cases} \tag{9}$$

Taki model, opisany przez skokowe, niemalejące wartości czasów wykonywania zadania odpowiadające przekraczanym krytycznym momentom rozpoczęcia wykonywania, jest NP-zupełny [11] (nawet gdy zadanie posiada tylko jeden krytyczny moment rozpoczęcia wykonywania). Mosheiov zaprezentował dla swojego modelu kilka heurystyk, które dawały rozwiązania gorsze od optymalnego o nie więcej niż 10%.

Liniowe modele czasu wykonywania zadania, składające się z dwóch części: niezależnej i zależnej od momentu rozpoczęcia wykonywania, były również rozpatrywane w pracach [15] oraz [2]. Gawiejnowicz i Pankowska [15] zaprezentowali algorytm o złożoności $O(n^2)$, który uwzględniał możliwość występowania zerowej wartości współczynnika wzrostu czasu wykonywania. Alidaee i Landram w pracy [2] zajmowali się problemem minimalizacji największego czasu wykonywania zadania. W ich pracy zostało udowodnione, że w dowolnym uszeregowaniu, przy założeniu że współczynnik wydłużenia zadania jest większy od jedności, zadanie o największej wartości czasu wykonywania znajduje się zawsze na ostatniej pozycji. Zaprezentowali oni optymalny algorytm o złożoności $O(n^2)$, który wykorzystywał regułę stosowaną przy minimalizacji kryterium czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań, tj.: niemalejące uszeregowanie zadań według współczynnika $\frac{a_i}{b_i}$. Podali oni także, że w ogólnym przypadku, tj. gdy $a_j \ge 0$ oraz $b_j > 0$ dla $j = 1,\ldots,n$, minimalizacja czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań nie jest równoważna minimalizacji największego czasu wykonywania zadania. W przypadku szczególnym, tj. gdy $a_j = a \ge 0$ oraz $b_j > 0$ dla $j = 1,\ldots,n$, problem minimalizacji największego czasu wykonywania zadania jest równoważny problemowi minimalizacji czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań.

Tablica 1

Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonywania zależnymi od momentu rozpoczęcia ich wykonywania przy kryterium C_{max}

Model	Złożoność	Literatura
$p_i = a_i + f(t_i)$; $f(t_i)$ - rosnąca; $f(t_i) > 0$; $t_i > 0$	O(n logn)	Melnikov, Shafransky, 1979, [33]
$p_i = a_i + f(t_i)$; $f(t_i)$ - malejąca; $f(t_i) > 0$; $t_i > 0$	O(n logn)	Melnikov, Shafransky, 1979,[33]
$p_i = f_i(t_i); t_i \geq 0$; $f_i(t_i)$ - różniczkowalna, niemalejąca	NP-zupełny	Alidaee, 1990, [1]
$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i$; $a_i > 0$; $b_i \geq 0$; $t_i \geq 0$	O(n²)	Alidaee, Landram, 1996, [2]
$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i$; $a_i > 0$; $b_i > 0$; $t_i \geq 0$	O(n logn)	Wajs, 1986, [29] [8], [13-15], [30-33]
$p_i(t_i) = b_i t_i$; $b_i > 0$; $t_i > 0$	O(n)	Mosheiov, 1994, [23]
$p_i = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2$; $a_i, b_i, c_i \geq 0$	NP-zupełny ?	Gupta J.N.D., Gupta S.K., 1988, [16]
$p_i = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2 + \ldots + m_i t_i^m$	NP-zupełny ?	Gupta J.N.D., Gupta S.K., 1988, [16]
$p_i = 1 - e^{-b_i t_i}$; $b_i > 0$	O(n logn)	Wajs, 1996, [33]
$p_i = a_i e^{b_i t}$; $a_i > 0$	O(n logn)	Browne, Yechiali, 1990, [8]
$p_i = a_i + b_i$; $b_i = \max\{0, v_i(t_i - d_i)\}$; $v_i \geq 0$	NP-zupełny	Kunnathur, Gupta, 1990, [21]
$p_i(t) = \begin{cases} a_i & t \leq d \\ a_i + w_i(t-d) & d < t < D \\ a_i + w_i(D-d) & t \geq D \end{cases}$	NP-zupełny	Kubiak, van de Velde, 1994, [20]
$p_i = \begin{cases} a_i & t_i \leq D \\ v_i > a_i & t_i > D \end{cases}$	NP-zupełny	Mosheiov, 1995, [24]
$p_j(t_j) = a_j + k a_j t_j$; $a_j > 0$	O(n)	Bachman, Janiak, 1998, [7]
$p_j(t_j) = a_j + b_j(t_j - r_j)$; $a_j > 0, b_j > 0, t_j \geq r_j$	NP-zupełny	Bachman, Janiak, 1998, [5]

