ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Krzysztof PIEŃKOSZ
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej

METODA ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU DYSTRYBUCYJNEGO Z WYKORZYSTANIEM RELAKSACJI LAGRANGE'A [1]

Streszczenie. W pracy jest rozważany wielotowarowy, dwustopniowy problem dystrybucyjny, w którym należy określić miejsca lokalizacji punktów dystrybucyjnych i zasięg ich odbiorców, tak aby minimalizować sumaryczne koszty transportu i dystrybucji pomiędzy producentami i klientami. Zaproponowano efektywną metodę rozwiązywania wykorzystującą relaksację Lagrange'a i strukuralne cechy problemu. Metoda ta wyznacza zazwyczaj rozwiązania suboptymalne, ale podaje też wartości dolnych oszacowań, co pozwala ocenić jakość tych rozwiązań.

A LAGRANGIAN RELAXATION METHOD FOR SOLVING A DISTRIBUTION PROBLEM

Summary. In the paper a multi-commodity two-stage distribution problem is considered in which the location of distribution centers and customers assignment is searched, so that the total distribution and transportation cost between plants and customers is minimised. An effective solution method based on Lagrangian relaxation and structural properties of the problem is proposed. It usually generates suboptimal solutions but gives lower bounds as well which allow to estimate the quality of such solutions.

1. Wprowadzenie

Rozpatrywany jest wielotowarowy, dwustopniowy system dystrybucyjny. Dwustopniowość oznacza, że klienci nie są zaopatrywani bezpośrednio przez producentów, ale za pośrednictwem punktów dystrybucyjnych (hurtowni, magazynów towarów). Ze względów organizacyjnych każdy z klientów może być obsługiwany tylko przez jeden, choć dowolnie wybrany, punkt. System dystrybucyjny jest wielotowarowy, co oznacza, że rozpatruje się w nim przepływ kilku rodzajów różnych towarów. Zdolności produkcyjne poszczególnych producentów są ograniczone i zależą od rodzaju wytwarzanych towarów. Ograniczone są również pojemności magazynów. Znane są koszty transportu pomiędzy klientami, punk-

[1] Praca wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 8T11A02411

tami dystrybucyjnymi i producentami. Koszty dystrybucji są dwojakiego rodzaju. Część z nich to tzw. koszty stałe, które zależą od tego, czy dany magazyn jest wykorzystywany do dystrybucji, czy też nie. Pozostałe koszty dystrybucji zależą proporcjonalnie od ilości rozprowadzanych towarów. Rozpatrywany w pracy problem dystrybucyjny polega na określeniu wielkości produkcji poszczególnych producentów, wytypowaniu magazynów do dystrybucji i przydzieleniu im klientów, których mają obsługiwać, tak aby spełnić wyżej wymienione ograniczenia i minimalizować sumaryczne koszty dystrybucji i transportu. Tego typu problem był rozpatrywany w pracy [5], gdzie zaproponowano skomplikowaną metodę rozwiązywania opartą na dekompozycji Bendersa.

2. Model matematyczny

Niech indeksy $l \in L$ reprezentują klientów, $i \in I$ – rodzaje towarów, $j \in J$ – producentów, a $k \in K$ – potencjalne miejsca otwarcia magazynów. Model matematyczny analizowanego problemu można sformułować w następujący sposób (por. [5]).

Problem DP

$$\min \sum_{ijkl} (c_{ijkl} + v_k) x_{ijkl} + \sum_k f_k z_k \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{kl} x_{ijkl} \leq S_{ij} \qquad \forall i, j \tag{2}$$

$$\sum_j x_{ijkl} = D_{il} y_{kl} \qquad \forall i, k, l \tag{3}$$

$$\sum_k y_{kl} = 1 \qquad \forall l \tag{4}$$

$$\sum_{ijl} x_{ijkl} \leq Q_k z_k \qquad \forall k \tag{5}$$

$$z_k \in \{0, 1\},\ y_{kl} \in \{0, 1\},\ x_{ijkl} \geq 0 \qquad \forall i, j, k, l \tag{6}$$

gdzie poszczególne parametry oznaczają:

c_{ijkl} – jednostkowy koszt przesyłu towaru i od producenta j poprzez magazyn k do odbiorcy l,

v_k – jednostowy koszt dystrybucji towarów przez magazyn k,

f_k – koszt stały związany z otwarciem magazynu w miejscu k,

D_{il} – zapotrzebowanie odbiorcy l na towar i,

Q_k – pojemność magazynu k,

S_{ij} – maksymalne zdolności produkcyjne towaru i przez producenta j.

