ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: ENERGETYKA z. 21 Nr kol. 156

JÓZEF ROZEWICZ
Katedra Cieplnych Maszyn Wirnikowych

PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ USTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA METODĄ MONTE CARLO

Streszczenie. W artykule omówiono zasady rozwiązywania zagadnienia Dirichleta metodą Monte Carlo. Podano model probabilistyczny zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła przy izotermicznych warunkach brzegowych. Zaproponowano oryginalny model odpowiadający zagadnieniu ustalonego przewodzenia ciepła przy adiatermicznych warunkach na części brzegu obszaru. Opisano zastosowanie modeli do rozwiązywania określonych zagadnień na elektronowych maszynach cyfrowych.

Wstęp

Wykorzystanie metod Monte Carlo w rozwiązywaniu problemów inżynierskich koncentruje się obecnie głównie na zagadnieniach związanych bezpośrednio z pobieraniem prób losowych. Mniej uwagi poświęca się stosowaniu tych metod w rozwiązywaniu zagadnień w istocie swojej w zupełności nie posiadających charakteru stochastycznego.

Istnieje szereg zjawisk fizycznych, dla których można zbudować sztuczny model stochastyczny. Analiza rozkładu parametrów modelu pozwala określić przebieg realnego zjawiska. Ściśle zdeterminowane zjawiska fizyczne, opisywane równaniami różniczkowymi lub całkowymi, mogą być badane przy pomocy odpowiadającego im modelu stochastycznego. Przybliżone liczbowe rozwiązanie problemu uzyskuje się przez określenie rozkładu prawdopodobieństw parametrów modelu.

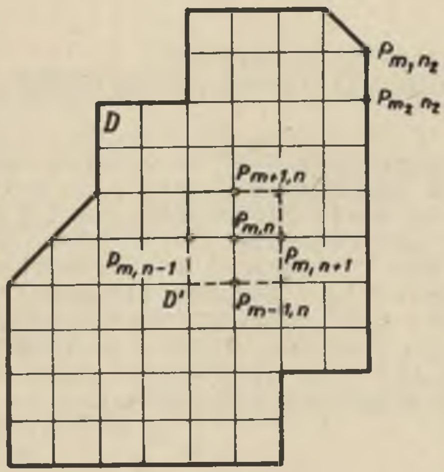
Ten zakres zastosowań metod Monte Carlo można wyodrębnić jako metodę analogii probabilistycznej. W wielu przypadkach tą drogą można znaleźć przybliżone rozwiązanie zagadnienia sposobem dogodniejszym niż przy użyciu innych metod numerycznych.

1. Model probabilistyczny zagadnienia z izotermicznymi granicami

Zagadnienie dwuwymiarowego ustalonego przewodzenia ciepła w izotropowych ciałach stałych sprowadza się, jak wiadomo, do poszukiwania funkcji $t(x,y)$ spełniającej równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

w danym obszarze D, przy określonych warunkach brzegowych. W przypadku stałej temperatury punktów położonych na brzegu obszaru, problem sprowadza się do pierwszego zagadnienia brzegowego – Dirichleta.



Rys. 1. Obszar siatkowy składający się z kwadratów i półkwadratów

Rozpatrzymy pokazany na rys. 1 obszar D, który można podzielić na skończoną całkowitą liczbę kwadratów i półkwadratów[x] o boku h. Punkty położone w węzłach siatki wewnątrz obszaru oznaczymy $P_{m,n}$, a na brzegu – $P_{mi,ni}$. Punktom tym przyporządkujemy odpowiednio temperatury $t_{m,n}$.

Zastępując w równaniu Laplace'a pochodne cząstkowe różnicami skończonymi

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{m,n} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{h} - \frac{t_{m,n} - t_{m-1,n}}{h}\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_{m,n} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{h} - \frac{t_{m,n} - t_{m,n-1}}{h}\right] \tag{2}$$

[x] Przez "półkwadrat" należy rozumieć trójkąt równoramienny stanowiący połowę kwadratu, a uzyskany przez podział kwadratu przy pomocy przekątnej.

otrzymujemy po przekształceniach algebraicznych

$$t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n-1} + t_{m,n+1} - 4\, t_{m,n} = 0 \qquad (3)$$

skąd

$$t_{m,n} = \frac{1}{4}\left(t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m-1,n} + t_{m+1,n}\right) \qquad (3a)$$

Warunki brzegowe określają związki

$$t_{mi,ni} = t_i \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (4)$$

Modelem probabilistycznym dwuwymiarowego zagadnienia Dirichleta jest tzw. ruch błędny na płaszczyźnie [1, 5]. Cząsteczka znajdująca się chwilowo w punkcie $P_{m,n}$ przechodzi w elementarnym ruchu do jednego z sąsiednich punktów $P_{m+1,n}$, $P_{m,n+1}$, $P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$. Prawodpodobieństwo przejścia do każdego z tych punktów jest jednakowe i wynosi 1/4. W serii złożonej z s ruchów, cząsteczka będzie kolejno przemieszczać się po węzłach siatki i z prawodpodobieństwem równym 1 osiągnie brzeg obszaru.