W pracy [7] Bachman i Janiak zajmowali się szczególnym przypadkiem liniowego modelu czasu wykonywania zadania. Założyli oni, że stosunek stałej części czasu wykonywania zadania do współczynnika wzrostu czasu wykonywania jest jednakowy dla wszystkich zadań:

$$p_j(t_j) = a_j + ka_j t_j; \qquad a_j > 0;\ k > 0. \tag{10}$$

Dla tak zdefiniowanego modelu zostało pokazane, że minimalizacja czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań jest niezależna od ich uszeregowania.

W innej pracy Bachman i Janiak [5] rozpatrywali model czasu wykonywania zadania, w którym wydłużenie zadania było uzależnione od momentu rozpoczęcia jego wykonywania, a także od momentu dostępności jego wykonywania:

$$p_j(t_j) = a_j + b_j(t_j - r_j);\ a_j > 0,\ b_j > 0,\ t_j \geq r_j, \tag{11}$$

Pokazali oni, że powyższy problem przy kryterium minimalizacji czasu zakończenia wykonywania jest NP-zupełny. W swojej pracy przedstawili także dwa algorytmy rozwiązujące rozpatrywany problem w sposób przybliżony a także dokonali ich analizy eksperymentalnej.

3. Inne kryteria rozpatrywane dla zadań czasowo zależnych

Dla innych kryteriów najczęściej rozpatrywany był liniowy model czasu wykonywania zadania. Mosheiov przedstawił największy dorobek naukowy związany z różnymi jego odmianami. W swojej pracy [23] zaprezentował wielomianowe algorytmy dla uproszczonego modelu czasu wykonywania zadania (nie zawierającego stałej części) dla prawie wszystkich rozpatrywanych kryteriów. W pracy [22] pokazał, dla kryterium sumy czasów zakończenia wykonywania, przy założeniu że stałe części czasów wykonywania dla wszystkich zadań są jednakowe, że optymalne uszeregowanie jest V-podobne względem współczynników wzrostu. V-podobność w uszeregowaniu optymalnym polega na tym, że zadania są szeregowane nierosnąco względem współczynników wzrostu czasu wykonywania, jeżeli wykonywane są przed zadaniem o najmniejszej wartości współczynnika wzrostu, jeżeli natomiast są wykonywane po zadaniu o najmniejszej wartości współczynnika wzrostu, wtedy szeregowane są niemalejąco. Dla sumy ważonych czasów zakończenia wykonywania, przy założeniu, że dla wszystkich zadań współczynniki wzrostu są jednakowe, również Mosheiov pokazał w pracy [25], że optymalne uszeregowanie jest Λ-podobne względem stałych części czasów wykonywania zadania (Λ-podobność polega na niemalejącym szeregowaniu zadań przed zadaniem oraz na nierosnącym szeregowaniu zadań po zadaniu o największej wartości stałej części czasu wykonywania).

