

JAN SZARGUT

Katedra Energetyki Ciepłej

JÓZEF ROZEWICZ

Katedra Ciepłnych Maszyn Wirnikowych

ZASTOSOWANIE METODY MONTE CARLO DO TRZECIEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO USTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. W artykule podano uogólnienie zastosowań metody Monte Carlo dla zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła przy znanych wartościach współczynnika wnikania ciepła i temperatury płynu stykającego się z powierzchnią rozpatrywanego ciała. Przedstawiono sposoby umożliwiające wykorzystanie metody w przypadku gdy badany obiekt jest niejednorodny lub anizotropowy. Podano przykłady liczbowe wraz ze schematami blokowymi programów dla elektronowych maszyn cyfrowych.

0. Wstęp

Jednym z podstawowych problemów występujących w technice ciepłej jest określenie pola temperatur w badanym obiekcie. Dla procesów ustalonych w czasie zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego Laplace'a. W zastosowaniach praktycznych najczęściej występuje trzeci warunek brzegowy, który określa współczynnik wnikania ciepła na powierzchni ciała i temperaturę płynu stykającego się z tą powierzchnią.

Jak wiadomo, ścisłe rozwiązanie analityczne wskazanego zagadnienia jest możliwe tylko w wyjątkowych wypadkach dla obiektów o prostych kształtach. Poszukiwanie rozwiązania analitycznego jest zresztą celowe w zagadnieniach typowych.

W praktyce inżynierskiej najczęściej jest konieczne lub celowe stosowanie metod przybliżonych numerycznych lub analogowych. Przy wyborze określonej metody należy kierować się indywidualną charakterystyką zadania oraz możliwościami zautomatyzowania obliczeń.

Jedną z metod numerycznych, które rozwinęły się w związku z rozpowszechnieniem maszyn cyfrowych jest metoda Monte Carlo. W piśmiennictwie [1-5] podany był sposób wykorzystania metody Monte Carlo do rozwiązywania zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a, co daje możliwość stosowania jej do problemów ustalonego przewodzenia ciepła z izotermicznymi warunkami brzegowymi. W artykule [2] podano uogólnienie zastosowań metody Monte Carlo do przypadków adiatermicznych warunków brzegowych.

W pracy niniejszej przedstawiono możliwości rozszerzenia zastosowań metody Monte Carlo do zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła, przez uogólnienie metody na najważniejszy, z punktu widzenia obliczeń inżynierskich, przypadek trzeciego zagadnienia brzegowego. Wskazano przy tym możliwości zastosowań do obiektów, w których występuje anizotropia współczynnika przewodzenia ciepła oraz do obiektów niejednorodnych lub wielowarstwowych.

Przedstawione wyprowadzenia i przykłady ograniczono do zagadnień dwuwymiarowych. Rozszerzenie zastosowań na zagadnienie trójwymiarowe nie nastręcza trudności merytorycznych.

1. Model probabilistyczny trzeciego zagadnienia brzegowego dla materiału jednorodnego, izotropowego

Trzecie zagadnienie brzegowe ustalonego przewodzenia ciepła sprowadza się do poszukiwania funkcji $\vartheta(x,y)$ określającej rozkład temperatur w obszarze D , spełniającej wewnątrz obszaru równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

przy warunku na brzegu obszaru

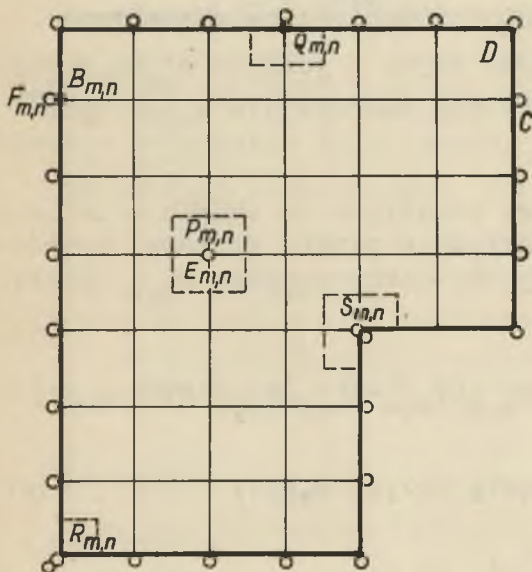
$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha(\vartheta - t) \quad (2)$$

gdzie:

λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

$\alpha = \alpha(x, y)$ - współczynnik wnikania ciepła,

$t = t(x, y)$ - temperatura płynu stykającego się z powierzchnią ciała.



Rys. 1. Obszar siatkowy z przylegającymi punktami fikcyjnymi

$P_{m,n}$ oraz brzegowych - $B_{m,n}$. Punkty węzłowe brzegowe $B_{m,n}$ dzielą się na punkty brzegowe ściany płaskiej typu $Q_{m,n}$, punkty brzegowe na narożu zewnętrznym typu $R_{m,n}$ oraz punkty brzegowe na narożu wewnętrznym typu $S_{m,n}$. Zakładamy, że dokonany podział

Rozpatrzmy obszar D ograniczony linią C, pokazany na rys. 1. Zakładamy, że obszar można podzielić na skończoną całkowitą liczbę kwadratów o boku h.

