ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Aleksander BACHMAN, Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

MINIMALIZACJA MAKSYMALNEJ NIETERMINOWOŚCI DLA ZADAŃ CZASOWO ZALEŻNYCH *

Streszczenie. W pracy rozpatrywano jednomaszynowy problem szeregowania zadań czasowo zależnych przy kryterium minimalizacji maksymalnej nieterminowości wykonania. Założono, że czas wykonywania zadania, dany w postaci liniowej, niemalejącej funkcji terminu rozpoczęcia wykonywania, składa się z dwóch części: stałej i zmiennej. Stała część, niezależna od terminu rozpoczęcia, określa pewną minimalną długość czasu wykonywania zadania, wynikającą z uwarunkowań technologicznych. Natomiast zmienna część, charakteryzowana przez współczynnik wzrostu, opisuje wpływ terminu rozpoczęcia wykonywania na wydłużenie zadania. Pokazano, że przy tak scharakteryzowanym modelu jednomaszynowy problem szeregowania zadań przy kryterium minimalizacji maksymalnej nieterminowości jest NP-zupełny.

MINIMIZING MAXIMUM LATENESS FOR THE DETERIORATING JOBS

Summary. The paper deals with the single machine scheduling problem, where the job processing time is given as a linear, nondecreasing function dependent on the processing start time. The function describing the job processing time consists of two parts, where one is constant and describes the minimal time required to complete the job if its starting moment is equal to zero. The second part, characterized by the growth rate, describes how fast the job processing time deteriorate. We showed that such a described problem for the maximum lateness criterion is NP-complete by reducing to it NP-complete Partition Problem.

1. Wprowadzenie

Stały czas wykonywania zadania, którym zajmuje się klasyczna teoria szeregowania zadań, nie jest wystarczający w opisie wielu rzeczywistych procesów. Wprowadzenie dodatkowych parametrów, wpływających na zmianę długości wykonywania zadania, pozwala dogłębniej scharakteryzować istotę problemu. W swojej pracy Janiak [5] rozpatruje przypadki, w których parametrem wpływającym na prędkość wykonania zadania są dostarczane zasoby. Przykłady takich procesów można znaleźć m.in. w hutnictwie, gdzie prędkość nagrzewania wlewków, które następnie mają przejść przez walcarkę-zgniatacz, zależy od ilości zużytego

* Publikacja jest częściowo finansowana przez Grant KBN 8T11F001 11

gazu. Innym parametrem wpływającym na długość czasu trwania zadania jest czas jego rozpoczęcia (w literaturze zadania takie są określane jako *time-dependent* lub *deteriorating jobs*). Podobnie jak w przypadku zasobów przykład zastosowania takiego procesu możemy znaleźć w hutnictwie. Wajs [6] w swojej pracy omawia szczegółowo proces, w którym czas nagrzewania wlewka w piecu wgłębnym wydłuża się wraz z czasem oczekiwania. Wlewek posiada pewną temperaturę początkową, która wraz z upływem czasu maleje, tak więc doprowadzenie go do temperatury odpowiedniej dla procesu walcowania zależy od temperatury początkowej, czyli od momentu rozpoczęcia nagrzewania. Inne zastosowania modeli, w których czas wykonywania zadania jest opisany funkcją zależną od momentu rozpoczęcia jego wykonywania, zostały przedstawione w pracy [1].

W niniejszej pracy rozpatrywany jest jednomaszynowy problem szeregowania zadań z czasami wykonywania opisanymi liniową, niemalejącą funkcją składającą się z części stałej i zmiennej. Część stała nie zależy od momentu rozpoczęcia wykonywania i określa minimalny czas przeznaczony na wykonanie zadania. Część zmienna, zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania, charakteryzowana przez współczynnik wzrostu, określa, w jaki sposób zadanie ulega wydłużeniu.

Organizacja niniejszej pracy jest następująca. W drugim rozdziale dokonano precyzyjnego sformułowania problemu. W trzecim rozdziale udowodniono, że sformułowany w poprzednim rozdziale problem jest NP-zupełny. Czwarty rozdział zawiera krótkie podsumowanie.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór pojedynczych i niepodzielnych zadań do wykonania na pojedynczej maszynie. Czas wykonywania każdego zadania p_j jest dany jako niemalejąca funkcja liniowa zależna od momentu rozpoczęcia wykonywania S_j i jest opisany następująco:

$$p_j(S_j) = a_j + b_j S_j \ ; \ a_j > 0, b_j > 0, S_j \geq 0, \tag{1}$$

gdzie:

a_j - stała część czasu wykonywania zadania,

b_j - współczynnik wydłużenia czasu wykonywania zadania.