Suma ważonych czasów zakończenia wykonywania była jeszcze rozpatrywana przez Sundararaghavana i Kunnathura w pracy [27]. W podanym przez nich modelu zakładali skokowe wydłużenie czasu wykonywania zadania po przekroczeniu pewnego krytycznego momentu rozpoczęcia wykonywania:

$$p_i = \begin{cases} a & t_i \le D, \\ a + v_i & t_i > D, \end{cases} \tag{12}$$

D - największy dopuszczalny moment rozpoczęcia wykonywania zadania, jednakowy dla wszystkich zadań,

v_i - wydłużenie zadania.

Podali oni dwa algorytmy o złożoności O(nlogn) dla problemu szeregowania zadań z dwoma różnymi wydłużeniami oraz dla problemu szeregowania zadań z dwoma różnymi wagami.

Liniowy model czasu wykonywania zadania, w którym wraz z upływem czasu zadanie ulegało skróceniu, został zaproponowany przez Ho, Leung i Wei w [18]:

$$p_i = a_i - b_i t_i; \qquad b_i d_i < a_i \le d_i; \; 0 < b_i < 1, \tag{13}$$

d_i - największy dopuszczalny moment zakończenia wykonywania *i-tego* zadania (*deadline*).

W pracy [18] rozpatrywali oni problem istnienia dopuszczalnego uszeregowania. W pracy [9] Chen, a niezależnie równolegle z nim Woeginger w [34] zajmowali się problemem minimalizacji liczby zadań opóźnionych dla modelu zaproponowanego w [18]. Rozwiązania, które podali, miały złożoność $O(n^2)$ w przypadku Chena, natomiast $O(n^3)$ w przypadku Woegingera.

Jak wynika z przeprowadzonej powyżej analizy modeli opisujących zależność czasu wykonywania zadania od momentu rozpoczęcia jego wykonywania w dużej mierze spotykane są rosnące funkcje liniowe lub ich kombinacje. Większość modeli ograniczała się do kilku parametrów, dla większej liczby parametrów rozpatrywane problemy stawały się NP-zupełne, nawet dla kryterium C_{max} (modele kwadratowy lub wielomianowy). Tylko jeden model, zaproponowany przez Ho, Leung i Wei [18], zakładał zmniejszanie czasu wykonywania zadania wraz ze wzrostem momentu rozpoczęcia wykonywania, w pozostałych przypadkach późniejsze rozpoczęcie wykonywania zadania powodowało wydłużenie czasu jego wykonywania.

W pracy [4] Bachman i Janiak zajmowali się szczególnym przypadkiem liniowego modelu czasu wykonywania zadania, w którym stosunek stałej części czasu wykonywania zadania do współczynnika wzrostu czasu wykonywania był jednakowy dla wszystkich zadań (patrz (10)). W ich pracy zostały zaprezentowane wielomianowe algorytmy rozwiązujące jednomaszynowe problemy szeregowania dla najczęściej stosowanych kryteriów.

Tablica 2

Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonywania zależnymi od momentu rozpoczęcia ich wykonywania

Model	Kryterium	Złożoność	Literatura
$p_i(t_i) = b_i t_i;\ b_i > 0;\ t_i > 0$	$L_{max}, T_{max}, \sum C_i, \sum w_i C_i, \sum L_i, \sum U_i$	O(n logn)	Mosheiov, 1994, [20]
$p_i = \begin{cases} a & t_i \le D \\ a + v_i & t_i > D \end{cases};\ w_i = \begin{cases} w_1 \\ w_2 \end{cases}$	$\sum w_i C_i$	O(n logn)	Sundararaghavan, Kunnathur, 1989, [25]
$p_i = \begin{cases} a & t_i \le D \\ a + v_i & t_i > D \end{cases};\ v_i = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \end{cases}$	$\sum w_i C_i$	O(n logn)	Sundararaghavan, Kunnathur, 1989, [25]
$p_i = a_i - b_i t_i;\ b_i d_i < a_i \le d_i;$ $0<b_i<1;\ r_i=0;\ d_i= D$	istnienie rozwiązania	O(n logn)	Ho, Leung, Wei, 1993, [18]
$p_i = a_i - b_i t_i;\ b_i d_i < a_i \le d_i;$ $0<b_i<1;\ d_i = \begin{cases} d_1 \\ d_2 \end{cases}$	$\sum U_i$	NP-zupełny	Ho, Leung, Wei, 1993, [18]
$p_i = a_i - b_i t_i;\ b_i d_i < a_i \le d_i;$ $0<b_i<1;\ d_i= D$	$\sum U_i$	$O(n^2)$	Chen, 1994, [9]
$p_i = a_i - b_i t_i;\ b_i d_i < a_i \le d_i;$ $0<b_i<1;\ d_i= D$	$\sum U_i$	$O(n^3)$	Woeginger, 1995, [34]
$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i;\ a_i > 0;\ b_i > 0;$	$L_{max}, T_{max}, \sum C_i, \sum w_i C_i, \sum L_i, \sum w_i L_i$	O(n logn)	Bachman, Janiak, 1998, [4]
$p_i(t_i) = a_i + b_i t_i;\ a_i > 0;\ b_i > 0;$	L_{max}	NP-zupełny	Bachman, Janiak, 1998, [6]