Zmiennymi decyzyjnymi są:

x_{ijkl} – wielkość towaru i przesyłanego od producenta j poprzez magazyn k do odbiorcy l,

z_k – równe 1, jeżeli otwarto magazyn w miejscu k (0 w przeciwnym przypadku),

y_{kl} – równe 1, jeżeli magazyn k obsługuje klienta l (0 w przeciwnym przypadku).

Funkcja celu (1) wyraża dążenie do minimalizacji sumarycznych kosztow związanych z przesyłem towarów oraz otwarciem magazynów i dystrybucją. Przyjęty model kosztów przesyłu towarów w postaci czteroindeksowych współczynników c_{ijkl} jest bardzo ogólny i pozwala uwzględniać w sposób elastyczny szereg praktycznych ograniczeń, np. wymagania klientów, aby towary pochodziły tylko od wybranej grupy producentów, ewentualnie aby trasa dostaw producent-magazyn-klient nie była zbyt długa, w przypadku gdy od tego zależy jakość dostarczanych towarów itp. Ograniczenie (2) określa maksymalne zdolności produkcyjne poszczególnych producentów. Ograniczenia (3) i (4) zapewniają spełnienie zapotrzebowań klientów i to w taki sposób, że każdy klient będzie w całości obsłużony przez dokładnie jeden magazyn. Nierówności (5) wyrażają ograniczenia na przepustowość (pojemność) magazynów.

Rozpatrywany problem jest $\mathcal{NP}$-trudny i ma bardzo złożoną strukturę. Nawet znacznie uproszczone, szczególne przypadki tego problemu okazują się być zadaniami $\mathcal{NP}$-trudnymi. W szczególności, takim problemem jest *Dyskretny Problem Lokalizacyjny* [8], w którym rozważana jest dystrybucja tylko jednego rodzaju towaru i pomija się warstwę producentów.

3. Schemat rozwiązywania

Proponowane w pracy podejście do rozwiązywania problemu DP opiera się na relaksacji Lagrange'a [4]. Dzięki zastosowaniu relaksacji Lagrange'a i analizie struktury ograniczeń ten złożony problem decyzyjny jest dekomponowany na szereg prostszych zadań plecakowych oraz transportowych. W wyniku rozwiązania zadania zrelaksowanego uzyskuje się dolne oszacowanie dla problemu dystrybucyjnego oraz dobry punkt startowy do poszukiwania rozwiązań przybliżonych. Są one wyznaczane przez algorytm heurystyczny, który modyfikuje rozwiązania zadań zrelaksowanych w suboptymalne rozwiązania problemu pierwotnego. Wybór najlepszych wartości mnożników Lagrange'a dokonywany jest za pomocą metody subgradientowej [6]. W poniższych punktach zostaną szczegółowo opisane najbardziej istotne elementy algorytmu, tzn. sposób konstrukcji i rozwiązywania relaksacji problemu DP oraz metoda wyznaczania jak najlepszego rozwiązania dopuszczalnego na podstawie rozwiązania problemu zrelaksowanego.

3.1. Relaksacja Lagrange'a

Aby uzyskać jak najsilniejszą relaksację warto wprowadzić do modelu problemu DP następujące dodatkowe ograniczenie.

$$\sum_k Q_k z_k \geq \sum_{il} D_{il} \tag{7}$$

Ograniczenie to jest redundancyjne w pierwotnym problemie DP, gdyż wynika z ograniczeń (3), (4) i (5). Jednak, jak pokazano w [2, 8], dodanie takiego zagregowanego ograniczenia na sumaryczną pojemność otwartych magazynów prowadzi do znacznie lepszych relaksacji w przypadku *Problemów Lokalizacyjnych*, które są ściśle związane z problemem rozpatrywanym w pracy. W rezultacie, w dalszej części pracy będziemy rozważać następujący równoważny model problemu dystrybucyjnego.