Dla każdego zadania dany jest także pożądany termin zakończenia jego wykonywania d_j ($d_j \geq 0$). Zakładamy, że wszystkie zadania są dostępne w chwili zerowej $t_0 = 0$ (jest to moment, względem którego czas wykonania zadania ulega wydłużeniu). Zakładamy również, bez straty ogólności, że działalność maszyny rozpoczyna się w chwili $C_0 = 1$. Założenie dotyczące momentu rozpoczęcia działalności maszyny pozwala rozpatrywać podproblem, w którym bez względu na uszeregowanie każde zadanie ulega wydłużeniu. W ogólnym problemie oprócz szeregowania zadań już wydłużonych należy jeszcze uszeregować odpowiednie zadanie na pierwszą pozycję, która nie ulega wydłużeniu.

3. Dowód NP-zupełności

W tej części publikacji zostanie pokazane, że decyzyjna wersja jednomaszynowego problemu szeregowania zadań z czasami wykonywania w postaci liniowej funkcji momentu rozpoczęcia wykonywania (DPS) przy kryterium minimalizacji maksymalnej nieterminowości wykonania jest NP-zupełna. Zostanie pokazane, że NP-zupełny PROBLEM PODZIAŁU (PP) [3] jest wielomianowo transformowalny do problemu DPS. Decyzyjne wersje problemów PP i DPS są dane następująco:

PP: dany jest zbiór $X = (x_1, \dots, x_m)$ m dodatnich liczb całkowitych, których suma wynosi $\sum_{i=1}^{m} x_i = 2B$; czy istnieje taki podzbiór $Y \subset X = (x_1, \dots, x_m)$, że $\sum_{i \in Y} x_i = \sum_{i \in X \setminus Y} x_i = B$?

DPS: dany jest jednomaszynowy problem szeregowania zadań z czasami wykonywania w postaci (1) z parametrami a_i, b_i, d_i, $i = 1, \dots, n$, i liczbą y, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, a_i, b_i, y są dodatnimi liczbami wymiernymi, a d_i są nieujemnymi liczbami wymiernymi; czy istnieje takie uszeregowanie zadań, że maksymalna nieterminowość czasu wykonywania zadania jest mniejsza niż y?

Dla sformułowanych powyżej decyzyjnych wersji problemów PP i DPS zostanie przedstawiona wielomianowa transformacja, tzn.: dane problemu DPS zostaną zdefiniowane przy wykorzystaniu danych z NP-zupełnego problemu PP. Instancja problemu DPS składa się z $n=m+1$ zadań: m zadań pochodzących z danych PP oraz jednego zadania dodatkowego. Parametry pierwszych m zadań są dane następująco:

$$d_i = \left(m^{k+2}B + mB + m + B + 1 + \frac{1}{m^k} + \frac{1}{m^{k-1}} \right)\left(1 + \frac{2}{2m^k - 1} \right) - m^k B,$$

$$a_i = x_i, \quad b_i = \frac{x_i}{m^k B} \quad , \quad i = 1, \dots, m,$$

natomiast parametry zadania dodatkowego odpowiednio:

$$d_e = m^{k+2}B + mB + B + m + 1 + \frac{(B+2)(m+1)}{2m^k - 1}, \quad a_e = m^{k+2}B, \quad b_e = m.$$

Liczby k oraz y są zdefiniowane następująco: $k = \frac{\ln(B+1) - \ln 2}{\ln m} + 1$, natomiast $y = 0$.

Powyższa transformacja jest wykonywalna w czasie O(n).