Celem przybliżonego rozwiązania zagadnienia dzieli się dany obszar za pomocą siatki kwadratowej o boku h. Przedmiotem obliczenia są temperatury $\vartheta_{m,n}$ w punktach $M_{m,n}$ położonych w węzłach siatki podziału. Zbiór punktów węzłowych $M_{m,n}$ składa się z punktów węzłowych wewnętrznych

wyklucza istnienie innych typów punktów węzłowych. Równania różnicowe zastępujące równania (1) i (2) otrzymuje się dla obszaru siatkowego D z równań bilansów elementarnych obszarów $E_{m,n}$ otaczających punkty $M_{m,n}$.

Obszary $E_{m,n}$ mogą wystąpić zasadniczo w czterech postaciach: kwadratów o boku h , prostokątów o bokach h i $h/2$, kwadratów o boku $h/2$ oraz wieloboków utworzonych z trzech kwadratów o boku $h/2$.

Dla określenia związków odpowiadających warunkom brzegowym (2) wprowadzamy fikcyjny zbiór punktów $F_{m,n}$ w ten sposób, że każdemu punktowi brzegowemu $B_{m,n}$ ciała stałego przyporządkujemy fikcyjny punkt $F_{m,n}$ stykający się z linią graniczną C przy punkcie $B_{m,n}$. Zbiór punktów $F_{m,n}$ nie należy do obszaru D . Temperatura w punktach $F_{m,n}$ jest równa temperaturze płynu w punkcie styku z punktem $B_{m,n}$ tj. $t_{m,n}$, podczas gdy temperatura w punktach $B_{m,n}$ jest $\vartheta_{m,n}$.

Jeżeli założymy, że opory przepływu są skupione na odcinkach siatki łączących sąsiednie punkty węzłowe, to równanie bilansu cieplnego dla dowolnego punktu $M_{m,n}$ jest:

$$\sum_{i,j} \lambda \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} r_{i,j} h + \alpha_{m,n} (t_{m,n} - \vartheta_{m,n}) s_{m,n} h = 0 \quad (3)$$

$$i, j = m+1, n; m, n+1; m-1, n; m, n-1; \quad (*)$$

gdzie:

$r_{i,j}$ - stosunek długości odcinka oddzielającego obszar $E_{m,n}$ od obszaru $E_{i,j}$ do h ,

$s_{m,n}$ - stosunek długości odcinka prostego lub łamanego oddzielającego obszar $E_{m,n}$ od płynu do h .

Wielkości $r_{i,j}$ oraz $s_{m,n}$ w zależności od położenia i typu punktu $M_{m,n}$, mają wartości 0, 1/2 lub 1.

Z równania (3) po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$\vartheta_{m,n} = \sum_{i,j} a_{i,j} + a_{m,n} t_{m,n} \quad (4)$$

i, j - według (*)

gdzie:

$$a_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}; \quad A_{i,j} = r_{i,j}$$

$$a_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}; \quad A_{m,n} = Bi_{m,n}^h s_{m,n}$$

$Bi_{m,n}^h = \frac{\alpha_{m,n}^h}{\lambda}$ - liczba Biota dla obszaru elementarnego położonego przy brzegu.

Dla punktów wewnętrznych $P_{m,n}$

$$A_{i,j} = 1, \quad i, j \text{ - według (*)}$$

skąd

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{4} \vartheta_{m+1,n} + \frac{1}{4} \vartheta_{m,n+1} + \frac{1}{4} \vartheta_{m-1,n} + \frac{1}{4} \vartheta_{m,n-1} \quad (4a)$$

Dla punktu $Q_{m,n}$:

$$A_{m+1,n} = \frac{1}{2}; \quad A_{m,n+1} = 0; \quad A_{m-1,n} = \frac{1}{2}; \quad A_{m,n-1} = 1$$

$$A_{m,n} = Bi_{m,n}^h \quad (5)$$

Dla punktu $R_{m,n}$:

$$A_{m+1,n} = \frac{1}{2}; \quad A_{m,n+1} = \frac{1}{2}; \quad A_{m-1,n} = 0; \quad A_{m,n-1} = 0$$

$$A_{m,n} = Bi_{m,n}^h \quad (6)$$

Dla punktu $S_{m,n}$

$$A_{m+1,n} = \frac{1}{2}; A_{m,n+1} = 1; A_{m-1,n} = 1; A_{m,n-1} = \frac{1}{2};$$

$$A_{m,n} = B_{m,n}^h \quad (7)$$

Analogiczne wzory można otrzymać dla wszystkich punktów brzegowych $B_{m,n}$.