Problem DP^*

min (1) przy ograniczeniach (2),(3),(4),(5),(6) i (7).

Wprowadzając ograniczenia (2) i (4) do funkcji celu z mnożnikami Lagrange'a odpowiednio λ i μ, otrzymujemy przy $\lambda \geq 0$ następującą relaksację problemu DP^*.

Problem LR

$$L(\lambda,\mu) = \min_{x,y,z} \sum_{ijkl} (c_{ijkl} + v_k + \lambda_{ij}) x_{ijkl} - \sum_l \mu_l y_{kl} + \sum_k f_k z_k - \sum_{ij} \lambda_{ij} S_{ij} + \sum_l \mu_l \tag{8}$$

przy ograniczeniach (3), (5), (6) i (7).

Nawet po relaksacji i przy ustalonych wartościach mnożników λ i μ, problem LR może wydawać się nadal trudny do rozwiązania. Analizując jednak dokładnie strukturę tego zadania, można zauważyć, że proces optymalizacji względem zmiennych x, y i z można zdekomponować i przeprowadzać niezależnie.

Po pierwsze, model zrelaksowany LR można uprościć, jeżeli wykorzysta się zależności (3) do eliminacji zmiennych x z ograniczeń (5) i funkcji celu (8). Przy zmiennych x spełniających (3) i braku górnych ograniczeń na zdolności produkcyjne producentów w zadaniu zrelaksowanym LR, zachodzi równość

$$\min_x \sum_{ijkl} (c_{ijkl}+v_k+\lambda_{ij}) x_{ijkl} = \min_x \sum_{ijkl} \min_j (c_{ijkl}+v_k+\lambda_{ij}) x_{ijkl} = \sum_{ikl} \min_j (c_{ijkl}+v_k+\lambda_{ij}) D_{il} y_{kl}$$

Przyjmując oznaczenia $\beta_{kl} = \sum_i \min_j(c_{ijkl} + v_k + \lambda_{ij})D_{il}$ oraz $\Delta_l = \sum_i D_{il}$ problem zrelaksowany LR można więc zapisać w następującej równoważnej postaci.

Problem LR^*

$$L(\lambda,\mu) = \min_{y,z} \sum_{kl}(\beta_{kl} - \mu_l)y_{kl} + \sum_k f_k z_k - \sum_{ij} \lambda_{ij} S_{ij} + \sum_l \mu_l \tag{9}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_l \Delta_l y_{kl} \leq Q_k z_k \qquad \forall k \tag{10}$$

$$\sum_k Q_k z_k \geq \sum_l \Delta_l \tag{11}$$

$$y_{kl} \in \{0,1\},\ z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k,l \tag{12}$$

Przy ustalonych wartościach λ i μ problem RL^* może być dalej zdekomponowany na $|K|+1$ problemy plecakowe (patrz [4, 8]), przy czym $|K|$ podproblemów odpowiada każdemu z magazynów – charakteryzujących się ograniczeniem (10) oraz dodatkowo jeden podproblem jest związany z zagregownym ograniczeniem (11). W rezultacie rozwiązanie problemu zrelaksowanego LR możemy wyznaczyć rozwiązując po kolei następujące podproblemy plecakowe.

Problem $KP_k, k \in K$

$$\gamma_k = \min_y \sum_l (\beta_{kl} - \mu_l)y_{kl} + f_k \tag{13}$$

$$\sum_l \Delta_l y_{kl} \leq Q_k \tag{14}$$

$$y_{kl} \in \{0,1\} \qquad \forall l \tag{15}$$

Problem KPA

$$L(\lambda,\mu) = \min_z \sum_k \gamma_k z_k - \sum_{ij} \lambda_{ij} S_{ij} + \sum_l \mu_l \tag{16}$$

$$\sum_k Q_k z_k \geq \sum_l \Delta_l \tag{17}$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k \tag{18}$$