Powtarzając analogiczne serie ruchów σ_k razy, można zauważyć, że cząsteczka wychodząc z punktu $P_{m,n}$ osiągnie k_n razy punkt $P_{m1,n1}$, k_2 razy punkt $P_{m2,n2}$, ..., k_r razy punkt $P_{mr,nr}$.

Przy czym

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = \sigma_k \qquad (5)$$

Jeżeli punktom $P_{mi,ni}$ są przyporządkowane wartości funkcji t_i wg wzoru (4), to oczekiwana wartość końcowa ruchów rozpoczynających się w P_{mn} wyniesie

$$t_{m,n} = \frac{\sum_{i+1}^{r} k_i t_i}{\sigma_k} \qquad (6)$$

Jeżeli z obszaru D wydzielimy podobszar D' (rys.1) to punkty $P_{m+1,n}$, $P_{m,n+1}$, $P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$ będą położone na brzegu podobszaru. Ponieważ prawdopodobieństwo osiągnięcia przez cząsteczkę każdego z punktów sąsiednich jest jednakowe to dla serii σ_k ruchów

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \frac{1}{4}\sigma_k \tag{7}$$

Dla tego przypadku z równania (6) otrzymujemy

$$t_{m,n} = \frac{1}{4}(t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m-1,n} + t_{m,n-1}) \tag{8}$$

Wzór powyższy jest ważny dla dowolnego punktu $P_{m,n}$ z wnętrza obszaru siatkowego D.

Równanie (8) i (3a) są identyczne. Zatem funkcja określona w obszarze D równaniem (6) spełnia równanie różnicowe (3) oraz warunek brzegowy (4).

Dokładność rozwiązania zależy od wielkości h określającej bok kwadratu siatki podziału oraz od liczby σ_k serii ruchów błędnych na płaszczyźnie. Zależność błędu od h jest taka sama jak w metodach różnicowych (por. np. [3]). Błąd zależny od σ_k można oszacować przy pomocy wzoru [5]:

$$\varepsilon < \frac{3\max(t_1)}{\sqrt{\sigma_k}} \tag{9}$$

Opisany model dotyczył przypadku obszaru, który można podzielić na skończoną liczbę całkowitych podobszarów kwadratowych i półkwadratowych. Obszar dowolny można podobnie jak w metodach różnicowych aproksymować obszarem siatkowym, z równoczesną aproksymacją warunków brzegowych [2]. Rozwiązanie będzie w tym przypadku obarczone dodatkowym błędem.

2. Realizacja modelu zagadnienia z granicami izotermicznymi na maszynie cyfrowej

Rozpatrzymy przykładowo rozwiązanie zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła, bez źródeł wewnętrznych z izotermicznymi warunkami brzegowymi, dla obszaru D_1 pokazanego na rys. 2x). (Podobne zagadnienie rozpatrywano w [4] metodami graficznymi i analogii hydrodynamicznej).

x) W zastosowaniach praktycznych warunki izotermiczne aproksymują warunki trzeciego zagadnienia brzegowego przy dużej liczbie Biota.

Na brzegu AD określona jest stała temperatura t_1, na brzegu AB - temperatura t_2, BC-t_3, CD-t_4. Na brzegu wewnętrznym określone są podobne warunki. Na brzeg FG - temperatura t_5, HI-t_7, z włączeniem do tych brzegów punktów F, G, H, J; na brzegu GH-t_6, IF-t_8. W punktach F, G, H, J funkcja t(x,y) może być nieciągła. Również punkty A, B, C, D są punktami nieciągłości funkcji t(x,y) albowiem, np. dla punktu A