Dla rozwiązania powyższego zagadnienia metodą Monte Carlo określimy następujący model probabilistyczny imitujący ruchy błędne cząsteczek:

- Dla punktów wewnętrznych $P_{m,n}$ cząsteczka zgodnie z równaniem (4a) ma jednakowe prawdopodobieństwo wynoszące $1/4$, przemieszcza się do każdego z punktów sąsiednich $M_{i,j}$ (i,j - według $(*)$).
- Dla punktów brzegowych $B_{m,n}$ cząsteczka zgodnie z równaniem (4) przemieszcza się z prawdopodobieństwami równymi $a_{i,j}$ do punktów sąsiednich $M_{i,j}$ oraz z prawdopodobieństwem $a_{m,n}$ do punktu $F_{m,n}$.
W punkcie $F_{m,n}$ następuje pochłonięcie cząsteczki.

Każda seria ruchów błędnych cząsteczki rozpoczynająca się w rozpatrywanym punkcie $M_{m,n}$ obszaru D zakończy się w jednym z fikcyjnych punktów $F_{m,n}$, któremu przyporządkowana jest wartość $t_{m,n}$.

Jeżeli dla określonego punktu $M_{m,n}$ dokonamy modelowania σ_k serii ruchów, z których pewna ilość k_1 zakończy się w punktach $F_{m,n}$, którym przyporządkowana jest wartość $t_{m,n} = t_1$; k_2 - odpowiednio t_2 ; ... itd., to oczekiwana wartość końcowa funkcji ψ_{mn} w tym punkcie wyniesie:

$$\psi_{m,n} = \frac{\sum_{i=1}^k k_i t_i}{\sigma_k} \quad (\sigma_k = \sum_{i=1}^k k_i) \quad (8)$$

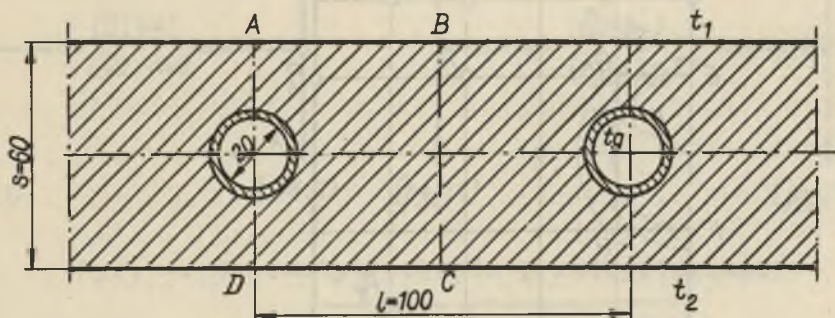
Określona powyższym wzorem funkcja spełnia w punktach węzłowych (dla których jest określona) równania (4), a za-

tem określa przybliżone rozwiązanie zagadnienia sformułowanego wzorami (1) i (2).

Na dokładność przybliżonego rozwiązania wpływa wymiar liniowy h siatki podziału, ilość modelowanych serii ruchów błędnych σ_k oraz ewentualna aproksymacja obszaru rzeczywistego obszarem siatkowym składającym się z skończonej całkowitej liczby kwadratów.

2. Realizacja modelu na maszynie cyfrowej

Opisany model probabilistyczny zastosowano do wyznaczenia rozkładu temperatur w betonowej płycie grzejnej pokazanej na rys. 2 [3]. Temperatura czynnika grzejnego wynosi t_g , temperatura otoczenia przy górnym brzegu t_1 , przy dolnym t_2 . Współczynnik wnikania ciepła przy górnym brzegu α_1 , przy dolnym α_2 . Założono, że ze względu na $\frac{\lambda}{s\alpha_g} \approx 0$ na granicy obszaru płyty przy rurach grzejnych można przyjąć $v(x,y) = t_g$.



Rys. 2. Betonowa płyta grzejna

Ze względu na symetrię pola temperatur przy rozwiązywaniu można ograniczyć się do rozpatrzenia odcinka płyty obejmującego połowę rury grzejnej. Obszar rzeczywisty zastąpiono obszarem siatkowym D_1 pokazanym na rys. 3, przy czym łuk EF aproksymowano linią łamaną $EGHF$.

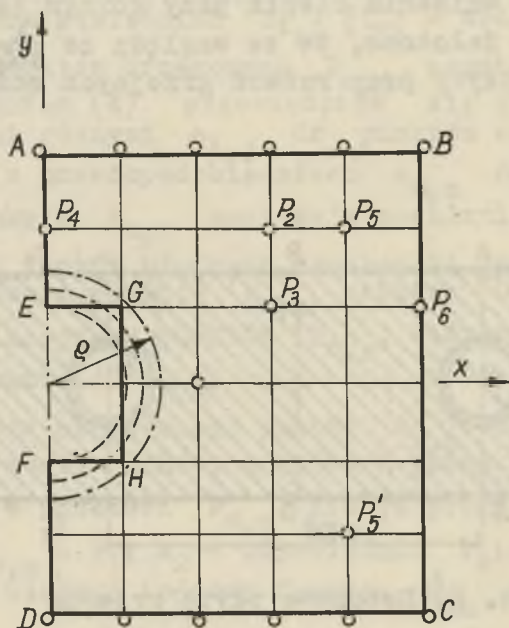
Zgodnie z założeniami, na brzegach określone są następujące warunki:

$$AB: \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \alpha_1 (t_1 - \vartheta) \quad (9,a)$$

$$CD: -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \alpha_2 (t_2 - \vartheta) \quad (9,b)$$

$$EGHF: \vartheta = t_g \quad (9,c)$$

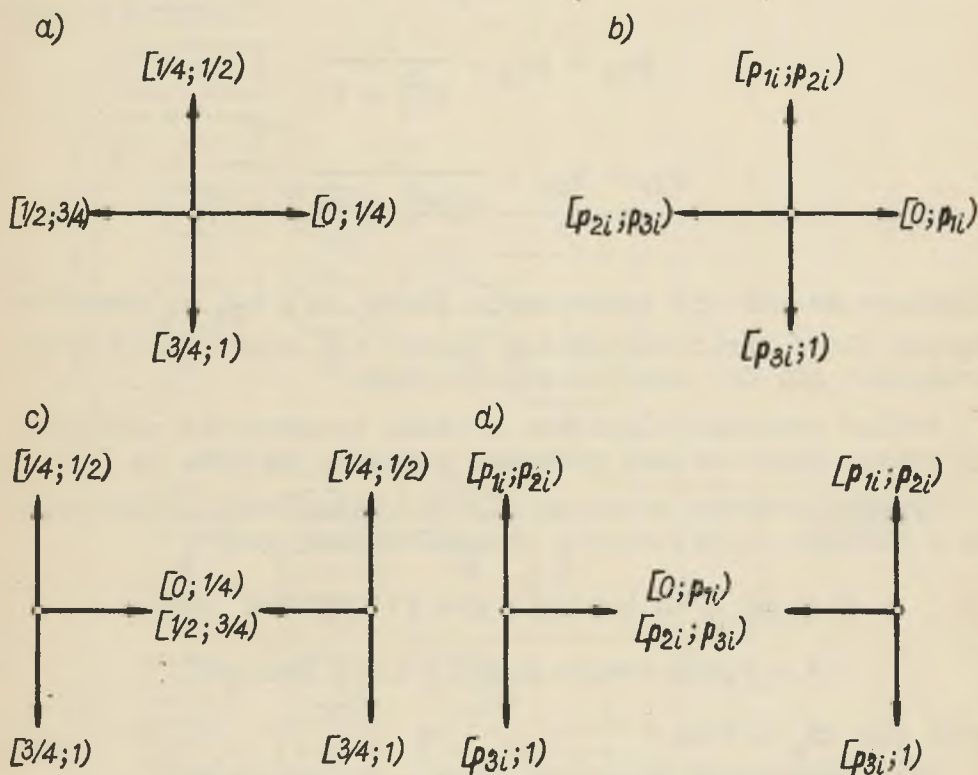
$$AE, FD, BC: \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad (9,d)$$



Rys. 3. Obszar siatkowy aproksymujący część płyty grzejnej

Dla obszaru D_1 określono algorytm modelujący ruchy błędne cząsteczek. Schematy rozkładu prawdopodobieństw ruchów w poszczególnych kierunkach pokazano na rys. 4. Schematy dotyczą punktów położonych wewnątrz obszaru $D_1(a)$,

punktów położonych na brzegu AB ($b, i=1$), brzegu CD ($b, i=2$), brzegach AE, FD i BC (c) oraz punktów A, B ($d, i=1$) i C, D ($d, i=2$).



Rys. 4. Schematy rozkładu prawdopodobieństw

Na schematach oznaczono:

$$p_{11} = \frac{1}{2(Bi_1^h + 2)}$$

$$p_{21} = p_{11} + \frac{Bi_1^h}{Bi_1^h + 2}$$
(10)

$$\begin{aligned}
 p_{31} &= p_{21} + \frac{1}{2(\text{Bi}_1^h + 2)} \\
 p_{12} &= \frac{1}{2(\text{Bi}_2^h + 2)} \\
 p_{22} &= p_{12} + \frac{1}{\text{Bi}_2^h + 2} \\
 p_{32} &= p_{22} + \frac{1}{2(\text{Bi}_2^h + 2)}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Algorytm przewiduje wyznaczanie liczb k_1 , k_2 , k_0 określających ilość serii ruchów kończących się odpowiednio przy brzegach AB, CD oraz na brzegu EGHF.

Według podanego algorytmu ułożono program dla maszyny cyfrowej. Sieć działań programu pokazano na rys. 5.