W pracy [6] Bachman i Janiak udowodnili, że problem minimalizacji maksymalnej nieterminowości, dla zadań opisanych liniowym modelem czasu wykonywania przy zadanych pożądanych terminach zakończenia wykonywania, jest NP-zupełny.

4. Podsumowanie

W pracy dokonano analizy jednomaszynowych problemów szeregowania zadań z czasami wykonywania podanymi w postaci funkcji momentu rozpoczęcia ich wykonywania. Przedstawiono stosowane modele oraz rozpatrywane kryteria. Ze względu na ograniczony rozmiar pracy nie dokonano analizy wielomaszynowych modeli czasów wykonywania zadań, jednak w literaturze zostały podane odpowiednie publikacje rozpatrujące te problemy.

LITERATURA

1. Alidaee B.: A heuristic solution procedure to minimize makespan with non-linear cost functions, Journal of the Operations Research Society, 1990, 41/11, 1065-1068.
2. Alidaee B., Landram F.: Scheduling deteriorating jobs on a single machine to minimize the maximum processing times, International Journal of System Science, 1996, 27/5, 507-510.
3. Bachman A., Janiak A.: Analiza problemów harmonogramowania z czasami wykonywania zadań w postaci funkcji momentów rozpoczęcia ich wykonywania, materiały III Konferencji z cyklu Komputerowe Systemy Wielodostępne pt.: Restrukturyzacja Systemów Informacyjnych Przedsiębiorstw - Raporty z wdrożeń projektów celowych, Ciechocinek 1997.
4. Bachman A., Janiak A.: Scheduling jobs with special type of start time dependent processing times, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, seria Preprinty nr 34/97, Wrocław 1997.
5. Bachman A., Janiak A.: Minimizing the maximum completion time for the deteriorating jobs with ready times, Artykuł przyjęty do publikacji w materiałach XI KKADPP, Zakopane 1998.
6. Bachman A., Janiak A.: Minimalizacja maksymalnej nieterminowości dla zadań czasowo zależnych, Artykuł przyjęty do publikacji w materiałach XI KKADPP, Zakopane 1998.
7. Bachman A., Janiak A.: Minimizing makespan and the sum of completion times for the jobs with special type of the processing time deterioration, Artykuł przyjęty do publikacji w materiałach MMAR'98, Międzyzdroje 1998.
8. Browne S., Yechiali U.: Scheduling deteriorating jobs on single processor, Operations Research, 1990, 38/3, 495-498.
9. Chen Z-L.: A note on single processor scheduling with time-dependent execution times, Operations Research Letters, 1994, 17, 127-129.
10. Chen Z-L.: Parallel machine scheduling with time dependent processing times, Discrete Applied Mathematics, 1996, 70, 81-93.
11. Garey M.R., Johnson D.S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.