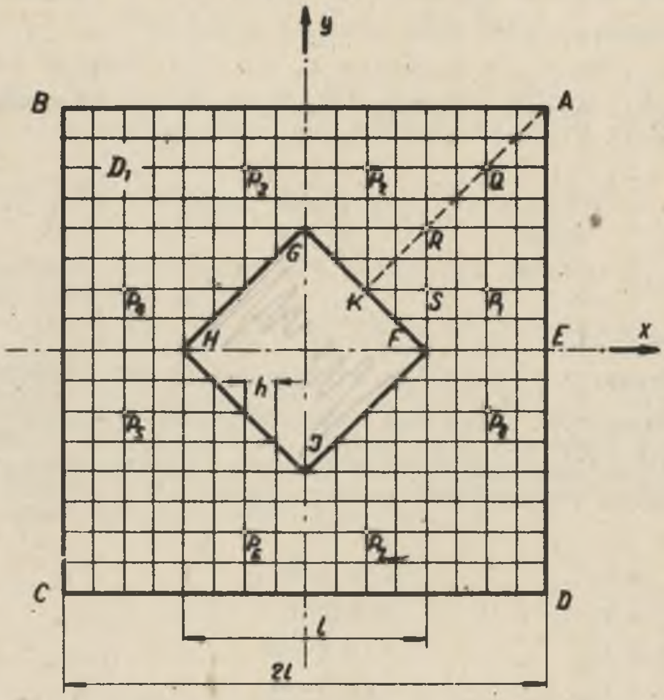
$$\lim_{\substack{x=m \\ y\to m}} t(x,y) \neq \lim_{\substack{x\to m \\ y=m}} t(x,y)$$

jeżeli $t_1 \neq t_2$.

Dany obszar D_1 dzielimy siatką kwadratów i półkwadratów o boku h=l/m, gdzie m=2n - liczba naturalna parzysta. Przyjmując początek prostokątnego układu współrzędnych w środku obszaru oraz za jednostkę układu odcinek o długości h, można warunki brzegowe sformułować następująco:

$$\begin{aligned}
t(x,y) &= t_1 && \text{dla } x=m, \\
t(x,y) &= t_2 && \text{dla } y=m \\
t(x,y) &= t_3 && \text{dla } x=-m \\
t(x,y) &= t_4 && \text{dla } y=-m \\
t(x,y) &= t_5 && \text{dla } x+y=n \text{ i } xy \geq 0, \\
t(x,y) &= t_6 && \text{dla } x-y=-n \text{ i } xy < 0, \\
t(x,y) &= t_7 && \text{dla } x+y=-n \text{ i } xy \geq 0, \\
t(x,y) &= t_8 && \text{dla } x-y=n \text{ i } xy < 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Dla obszaru D_1 określono algorytm modelujący ruchy błędne cząsteczki. Założono otrzymywanie z generatora, liczb losowych L z przedziału, [0,1). W przypadku pojawienia się liczby losowej z przedziału [0, 1/4), cząsteczka przesuwa się z punktu (x,y) w kierunku dodatnim osi x, tj. do punktu (x+1,y). Analogicznie pojawienie się liczb losowych z przedziałów [1/4, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 1) powoduje przesunięcie się cząsteczki odpowiednio do punktów (x,y+1), (x-1,y), (x,y-1). Po osiągnięciu przez cząsteczkę brzegu zostaje zarejestrowane pochłonięcie cząsteczki przez określony brzeg.



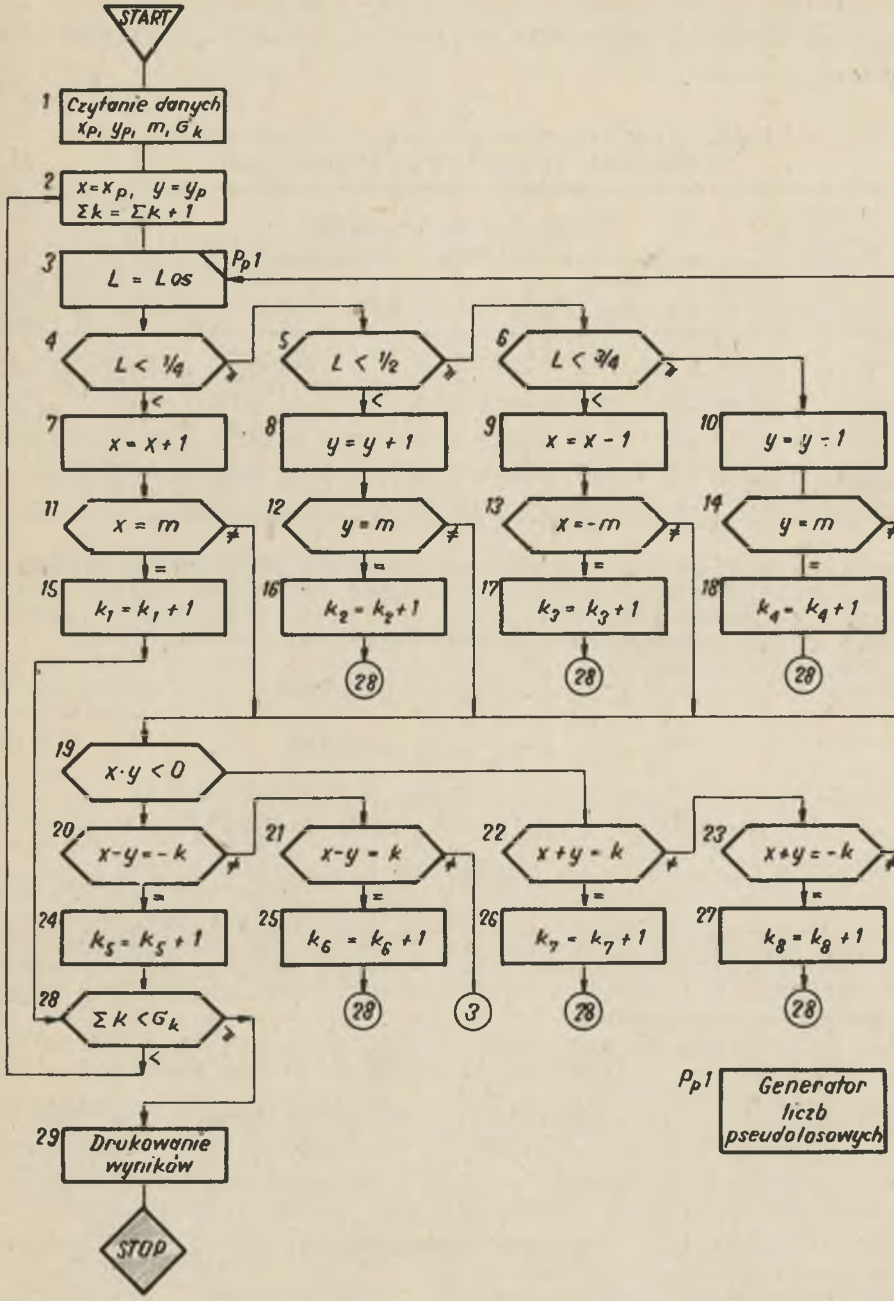
Rys. 2. Obszar przykładu zagadnienia z izotermicznymi warunkami brzegowymi