Rozwiązanie problemu plecakowego KPA określa, które magazyny powinny być otwarte. Dla nich $z_k = 1$. Z kolei, rozwiązania podproblemów KP_k określają przydział klientów obsługiwanych przez poszczególne punkty dystrybucyjne. Oczywiście przyjmujemy $y_{kl} = 0$, jeżeli $z_k = 0$. Wartości zmiennych x dla problemu zrelaksowanego LR^* można wyliczyć według formuły: $x_{ijkl} = D_{il}y_{kl}$, jeżeli $j = argmin_{j'}(c_{ij'kl} + v_k + \lambda_{ij'})$ oraz $x_{ijkl} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Aby otrzymać jak najsilniejszą relaksację – dającą jak najlepsze oszacowania, funkcja $L(\lambda, \mu)$ powinna być maksymalizowana względem mnożników $\lambda \geq 0$ i μ. W naszym podejściu zastosowaliśmy do tego celu metodę subgradientową [6], która dokonuje maksymalizacji w sposób iteracyjny, modyfikując w każdym kroku wartości mnożników na podstawie aktualnych rozwiązań problemu zrelaksowanego. W rezultacie, problemy plecakowe KP_k i KPA są rozwiązywane wielokrotnie dla zmieniających się w kolejnych iteracjach wartości mnożników λ i μ. Ponieważ jednak dla praktycznych zestawów danych problemy plecakowe rozwiązywane są dość efektywnie, nie powoduje to nadmiernego nakładu obliczeń.

3.2. Poszukiwanie dobrych rozwiązań dopuszczalnych

Rozwiązanie problemu zrelaksowanego niestety zwykle nie jest dopuszczalne dla problemu pierwotnego i może nie spełniać niektórych ograniczeń (2) lub (4). Okazuje się jednak, że w wielu przypadkach nieznaczna modyfikacja takiego rozwiązania wystarcza, aby uczynić je dobrym rozwiązaniem dopuszczalnym. Poniżej proponowany jest heurystyczny algorytm modyfikacji, który najpierw ustala wartości zmiennych z, potem dopuszczalne wartości zmiennych y i na końcu zmiennych x.

Wartości zmiennych z są przyjmowane bez zmian z rozwiązania problemu zrelaksowanego. Określają one, które magazyny będą otwarte, a które zamknięte.

Z rozwiązania problemu zrelaksowanego są też przyjmowane wartości zmiennych y_{kl} dla tych klientów l, dla których zachodzi równość (4) oznaczająca przydział do dokładnie jednego magazynu. Jeżeli zachodzi to dla wszystkich klientów, to przepływy towarów x można wyznaczyć poprzez rozwiązanie następującego podproblemu.

Problem TP

$$\min \sum_{ij} \left(\sum_{kl \in Y_1} (c_{ijkl} + v_k) x_{ijkl} \right) \tag{19}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{kl} x_{ijkl} \leq S_{ij} \quad \forall i, j \tag{20}$$

$$\sum_{j} x_{ijkl} = D_{il} \quad \forall i, kl \in Y_1 \tag{21}$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \quad \forall i, j, k, l \tag{22}$$

gdzie Y_1 oznacza zbiór par indeksów k i l, dla których $y_{kl} = 1$. Jak można zauważyć, powyższy problem można zdekomponować na $|I|$ podproblemów transportowych, z których każdy odpowiada odrębnemu rodzajowi towaru i.

Gdy ograniczenia (4) nie są spełnione dla części klientów, to są oni przydzialani do otwartych magazynów zgodnie z następującym trzyfazowym algorytem heurystycznym.

- *Faza 1 – zachłanny algorytm przydziału.*

  Procedura jest oparta na heurystyce MTHG zapropowanej dla *Uogólnionego Zadania Przydziału* [7]. Spośród klientów pozostających do przydziału rozpatruje się w pierwszej kolejności tego o największym priorytecie mierzonym jako

  $$p(l) = \beta_{k_2,l} - \beta_{k_1,l}$$

  gdzie k_1 i k_2 są indeksami magazynów dopuszczalnych do przydziału, dla których wartość kosztów zredukowanych β_{kl} jest odpowiednio najmniejsza i druga co do wielkości. Wybranego klienta przydziela się do magazynu k_1 (priorytet $p(l)$ stanowi oszacowanie, ile można stracić dokonując innego przydziału).