12. Gawiejnowicz S.: Wybrane problemy i metody probabilistycznej analizy algorytmów szeregowania zadań, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria III: Matematyka stosowana, 1995, 38, 101-112.
13. Gawiejnowicz S.: Brief survey of continuous models of scheduling, Foundations of Computing and Decision Sciences, 1996, 21/2, 81-100.
14. Gawiejnowicz S., Pankowska L.: Scheduling jobs with varying processing times, Information Processing Letters, 1995, 54, 175-178.
15. Gawiejnowicz S., Pankowska L.: Scheduling jobs with time-dependent processing times, Report 027/1995, Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University, 1995.
16. Gupta J.N.D., Gupta S.K.: Single facility scheduling with nonlinear processing times, Computers and Industrial Engineering, 1988, 14/4, 387-393.
17. Gupta S.K., Kunnathur A.S., Dandapani K.: Optimal repayment policies for multiple loans, OMEGA International Journal of Management Science, 1987, 4/15, 323-330.
18. Ho K.I-J., Leung J.Y-T., Wei W-D.: Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times, Information Processing Letters, 1993, 48, 315-320.
19. Hsieh Y-C., Bricker D.L.: Scheduling linearly deteriorating jobs on multiple machines, Computers and Industrial Engineering, 1997, 32/4, 727-734.
20. Kubiak W., v. d. Velde S.L.: Scheduling deteriorating jobs to minimize makespan, Report LPOM-94-12, Laboratory of Production and Operations Management, Department of Mechanical Engineering, University of Twente, 1994.
21. Kunnathur A.S., Gupta S.K.: Minimizing the makespan with late start penalties added to processing times in a single facility scheduling problem, European Journal of Operational Research, 1990, 47, 56-64.
22. Mosheiov G.: V-shaped policies to schedule deteriorating jobs, Operations Research, 1991, 39/6, 979-991.
23. Mosheiov G.: Scheduling jobs under simple linear deterioration, Computers and Operations Research, 1994, 21/6, 653-659.
24. Mosheiov G.: Scheduling jobs with step-deterioration; Minimizing makespan on a single and multi-machine, Computers and Industrial Engineering, 1995, 28/4, 869-879.
25. Mosheiov G.: Λ-shaped policies to schedule deteriorating jobs, Journal of the Operational Research Society, 1996, 47, 1184-1191.
26. Sriskandarajah C., Goyal S.K.: Scheduling of a two-machine flowshop with processing times linearly dependent on job waiting-time, Journal of the Operational Research Society, 1989, 40/10, 907-921.
27. Sundararaghavan P.S., Kunnathur A.S.: Single machine scheduling with start time dependent processing times: Some solvable cases, European Journal of Operational Research, 1994, 78, 394-403.
28. Wagneur E., Sriskandarajah C.: Optimal control of class of DEDS: flow-shops with state-dependent processing times, Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 1993, 3, 397-425.

29. Wajs W.: Problem harmonogramowania procesów hutniczych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 1984, 29/3, 389-403.

30. Wajs W.: Wielomianowy algorytm dla dynamicznego problemu sekwencyjnego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 1986, 31/3, 209-213.

31. Wajs W.: Optimal control for linear and nonlinear dynamic processes, IFAC Symposia Series, IXth World Congress IFAC, Tallin, 1991, 3, 517-523.

32. Wajs W.: Polynomial algorithm for control dynamic sequencing problem, Elektrotechnika, 1995, 14/4, 445-450.

33. Wajs W., Grabowski P.: Studies in Automatics, Wydawnictwa AGH, Kraków 1996, 51-67.

34. Woeginger G.J.: Scheduling with time-dependent execution times, Information Processing Letters, 1995, 54, 155-156.

35. Melnikov O.I., Shafransky Ya.M.: Parametric problem of scheduling theory, Kibernetika, 1979, 3, 53-57 (publikacja w języku rosyjskim).

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jan Węglarz

Abstract

In the paper we analysed the single machine scheduling problems with start time dependent processing times. We presented the complete state of art in this area containing thirty three articles from last twenty years. The notation of the presented models have been unified. We described also the techniques used to solve considered problems with some remarkable results.