Na podstawie algorytmu ułożono program dla maszyny cyfrowej. Sieć działań pokazano na rys. 3. Program przewiduje przeprowadzenie dowolnej liczby σ_k serii ruchów błędnych. W rezultacie obliczeń wyznaczane są liczby $k_1, k_2\ldots,$ określające ilość serii ruchów błędnych rozpoczynających się w punkcie $P(x_p, y_p)$, a kończących się na poszczególnych brzegach obszaru.

Wartość liczbową temperatury w badanym punkcie określić należy ze wzoru:

$$t_{mn} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} k_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^{8} k_i} \tag{11}$$

przy czym $\sum\limits_{i=1}^{8} k_i = \sigma_k .$



Rys. 3. Schemat blokowy algorytmu rozwiązania przykładu zagadnienia z izotermicznymi warunkami brzegowymi

W tablicy 1 podano przykładowo wyniki obliczeń wartości k_1, według opisanego programu dla 4 punktów obszaru pokazanego na rys. 2.

Tablica 1

Wyniki obliczeń przykładu zagadnienia z izotermicznymi warunkami brzegowymi (fragmenty)

Punkt	Współrzędne		Osiągnięcia brzegów								Ilość prób	Temperatura $t(x_p,y_p)$ Warunki	
	x_p	y_p	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8		12,a	12,b
P_1	6	2	576	62	0	7	325	1	0	29	1000	85,50	97,03
Q	6	2	427	436	0	0	136	0	0	1	1000	63,70	66,26
R	4	4	268	245	1	3	468	5	1	9	1000	98,30	119,52
S	4	2	205	72	0	5	703	0	0	15	1000	121,80	155,45

Uzyskane wyniki umożliwiają wyznaczenie temperatur w analizowanych punktach przy różnych liczbowo warunkach typu (10). W tablicy 1 podano również wyniki obliczeń temperatur według (11) dla dwóch przypadków warunków brzegowych:

(i)
$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 50^\circ C$$
$$t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = 150^\circ C \qquad (12,a)$$

(ii)
$$t_1 = 40^\circ C,\quad t_2 = 50^\circ C,\quad t_3 = 60^\circ C,\quad t_4 = 70^\circ C$$
$$t_5 = 200^\circ C,\quad t_6 = 180^\circ C,\quad t_7 = 160^\circ C,\quad t_8 = 180^\circ C \qquad (12,b)$$

Ze względu na symetrię geometryczną obszaru obliczenia rozkładu prawdopodobieństw wystarczy wykonać tylko dla punktów z 1/8 obszaru, np. AKFEA i to niezależnie od ewentualnej symetrii warunków brzegowych.

Przy symetrycznych warunkach na brzegach jak np. (12a) wartość liczbowa t_{mn} uzyskana ze wzoru (11) dla punktu P_1, będzie oczywiście równa wartościom temperatur t_{mn} w punktach P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 i P_8, które są symetrycznie położone. Jednak nawet przy asymetrii warunków brzegowych, jak np. (12b) obliczone dla punktu P_1 wartości k_1 można transponować, na zasadzie oczekiwanego rozkładu prawdopodobieństw, dla punktów symetrycznie położonych.