  W momencie gdy pewnego klienta nie można nigdzie przydzielić bez przekroczenia pojemności magazynów, przypisuje się go tymczasowo tam, gdzie powoduje to najmniejsze przeciążenie.

- *Faza 2 – przywrócenie dopuszczalności*

  Faza ta jest wykonywana tylko wówczas, gdy uzyskane w pierwszej fazie rozwiązanie jest niedopuszczalne ze względu na przekroczenie pojemności magazynów. Aby uczynić je dopuszczalnym, dokonuje się w sposób iteracyjny prostych przemieszczeń polegających albo na *zmianie* przydziału kilenta do innego magazynu, albo na *wymianie* przydziału dwóch klientów pomiędzy różnymi magazynami. W każdym kroku realizowane jest takie przemieszczenie, które powoduje największe zmniejszenie sumarycznej niedopuszczalności.

- *Faza 3 – poprawa rozwiązania*

  Faza ta ma na celu poprawę uzyskanego dopuszczalnego rozwiązania. Polega również na iteracyjnym przemieszczaniu klientów podobnie jak w fazie 2, ale zawsze z zachowaniem ograniczeń na pojemność magazynów. W każdym kroku realizowane jest takie przemieszczenie, które powoduje największy spadek wartości funkcji celu (1).

Ocena poszczególnych przemieszczeń wymaga więc rozwiązywania problemu transportowego TP.

Mimo że powyższy algorytm nie gwarantuje dopuszczalności rozwiązań, to eksperymenty obliczeniowe pokazają, że w większości przypadków daje dobre rozwiązania dopuszczalne.

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony w pracy algorytm został zaimplementowany w języku PASCAL. Do rozwiązywania zadań plecakowych KP_k i KPA zastosowano algorytm *Martello* i *Totha* [7]. Przeprowadzono szereg eksperymentów obliczeniowywch, które wskazują na dużą efektywność i dokładność zaproponowanej metody. Nie było możliwości bezpośredniego porównania metody z podejściem przedstawionym w pracy [5] ze względu na brak danych liczbowych do zadania tam analizowanego. Porównano natomiast efektywność algorytmu na badanych w literaturze przykładach testowych *Dyskretnego Problemu Lokalizacyjnego* będącego szczególnym przypadkiem rozpatrywanego problemu dystrybucyjnego. W tablicy 1 przedstawiono wyniki eksperymentów obliczeniowych dla 33 zadań rozpatrywanych w pracach [1, 3]. Uzyskane rozwiązania porównano z oszacowaniem dolnym oraz z najlepszymi dotychczas znanymi wynikami uzyskanymi za pomocą różnorodnych podejść, w tym dekompozycji Lagrange'a [1] oraz metaheurystyk: algorytmu ewolucyjnego, procedury GRASP, symulowanego wyżarzania i przeszukiwania Tabu [3].

Z tablicy 1 wynika, że w kilku przypadkach udało się znaleźć lepsze rozwiązania przy bardzo umiarkowanym czasie obliczeń (na 133 MHz PC). Dodatkową istotną zaletą proponowanej metody, ważną z praktycznego punktu widzenia, jest fakt, że wraz z rozwiązaniami podaje też dolne oszacowania, co pozwala ocenić jakość wyników.