Szczegółowa analiza podanej powyżej transformacji pozwala zauważyć, że wszystkie zadania utworzone na podstawie elementów z PP charakteryzują się jednakowymi wartościami ilorazów $\frac{a_i}{b_i}$, które są równe m^kB. Zadania o takiej charakterystyce były dokładnie analizowane w pracy [2], w niniejszej pracy wykorzystamy tylko ich dwie własności:

- dowolna permutacja zadań z jednakowymi ilorazami $\frac{a_i}{b_i}$ dla kryterium C_{max} jest optymalna,
- czas zakończenia wykonywania i-tego zadania w uszeregowaniu wyraża się następującym wzorem: $C_{[i]} = \left(C_0 + \frac{1}{v}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(va_{[j]} + 1\right) - \frac{1}{v}; \qquad v = \frac{a_j}{b_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$ (2)

W naszym przypadku $v = \frac{a_j}{b_j} = \frac{1}{m^k B}$, czyli wzór (2) przedstawia się następująco:

$$C_{[i]} = \left(C_0 + m^k B\right)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{a_{[j]}}{m^k B} + 1\right) - m^k B; \qquad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Pokażemy teraz, że PP posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy DPS posiada rozwiązanie.

Lemat 1. Jeżeli instancja PP posiada rozwiązanie, wtedy skonstruowana instancja DPS również posiada rozwiązanie.

Dowód. Załóżmy, że podzbiór $Y \subset X = (x_1, \ldots, x_m)$ jest rozwiązaniem PP, oznacza to, że $\sum_{i \in Y} x_i = \sum_{i \in X \setminus Y} x_i = B$. Uszeregowanie zadań, które daje rozwiązanie dla problemu DPS, wygląda następująco: jako pierwsze wykonywane są, w dowolnej kolejności, zadania utworzone na podstawie elementów należących do podzbioru Y, następnie wykonywane jest zadanie dodatkowe, a po nim pozostałe zadania, utworzone na podstawie elementów należących do podzbioru $X \setminus Y$, również w dowolnej kolejności. Pokażemy, że dla powyżej zdefiniowanego uszeregowania maksymalna nieterminowość zadania jest mniejsza niż 0. Obliczając na podstawie wzoru (3) czasy zakończenia wykonywania zadań z podzbiorów Y oraz $X\backslash Y$, otrzymujemy:

$$C_Y = \left(1+m^k B\right)\prod_{j=1}^{v}\left(\frac{a_{[j]}}{m^k B}+1\right)-m^k B,$$

$$C_e = m^{k+2}B+(m+1)\left[\left(1+m^k B\right)\prod_{j=1}^{v}\left(\frac{a_{[j]}}{m^k B}+1\right)-m^k B\right],$$

$$C_{X\backslash Y} = \left(m^{k+2}B-m^{k+1}B-m^k B\right)\prod_{j=v+1}^{m}\left(\frac{a_{[j]}}{m^k B}+1\right)+\left(m^{k+1}B+m^k B+m+1\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{[j]}}{m^k B}+1\right)-m^k B$$

Najgorszy przypadek ze względu na czas zakończenia wykonywania zadania dodatkowego zachodzi wtedy, gdy podzbiór Y zawiera m-1 jednakowych elementów, tj. o wartościach $\frac{B}{m-1}$ (patrz (3)), natomiast podzbiór $X\backslash Y$ zawiera jeden element o wartości B. Analogicznie najgorszy przypadek ze względu na czas zakończenia wykonywania wszystkich zadań zachodzi wtedy, gdy podzbiór Y zawiera jeden element o wartości B, natomiast podzbiór $X\backslash Y$ zawiera m-1 jednakowych elementów, o wartościach $\frac{B}{m-1}$ każdy. Można pokazać, wykorzystując następujące oszacowanie $\left(\frac{1}{m^k(m-1)}+1\right)^{m-1} < \left(\frac{2}{2m^k-1}+1\right)$, że dla najgorszych przypadków czasy zakończenia wykonywania zadania dodatkowego C_e oraz ostatniego zadania z podzbioru $X\backslash Y$ są mniejsze od odpowiednich wartości pożądanych terminów zakończenia wykonywania, co oznacza, że maksymalna nieterminowość wykonania zadania jest ujemna, czyli DPS posiada rozwiązanie. □

Lemat 2. Jeżeli instancja PP nie posiada rozwiązania, wtedy skonstruowana instancja problemu DPS również nie posiada rozwiązania.