Tak np. z obliczonych dla punktu P_1 wartości k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{41}, k_{51}, k_{61}, k_{71}, k_{81} można określić dla punktu P_2, wartości k_{12}, k_{22}, k_{32}, k_{42}, k_{52}, k_{62}, k_{72}, k_{82}.

Prawdopodobieństwo osiągnięcia w serii ruchów błędnych rozpoczynającej się w P_2 brzegu AD, jest równe prawdopodobieństwu osiągnięcia brzegu AB dla serii ruchów błędnych rozpoczynającej się w P_1.

Stąd
$$k_{12} = k_{21} \tag{13}$$

Analogicznie można otrzymać związki

$$\begin{gathered} k_{22} = k_{11}; \quad k_{32} = k_{41}; \quad k_{42} = k_{31}; \quad k_{52} = k_{51}; \\ k_{62} = k_{81}; \quad k_{72} = k_{71}; \quad k_{82} = k_{61}. \end{gathered} \tag{13,a}$$

Podobne zasady transpozycji wartości k_i obowiązują dla pozostałych symetrycznie położonych punktów:

P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8.

Ponieważ konkretne warunki brzegowe są podstawiane dopiero do wzoru (11), raz przeprowadzone obliczenia na maszynie cyfrowej można wykorzystać dla wszystkich geometrycznie podobnych obszarów.

3. Model probabilistyczny zagadnienia z granicami adiatermicznymi

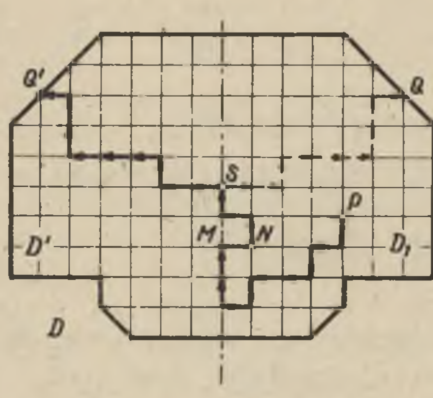
Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła przy adiatermicznym warunku na części brzegu obszaru jest szczególnym przypadkiem drugiego zagadnienia brzegowego - Neumana.

Na części brzegu obszaru zamiast warunku -(4) zachodzi

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0. \tag{14}$$

Celem zbudowania modelu probabilistycznego dla tego zagadnienia, skorzystamy z modelu zagadnienia Dirichleta dla obszaru symetrycznego. Zakładamy przy tym symetrię geometryczną oraz symetrię warunków brzegowych. Rozpatrzmy obszar D pokazany na rys. 4. Obszar jest symetryczny względem osi y, która go dzieli na podobszary D' i D_1. Dowolną serię ruchów błędnych rozpoczynającą się w punkcie należącym do obszaru D' i kończącą na brzegu obszaru D_1 można zastąpić równoważną serią ruchów kończących się na brzegu obszaru D'.

Pokazaną na rys. 4 część serii ruchów rozpoczynających się w punkcie P i kończących się w punkcie Q', można na trasie SQ' zastąpić serią na trasie symetrycznej SQ. Ze względu na



Rys. 4. Przebieg jednej serii ruchów błędnych w symetrycznym obszarze siatkowym

założoną symetrię warunków brzegowych punktom Q' i Q, przyporządkowana jest jednakowa wartość t_1. Zatem seria ruchów na trasie PSQ jest równoważna serii na trasie PSQ', co pozwala modelować ruchy wyłącznie w obszarze D_1.

W tym celu w wypadku przekroczenia granicy obszaru D_1 na linii symetrii, należy zmienić kierunek przemieszczania cząsteczki po linii poziomej. Jeżeli przed przekroczeniem linii symetrii pojawieniu się liczby losowej z przedziału [0, 1/4) odpowiadało przemieszczanie cząsteczki w kierunku dodatnim osi x, to po przekroczeniu tej linii odpowiadać będzie przesunięcie w kierunku ujemnym. Podobnie, pojawienie się liczby z przedziału [1/2, 3/4), będzie wtedy powodować ruch w kierunku dodatnim. Analogiczna zmiana kierunków ruchu następować winna przy każdym przekroczeniu linii symetrii. Ruch cząsteczki według schematu rys. 5a, zostaje zastąpiony ruchem według schematu rys. 5b lub odwrotnie. Sygnałem zmiany kierunku winien być dopiero zamiar przekroczenia linii symetrii, albowiem cząsteczka może z tej linii samodzielnie losowo powrócić do obszaru D_1 (np. ruch MN).