Wyniki liczbowe obliczeń dla przykładu rys. 2 zestawiono w tablicy 1. Obliczenia przeprowadzono przy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 10 \text{ kcal/m}^2\text{h grad} \quad (11,63 \text{ W/m}^2 \text{ grad})$$

$$\lambda = 0,704 \text{ kcal/m h grad} \quad (0,819 \text{ W/m grad})$$

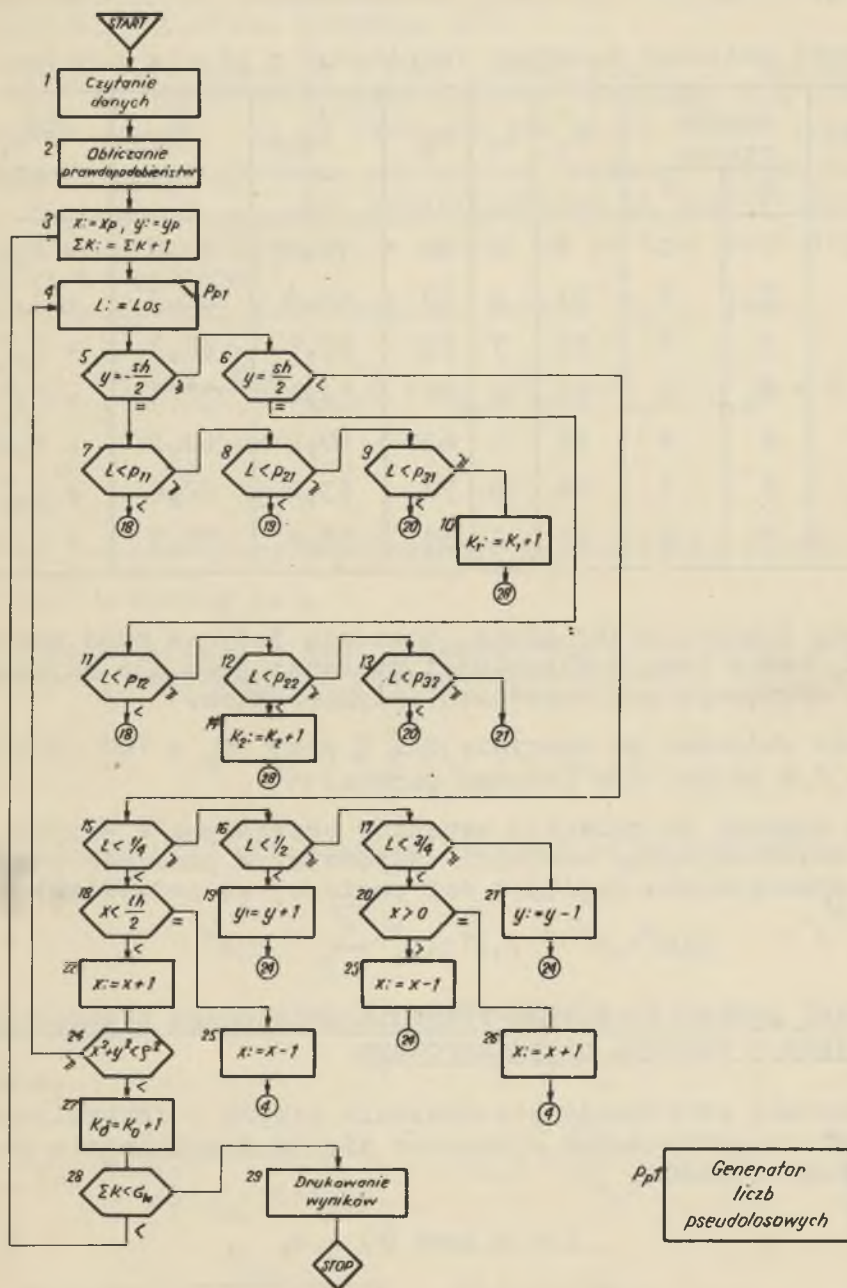
oraz dla $\sigma_k = 100$.

Przy dodatkowym przyjęciu wartości temperatur

$$t_1 = t_2 = 20^\circ\text{C}, \quad t_g = 80^\circ\text{C}$$

ze wzoru (8) otrzymano wartości temperatur $\vartheta_{m,n}$, podane w tabl. 1.

Dla porównania podano również w tabl. 1 wyniki $\vartheta'_{m,n}$ uzyskane metodą różnic skończonych w [3] oraz $\Delta\vartheta_{m,n} = \vartheta_{m,n} - \vartheta'_{m,n}$. Ponieważ przy stosunkowo małej liczbie losowań $\sigma_k = 100$, nie można uzyskać dużej dokładności względnej, przedstawione wartości $\Delta\vartheta_{m,n}$ nie mają cha-



Rys. 5. Schemat blokowy algorytmu zagadnienia rozkładu temperatur w betonowej płycie grzejnej