Tablica 1

Wyniki dla zadań testowych Dyskretnego Problemu Lokalizacyjnego

Zad.	Rozmiar $\|K\| \times \|L\|$	Uzyskany wynik	Dolne oszacow.	Odstęp od oszacow.	Czas[s]	Poprzedni wynik	Odstęp od poprzedn.
P1	10×20	2014	1979.14	1.76%	27.32	2014	0.00%
P2		4251	4232.52	0.44%	23.34	4251	0.00%
P3		6051	6050.07	0.02%	17.86	6051	0.00%
P4		7168	7124.81	0.61%	21.41	7168	0.00%
P5		4551	4524.53	0.59%	23.01	4551	0.00%
P6		2269	2262.55	0.29%	21.73	2269	0.00%
P7	15 × 30	4385	4290.55	2.20%	43.24	4372	0.30%
P8		7933	7918.32	0.19%	46.32	7943	-0.13%
P9		2480	2460.56	0.79%	55.92	2486	-0.24%
P10		23112	23096.51	0.07%	43.42	23112	0.00%
P11		3447	3439.33	0.22%	49.13	3463	-0.46%
P12		3721	3688.24	0.89%	46.16	3711	0.27%
P13		3773	3724.63	1.30%	36.38	3760	0.35%
P14		5984	5917.59	1.12%	47.99	5970	0.23%
P15		7828	7793.58	0.44%	35.07	7816	0.15%
P16		11543	11520.17	0.20%	38.97	11543	0.00%
P17		9884	9858.89	0.25%	45.84	9895	-0.11%
P18	20×40	15607	15606.33	0.00%	69.36	15616	-0.06%
P19		18683	18670.49	0.07%	68.23	18683	0.00%
P20		26574	26544.43	0.11%	87.29	26593	-0.07%
P21		7367	7271.13	1.32%	91.75	7318	0.67%
P22		3274	3245.95	0.86%	72.03	3271	0.09%
P23		6042	6030.44	0.19%	70.94	6036	0.10%
P24		6327	6320.02	0.11%	70.09	6327	0.00%
P25		8947	8947.00	0.00%	45.62	8947	0.00%
P26	20×50	4463	4435.21	0.63%	127.66	4467	-0.09%
P27		10953	10909.16	0.40%	78.35	10921	0.29%
P28		11117	11105.93	0.10%	108.15	11117	0.00%
P29		9832	9820.29	0.12%	93.58	9832	0.00%
P30		10917	10771.24	1.35%	108.41	10939	-0.2%
P31		4466	4454.42	0.26%	103.63	4484	-0.4%
P32		9881	9876.96	0.04%	69.54	9881	0.00%
P33		39631	39405.25	0.57%	96.54	39578	0.13%

LITERATURA

1. Barcelo J., Fernandez E., Jörnsten K.O.: Computational Results from a New Lagrangean Relaxation Algorithm for the Capacitated Plant Location Problems with Single Sourcing. *European Journal of Operational Research* 53, 1991, 38-45.
2. Cornuejols G., Sridharan R., Thizy J.M.: A Comparison of Heuristics and Relaxations for the Capacitated Plant Location Problem. *European Journal of Operational Research* 50, 1991, 280–297.
3. Delmaire D., Diaz J.A., Fernandez E., Ortega M.: Comparing New Heuristics for the Pure Integer Capacitated Plant Location Problem. referat *2nd Metaheuristics International Conference*, Nicea, Francja, 1997.

4. Geoffrion A.M.: Lagrangian Relaxation and its Uses in Integer Programming. *Mathematical Programming Study* 2, 1974, 82-114.
5. Geoffrion A.M., Graves G.W: Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition. *Management Science* 20, 1974, 822-844.
6. Held M., Wolfe P., Crowder H.P.: Validation of Subgradient Optimization. *Mathematical Programming* 6, 1974, 62-66.
7. Martello S., Toth P.: *Knapsack Problems*. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
8. Sridharan R.: A Lagrangian Heuristic for the Capacitated Plant Location Problem with Single Source Constraints. *European Journal of Operational Research* 66, 1993, 305-312.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Zbigniew Banaszak

Abstract

A two-stage distribution planning problem is addressed. Customers are to be served with different commodities from a number of plants, through some intermediate distribution centres (DCs). Each customer must be served with all the products it requires from a single distribution centre. The possible locations for the DCs are given. For each location, there is an associated fixed cost for opening the DC concerned, as well as operating cost and a maximum capacity. The demand of each customer for each commodity is known. The plant to customer transportation costs of each commodity are explicitly dependent on the intermediate DC used to distribute the commodity. The objective is to choose the locations for opening DCs such that the total fixed, operating and transportation costs are minimised. The problem is modelled as a mixed-integer programming problem and solved by a Lagrangian heuristic. The solution of the problem is computed with subgradient optimisation of a relaxed problem and a heuristic modifying relaxed solution into a feasible one. Lagrangian relaxation exploits structural properties of the problem and is decomposed into knapsack problems.