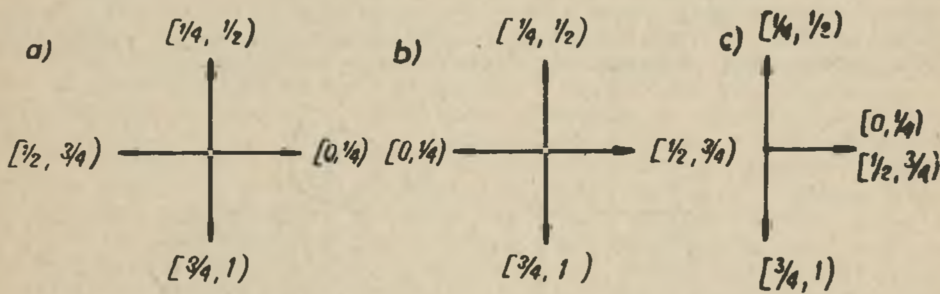
Zastosowanie opisanego sposobu zmiany kierunku do rozwiązywania symetrycznego zagadnienia Dirichleta nie jest celowe albowiem nie powoduje ani uproszczenia, ani skrócenia czasu obliczeń. Model ten może natomiast być wykorzystany do rozwiązywania zagadnienia z granicami adiatermicznymi.

Rozpatrzmy obszar D pokazany na rys. 6, przy warunkach na brzegach AG i EF

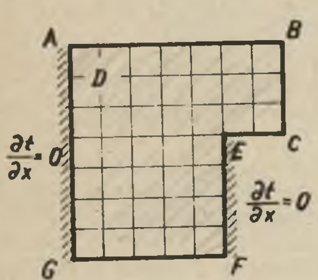
$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

oraz na pozostałych brzegach

$$t\ (x_i,\ y_i) = t_i. \tag{15a}$$



Rys. 5. Schematyczna zależność kierunku ruchów błędnych od liczb losowych



Rys. 6. Obszar siatkowy z adiatermicznymi warunkami na części brzegu

W tym przypadku można zastosować opisany model probabilistyczny ze zmianą kierunku ruchu w przypadku pozornego przekroczenia linii granicznych obszaru AG i EF. Zakończenie serii ruchów błędnych może następować wyłącznie na pozostałych brzegach.

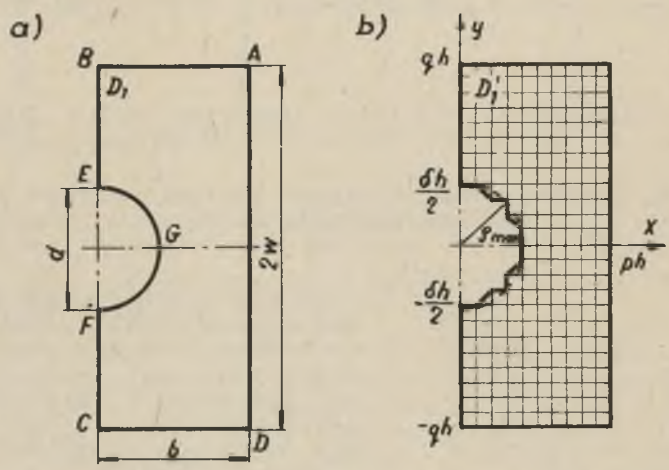
Drugą możliwością jest wprowadzenie dla punktów położonych na linii symetrii (lub granicy adiatermicznej) osobnego schematu ruchów błędnych pokazanego na rys. 5c[x]. Prawdopodobieństwo ruchu z linii symetrii do wnętrza obszaru D (rys. 4) jest dwukrotnie większe niż w pozostałych dwu kierunkach a

[x] Wdzięczny jestem p. prof. dr inż. Janowi Szargutowi za zwrócenie uwagi na tę możliwość.

przekroczenie linii symetrii nie jest możliwe. Po powrocie z linii symetrii do wnętrza obszaru D' dalsze ruchy mogą odbywać się według schematu rys. 5b lub rys. 5a. W pierwszym przypadku uzyskane wyniki będą identyczne z otrzymanymi przy modelowaniu ruchów błędnych w całym symetrycznym obszarze D, w drugim zaś mogą być różne liczbowo, jednakże dokładność wyników końcowych będzie z obu przypadkach jednakowa.

4. Realizacja modelu zagadnienia z granicami adiatermicznymi na maszynie cyfrowej

Rozpatrzmy przykładowo realizację rozwiązania na maszynie cyfrowej zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła bez źródeł wewnętrznych z izotermicznymi i adiatermicznymi warunkami brzegowymi, dla obszaru D_1 pokazanego na rys. 7a.