Dowód. Załóżmy, że instancja PP nie posiada rozwiązania, wtedy $\sum_{x_i \in Y} x_i \neq \sum_{x_i \in X\backslash Y} x_i$. Wystarczy rozpatrzyć dwa następujące, najkorzystniejsze z punktu widzenia przeprowadzanego dowodu przypadki, dla których problem PP nie posiada rozwiązania:

a) $\sum_{x_i \in Y} x_i = B-1$, $\sum_{x_i \in X\backslash Y} x_i = B+1$, oraz b) $\sum_{x_i \in Y} x_i = B+1$, $\sum_{x_i \in X\backslash Y} x_i = B-1$.

Z poprzedniego lematu wynika, że nawet gdy suma elementów w podzbiorze Y jest równa B, zadanie dodatkowe kończy się przed swoim pożądanym terminem zakończenia wykonywania, zatem tym bardziej zachodzi to dla przypadku a), gdy $\sum_{x_i \in Y} x_i = B - 1$. Wobec powyższego, krytyczny z punktu widzenia rozpatrywanego kryterium jest moment zakończenia wykonywania ostatniego zadania. Rozpatrzmy zatem najkorzystniejszy przypadek ze względu na czas zakończenia wykonywania ostatniego zadania. Załóżmy, że podzbiór $X\backslash Y$ zawiera tylko jedno zadanie o wartości $B+1$. Oznacza to, że tylko ostatnie zadanie jest ustawione niekorzystnie w stosunku do reguły minimalizującej kryterium C_{max}, tj. przeciwnie niż $\frac{a_i}{b_i} \le \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ [4]. Załóżmy dodatkowo, że czas zakończenia wykonywania zadań utworzonych na podstawie elementów należących do podzbioru Y jest najmniejszy (jest to przypadek, gdy $m-2$ zadań posiada najmniejsze, jednostkowe wartości, a jedno zadanie stanowi dopełnienie do $B-1$, tj. $B-m+1$) (patrz iloczyn w (3)). Wykorzystując (3), możemy wyznaczyć czasy zakończenia wykonywania zadań należących do odpowiednich podzbiorów:

$$C_Y^1 = \left(1+m^k B\right)\left(1+\frac{1}{m^k B}\right)^{m-2} - m^k B,$$

$$C_Y^2 = \left(1+m^k B + B - m + 1 + \frac{1}{m^k} + \frac{1}{m^k B} - \frac{1}{m^{k-1} B}\right)\left(1+\frac{1}{m^k B}\right)^{m-2} - m^k B,$$

gdzie C_Y^1 oraz C_Y^2 oznaczają odpowiednio czas zakończenia wykonywania $m-2$ zadań o wartościach jednostkowych oraz czas zakończenia wykonywania zadania o wartości $B-m+1$.

$$C_e = m^{k+2}B - m^{k+1}B - m^k B + (1+m)\left(m^k B + B - m + 2 + \frac{1}{m^k} + \frac{1}{m^k B} - \frac{1}{m^{k-1}B}\right)\left(1+\frac{1}{m^k B}\right)^{m-2},$$

$$C_{X\backslash Y} = B+1+\left(1+\frac{B+1}{m^3 B}\right)\left[\begin{array}{l} m^{k+2}B - m^{k+1}B - m^k B + \\ +(1+m)\left(m^k B + B - m + 2 + \frac{1}{m^k} + \frac{1}{m^k B} - \frac{1}{m^{k-1}B}\right)\left(1+\frac{1}{m^k B}\right)^{m-2} \end{array}\right].$$

Można pokazać, wykorzystując wspomniane oszacowanie $\left(\frac{1}{m^k(m-1)}+1\right)^{m-1} < \left(\frac{2}{2m^k-1}+1\right)$, że mimo rozpatrzenia najkorzystniejszego przypadku czas zakończenia wykonywania ostatniego zadania w uszeregowaniu jest większy od pożądanego terminu zakończenia jego wykonywania, co oznacza, że nieterminowość jego wykonania jest dodatnia.