Tablica 1

Wyniki obliczeń rozkładu temperatur w płycie grzejnej

| Punkt | Współ- rzędne | | k_1 | k_2 | k_0 | $\vartheta_{m,n}$ °C | $\vartheta'_{m,n}$ °C | $\Delta\vartheta_{m,n}$ grad |
|----------------|------------------|---|-------|-------|-------|-------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| | x | y | | | | | | |
| P ₁ | 2 | 0 | 6 | 6 | 88 | 72,8 | 73,4 | - 0,6 |
| P ₂ | 3 | 2 | 23 | 4 | 73 | 63,8 | 62,7 | + 1,1 |
| P ₃ | 3 | 1 | 17 | 7 | 76 | 65,6 | 66,3 | - 0,7 |
| P ₄ | 0 | 2 | 11 | 2 | 87 | 72,2 | 72,3 | - 0,1 |
| P ₅ | 4 | 2 | 25 | 7 | 68 | 60,8 | 60,4 | + 0,4 |
| P ₆ | 5 | 1 | 18 | 10 | 72 | 63,2 | 62,6 | + 0,6 |
| B | 5 | 3 | 37 | 4 | 59 | 55,4 | 55,3 | + 0,1 |

rakteru ścisłej oceny błędu, wskazują jedynie rząd dokładności, która jest w zupełności wystarczająca dla najczęściej występujących zagadnień inżynierskich.

Czas obliczeń na maszynie ZAM 2 przy $\sigma_k = 100$ wynosił około 2,5 minuty dla jednego punktu.

Ze względu na symetrię warunków brzegowych w przykładzie obliczeniowym, wartości temperatur w punktach położonych symetrycznie względem osi poziomej są jednakowe, np. P₅ i P₅.

3. Model probabilistyczny równania ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku niejednorodnym

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym ośrodku niejednorodnym sprowadza się do poszukiwania rozwiązania równania

$$\operatorname{div} \lambda(\operatorname{grad} \vartheta) = 0, \quad (11)$$

gdzie:

$$\lambda = \lambda(x, y),$$

przy określonych warunkach brzegowych, w najogólniejszym przypadku w postaci równania (2).

Rozpatrzmy ponownie obszar geometryczny D pokazany na rys. 1. Celem określenia bilansu cieplnego dla elementarnego obszaru $E_{m,n}$ założymy, że ilość ciepła przepływającego pomiędzy dwoma sąsiednimi obszarami elementarnymi $E_{m,n}$ i $E_{i,j}$ jest proporcjonalna do zastępczego współczynnika przewodzenia ciepła na odcinku pomiędzy punktami węzłowymi.

Równanie bilansu dla dowolnego punktu $M_{m,n}$ jest:

$$\sum_{i,j} \bar{\lambda}_{i,j} \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} r_{i,j} + \alpha_{m,n} (t_{m,n} - \vartheta_{m,n}) s_{m,n} h = 0 \quad (12)$$

gdzie:

$\lambda_{i,j}$ - zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła
 i,j - według (*).

Jeżeli $\lambda(x,y)$ - jest funkcją ciągłą, to można przyjąć zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła

$$\bar{\lambda}_{i,j} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{m,n})$$

Z równania (12) po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$\vartheta_{m,n} = \sum_{i,j} a_{i,j} \vartheta_{i,j} + a_{m,n} t_{m,n} \quad (13)$$

i,j - według (*),

gdzie:

$$a_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}; \quad A_{i,j} = \frac{\bar{\lambda}_{i,j}}{\lambda_{m,n}} r_{i,j};$$

$$a_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}; \quad A_{m,n} = B_{i,j}^h$$

Przy określaniu modelu probabilistycznego rozpatrywanego zagadnienia, rozkład prawdopodobieństw ruchów cząsteczki w poszczególnych kierunkach powinien być proporcjonalny do współczynników $a_{i,j}$ oraz $a_{m,n}$ w równaniu (13).

Ponieważ w zastosowaniach inżynierskich tego rodzaju zagadnienia, charakteryzujące się ciągłą zmianą współczynnika $\lambda(x,y)$, występują niezmiernie rzadko nie będziemy rozszerzać naszkicowanych powyżej wywodów.

4. Model probabilistyczny równania ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku anizotropowym

Pewne ciała stałe występujące w postaci naturalnej, np. drewno lub utworzone z warstw lub elementów różnych materiałów, np. żelbet, posiadają charakter anizotropowy. Strumień ciepły w dowolnym punkcie takiego ośrodka nie jest prostopadły do izotermy przechodzącej przez ten punkt. Współczynniki przewodzenia ciepła w różnych kierunkach nie są sobie równe.

W praktyce często przedmiotem analizy są ciała ortotropowe, dla których można określić dwa wzajemnie prostopadłe kierunki o współczynnikach przewodzenia ciepła λ_x i λ_y ($\lambda_x \neq \lambda_y$).