Rys. 7. Obszar przykładu zagadnienia z adiatermicznymi i izotermicznymi warunkami brzegowymi

W punktach położonych na brzegu AB jest stała temperatura t_1, na brzegu CD – t_2 oraz na brzegu EGF – t_3. Dla brzegów AD BE i FC jest $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$.

Obszar D_1 aproksymujemy obszarem siatkowym D_1' pokazanym na rys. 7b. Wymiary siatki: $h = b/p = w/q$, gdzie p,q – naturalne. W rozpatrywanym przypadku $d = \delta h$, gdzie δ – naturalna parzysta. Warunki brzegowe dla tego obszaru są następujące:

$$t(x_1,y_1) = t_1 \quad \text{dla} \quad y = q \tag{16}$$

$$t(x_1 y_1) = t_2 \quad \text{dla } y = -q,$$

$$t(x_1, y_1) = t_3 \quad \text{dla} \quad x^2 + y^2 \leqslant \varrho^2, \; \varrho = \varrho_{max} \approx \frac{\delta}{2} \tag{16}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0 \quad \text{dla} \quad x = p$$

$$\text{oraz dla} \quad x = 0 \quad \text{przy } |y| > \frac{\delta}{2}.$$

Dla obszaru D_1' określono algorytm modelujący ruchy błędne cząsteczki w sposób następujący:

W przypadku pojawienia się liczby losowej z przedziału [0, 1/4) cząsteczka przechodzi z punktu (x,y) do punktu (x+z, y). Analogicznie pojawieniu się liczb losowych z przedziałów [1/4 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 1) odpowiadają ruchy do punktów (x,y+1), (x-z,y), (x,y-1). Na początku serii ruchów błędnych z = +1. W momencie pozornego przekroczenia przez cząsteczkę granicy adiatemtrycznej następuje zmiana znaku liczby z, przez co zmieniony zostaje zwrot kierunku ruchu poziomego.

Cząsteczka może być pochłonięta tylko przez brzegi, na które nałożono warunki izotermiczne. Osiągnięcie określonego brzegu izotermicznego zostaje rejestrowane przez licznik trafień.

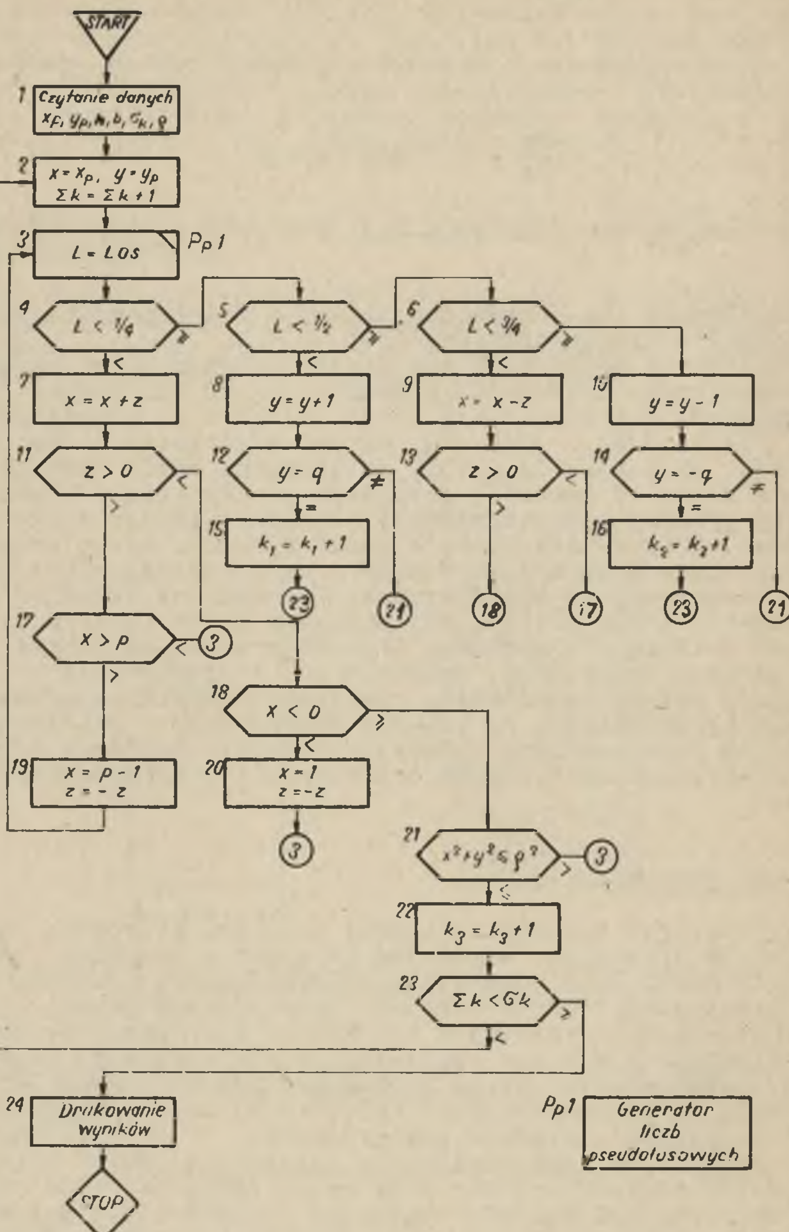
Sieć działań dla podanego algorytmu pokazano na rys. 8. Ułożony program przewiduje, podobnie jak w przykładzie ust. 2, obliczanie wyłącznie rozkładu prawdopodobieństw osiągnięcia poszczególnych brzegów, co pozwala wykorzystać obliczenia dla zagadnień geometrycznie podobnych. Funkcje rozkładu temperatury dla określonych warunków brzegowych należy wyznaczyć ze wzoru (11).