W drugim przypadku, kiedy suma elementów należących do podzbioru Y jest równa $B+1$, najkorzystniejszy ze względu na czas zakończenia wykonywania zadania dodatkowego przypadek zachodzi wtedy, kiedy przed zadaniem dodatkowym wykonywane jest tylko jedno zadanie, tj.: podzbiór Y zawiera tylko jeden element. Czas zakończenia wykonywania zadania dodatkowego jest wtedy dany następującym wyrażeniem:

$$C_e = m^{k+2}B + mB + B + 2m + 2 + \frac{(m+1)(B+1)}{m^k B} = m^{k+2}B + mB + B + m + 1 + \frac{(B+1)(m+1)}{2m^k - 1} +$$
$$+ \frac{(m+1)(m^k B + 1)(2m^k - B - 1)}{m^k B(2m^k - 1)} > m^{k+2}B + mB + B + m + 1 + \frac{(B+2)(m+1)}{2m^k - 1} = d_e.$$

Powyższe przekształcenie jest prawdziwe ze względu na fakt, że $k = \frac{\ln(B+1) - \ln 2}{\ln m} + 1$, co oznacza, że wyrażenie $2m^k - B - 1$ jest dodatnie. Z powyższego przypadku wynika, że nieterminowość wykonania zadania dodatkowego jest większa od zera.

Zostało zatem pokazane, że jeżeli instancja PP nie posiada rozwiązania, instancja DPS również nie posiada rozwiązania. □

Lematy 1 oraz 2 prowadzą nas bezpośrednio do następującego twierdzenia

Twierdzenie 1. Problem DPS zdefiniowany powyżej jest NP-zupełny, nawet dla zadań z dwoma różnymi pożądanymi terminami zakończenia wykonywania.

4. Podsumowanie

W pracy zostało pokazane, że jednomaszynowy problem szeregowania zadań z liniowym modelem czasu wykonywania, składającym się z części stałej, niezależnej od momentu rozpoczęcia wykonywania oraz z części zmiennej, będącej funkcją momentu rozpoczęcia wykonywania dla kryterium minimalizacji maksymalnej nieterminowości wykonania jest NP-zupełny nawet dla zadań z dwoma różnymi pożądanymi terminami zakończenia wykonywania.

LITERATURA

1. Bachman A., Janiak A., Analiza problemów harmonogramowania z czasami wykonywania zadań w postaci funkcji momentów rozpoczęcia ich wykonywania, materiały III Konferencji z cyklu Komputerowe Systemy Wielodostępne pt.: Restrukturyzacja Systemów

Informacyjnych Przedsiębiorstw - Raporty z wdrożeń projektów celowych, Ciechocinek 1997.

2. Bachman A., Janiak A., Scheduling jobs with special type of start time dependent processing times, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, seria Preprinty nr 34/97, Wrocław 1997.
3. Garey M.R., Johnson D.S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.
4. Gawiejnowicz S., Pankowska L., Scheduling jobs with time-dependent processing times, Report 027/1995, Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University, 1995.
5. Janiak A., Dokładne i przybliżone algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów w dyskretnych procesach przemysłowych, Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Raport nr 14/91, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 1991.
6. Wajs W., Problem harmonogramowania procesów hutniczych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 1984, 29/3, 389-403.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jan Węglarz

Abstract

In the paper we considered the single machine scheduling problem for the minimizing maximum lateness criterion. Job processing times are given as a linear, nondecreasing function dependent on the processing start time, i.e. $p_j(S_j) = a_j + b_j S_j$, where a_j, b_j and S_j denote the job processing time constant part, the job processing time growth rate and the job processing starting moment respectively. For each job its due date $d_j \geq 0$ is also given. We transformed NP-complete Partition Problem (PP) to our problem under the consideration. The PP is defined as follows: given positive integers $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 2B$; does there exist a subset $Y \subset X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ such that $\sum_{i \in Y} x_i = \sum_{i \in X \setminus Y} x_i = B$? Our problem consist of $n=m+1$ jobs, where the parameters of first m jobs, constructed on the given instance of PP were described as follows:

$$d_i = \left(m^{k+2}B + mB + m + B + 1 + \frac{1}{m^k} + \frac{1}{m^{k-1}} \right)\left(1 + \frac{2}{2m^k - 1} \right) - m^k B, \quad a_i = x_i,$$

$$b_i = \frac{x_i}{m^k B}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

and the parameters of the extra job, were given as:

$$d_e = m^{k+2}B + mB + B + m + 1 + \frac{(B+2)(m+1)}{2m^k - 1}, \;\; a_e = m^{k+2}B, \;\; b_e = m.$$

The numbers y and k were given as 0 and $\frac{\ln(B+1) - \ln 2}{\ln m} + 1$ respectively. We showed that the problem under the consideration remains NP-complete even for two distinct due dates.