Równanie bilansu energetycznego dla podobszaru $E_{m,n}$ (rys. 1) ośrodka ortotropowego określa równanie:

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{m,n}}{h} r_{i,j}^{h+\alpha_{m,n}} (t_{m,n} - v_{m,n})^{\beta_{m,n}} s_{m,n}^h = 0 \quad (14)$$

gdzie:

i,j - według (*), a $\lambda_{i,j}$ przyjmuje wartości:

$$\lambda_{m+1,n} = \lambda_{m-1,n} = \lambda_x,$$

$$\lambda_{m,n+1} = \lambda_{m,n-1} = \lambda_y. \quad (15)$$

Po przekształceniach algebraicznych z równania (14) otrzymujemy:

$$v_{m,n} = \sum_{i,j} a_{i,j} v_{i,j} + a_{m,n} t_{m,n} \quad (16)$$

i, j - według (*)

gdzie:

$$a_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}$$

$$A_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{sr}} r_{i,j}$$

$$a_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\sum_{i,j} A_{i,j} + A_{m,n}}$$

$$A_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}^h}{\lambda_{sr}} s_{m,n}$$

$$\lambda_{sr} = \frac{1}{2} (\lambda_x + \lambda_y).$$

Dla punktu $P_{m,n}$ położonego wewnątrz obszaru D otrzymujemy następujące współczynniki liczbowe do wzoru (16):

$$A_{m+1,n} = A_{m-1,n} = \frac{2\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m,n+1} = A_{m,n-1} = \frac{2\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y};$$

$$A_{s,r} = 0. \quad (17)$$

Dla punktu $Q_{m,n}$ położonego na brzegu przy ścianie płaskiej:

$$A_{m+1,n} = A_{m-1,n} = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m,n+1} = 0; \quad A_{m,n-1} = \frac{2\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y};$$

$$A_{m,n} = B_{m,n}^h; \quad sr \quad (18)$$

Dla punktu $R_{m,n}$ położonego w narożu zewnętrznym:

$$A_{m+1,n} = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m,n+1} = \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m-1,n} = A_{m,n-1} = 0;$$

$$A_{m,n} = Bi_{m,n}^h; \quad \text{śr} \quad (19)$$

Dla punktu $S_{m,n}$ położonego w narożu wewnętrznym:

$$A_{m+1,n} = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m,n+1} = \frac{2\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m-1,n} = \frac{2\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y};$$

$$A_{m,n-1} = \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y}; \quad A_{m,n} = Bi_{m,n}^h; \quad \text{śr} \quad (20)$$

W powyższych wzorach $Bi_{m,n}^h; \text{śr} = \frac{\alpha_{m,n}^h}{(\lambda_x + \lambda_y)/2}$.

W przypadku punktów brzegowych typu $Q_{m,n}$, $R_{m,n}$, $S_{m,n}$ usytuowanych w innym położeniu względem osi układu można otrzymać analogiczne wzory.

Wzór (16) z współczynnikami określonymi wzorami (17), (18), (19), (20) i analogicznymi, pozwala na ustalenie rozkładu prawdopodobieństw ruchów błędnych cząsteczki w poszczególnych kierunkach przy modelowaniu zagadnienia dla ośrodka charakteryzującego się anizotropią ortogonalną.

5. Model probabilistyczny zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku wielowarstwowym

Rozpatrzmy pokazany na rys. 6 obszar D składający się z dwu podobszarów D_1 i D_2 o różnych współczynnikach przewodzenia ciepła λ_1 i λ_2 . W tym przypadku rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do poszukiwania dwu funkcji

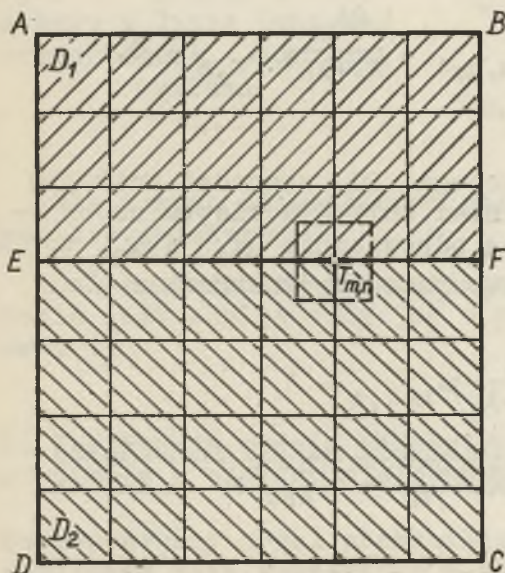
$v_1(x,y)$ i $v_2(x,y)$ spełniających odpowiednio wewnątrz obszarów D_1 i D_2 równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0; \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

na wspólnej granicy EF warunek

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} \quad (22)$$

oraz odpowiednie warunki na pozostałych brzegach.



Rys. 6. Obszar siatkowy ośrodka dwuwarstwowego

W celu rozwiązania zagadnienia metodą Monte Carlo można podzielić obszar D przy pomocy siatki kwadratowej w ten sposób, by jedna z linii podziału pokrywała się z linią kontaktu podobszarów D_1, D_2, EF (inną, mniej dogodną dla obliczeń, możliwością jest dokonanie podziału w taki sposób, by linia EF przebiegała w środku lub dowolnie pomiędzy liniami siatki podziału).