5. Uwagi końcowe

Metoda analogii probabilistycznej może być stosowana do rozwiązywania opisanych zagadnień na równi z innymi metodami przybliżonymi. Jako zasadniczą zaletę, należy wskazać możliwość znajdowania temperatury dla pojedynczego punktu obszaru bez konieczności określenia temperatur dla pozostałych węzłów siatki. Wiąże się z tym możliwość podziału obszaru na siatkę o dużej ilości węzłów, tj. o stosunkowo małych bokach kwadratów i pozwala na przeprowadzenie obliczeń na maszynach cyfrowych o małej pojemności urządzeń pamięciowych.

Ze względu na brak powiązania zasadniczej fazy obliczeń z liczbowymi wartościami warunków brzegowych, istnieje możliwość wykorzystania wyników dla zagadnień geometrycznie podobnych.

Metoda może być stosowana do zagadnień ze zmiennym rozkładem temperatur t(x,y) na brzegu obszaru. W zagadnieniach praktycznych funkcja t(x,y) jest oczywiście ciągła. Po zastąpieniu obszaru rzeczywistego obszarem siatkowym funkcja t(x,y) określona jest tylko dla punktów położonych w węzłach



Rys. 8. Schemat blokowy algorytmu rozwiązania przykładu zagadnienia z adiatermicznymi i izotermicznymi warunkami brzegowymi

na brzegu, a zatem przestaje być ciągłą i zmienia się skokowo. Przykład ust. 2 z warunkami (12b) jest uproszczonym modelem tego rodzaju zagadnienia.

Główną wadą metody jest długotrwałość obliczeń. Tak na przykład dla obszaru pokazanego na rys. 2 modelowanie jednej serii ruchów zajmuje około 1 sekundy pracy maszyny ZAM 2. (Powiększenie ilości węzłów przez zmniejszenie h, spowoduje oczywiście zwiększenie tego czasu). Przy założeniu $\sigma_k = 1000$ i $n = 4$ obliczenia dla jednego punktu zajmują 18 minut pracy maszyny ZAM 2. Ponieważ zgodnie z wzorem (8) błąd względny jest odwrotnie proporcjonalny do $\sqrt{\sigma_k}$, to czas obliczeń rośnie proporcjonalnie do kwadratu wzrostu dokładności. Wskazaną wadę może zniwelować wykorzystanie maszyn cyfrowych o dużej prędkości działania.

LITERATURA

[1] Beckenbach E.F. i in.: Nowoczesna matematyka dla inżynierów. PWN, Warszawa, 1962.

[2] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa, 1960.

[3] Forsythe G.E., Wasow W.R.: Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley, New York 1960.

[4] Schneider P.I: Conduction heat transfer, Addison Wesley, Reading, 1957.

[5] Szrejder J.A. i in.: Metod statisticzeskich ispytanij (Metod Monte-Karlo), Fizmatgiz, Moskwa, 1962.

Praca wpłynęła do Redakcji w dniu 17 grudnia 1965 r

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Р е з ю м е

В статье рассмотрены основы приближенного решения задачи Дирихле методом Монте-Карло. Определен стохастический аналог вопроса стационарной теплопроводности с изотермическими краевыми условями. Предложен аналог стационарной задачи теплопроводности с адиатермическими условями на границе. Изложено применение стохастических аналогов для решения определенных задач на вычислительных машинах.

APPROXIMATE SOLUTION OF STEADY-STATE HEAT CONDUCTION
PROBLEMS BY MONTE CARLO METHOD

S u m m a r y

Paper presents and approximate solution of Dirichlet problem by Monte Carlo method. The stochastic model for steady-state heat transfer problem with isothermal boundary conditions is presented. The probabilistic analogue was proposed for the problem with adiathermic boundary conditions.
Application the analogue for solving the problem by use an elektronic computer is described.