Dla węzłów nie leżących na linii kontaktu obowiązuje wzór (3) ze współczynnikami określonymi wzorami (4a), (5), (6), (7) i analogicznymi. Natomiast dla węzłów leżących na linii kontaktu obo-

wiązuje wzór (13), z uwzględnieniem następujących wartości współczynników $\bar{\lambda}_{i,j}$:

$$\bar{\lambda}_{i,j} = \lambda_1, \text{ jeżeli punkt } M_{i,j} \text{ leży w obszarze } D_1,$$

$$\bar{\lambda}_{i,j} = \lambda_2, \text{ jeżeli punkt } M_{i,j} \text{ leży w obszarze } D_2,$$

$$\bar{\lambda}_{i,j} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \text{ jeżeli punkt } M_{i,j} \text{ leży na linii kontaktu.}$$

Dla punktu $T_{m,n}$ w położeniu pokazanym na rys. 6 współczynniki liczbowe do wzoru (13) są następujące:

$$A_{m+1,n} = A_{m-1,n} = 1 \quad (23)$$

$$A_{m,n+1} = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad A_{m,n-1} = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad A_{m,n} = 0.$$

Jeżeli, na przykład na brzegu BC, zachodzi wnikanie ciepła, przy czym współczynniki wnikania ciepła na brzegach obszarów D_1 i D_2 są odpowiednio α_1 i α_2 , to dla punktu F otrzymujemy następujące współczynniki:

$$A_{m+1,n} = 0; \quad A_{m,n+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad A_{m-1,n} = 1$$

$$A_{m,n-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad A_{m,n} = \frac{1}{2}(Bi_{1\text{śr}}^h + Bi_{2\text{śr}}^h); \quad (24)$$

$$Bi_{j\text{śr}}^h = \frac{\alpha_j h}{(\lambda_1 + \lambda_2)/2}$$

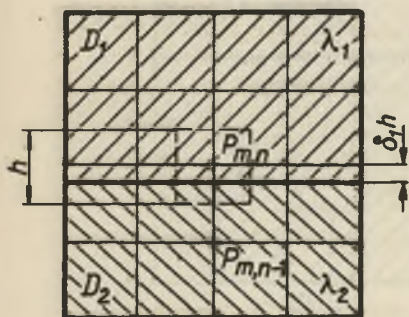
$$j = 1, 2.$$

Podobnie ustalić można szczegółowe współczynniki równania (13) dla innych przypadków usytuowania punktów węzłowych na linii kontaktu dwu ośrodków o różnych współczynnikach przewodzenia ciepła.

Jeżeli linia kontaktu dwu ośrodków przebiega równolegle do siatki podziału pomiędzy węzłami, np. pomiędzy $P_{m,n}$ i $P_{m,n-1}$ w odległości $\delta_1 h$;
($0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$), to dla węzła

$P_{m,n}$ zastępcze współczynniki przewodzenia ciepła $\bar{\lambda}_{i,j}$ przyjmują następujące wartości:

$$\bar{\lambda}_{m+1,n} = \bar{\lambda}_{m-1,n} = \left(\frac{1}{2} + \delta_1\right)\lambda_1 + \left(\frac{1}{2} - \delta_1\right)\lambda_2$$



Rys. 7. Ośrodek dwuwarstwowy z linią kontaktu przechodzącą pomiędzy węzłami

$$\bar{\lambda}_{m,n+1} = \lambda_1 \quad (25)$$

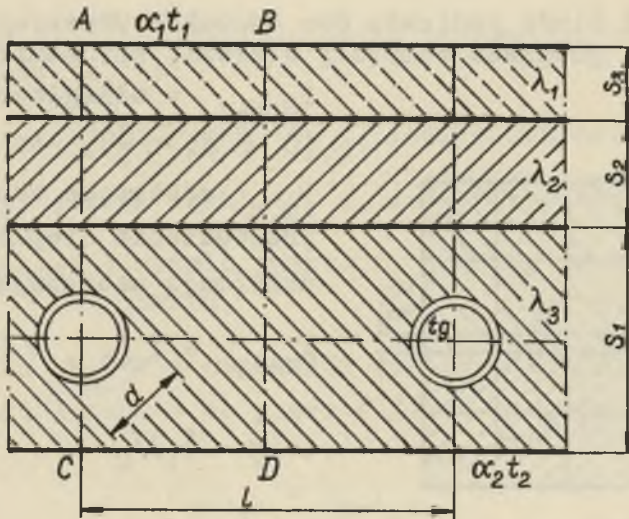
$$\bar{\lambda}_{m,n-1} = \left[\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{1-\delta_1}{\lambda_2} \right]^{-1}$$

Dla innych szczególnych położenia węzłów ustalić można podobne zależności.

Dalszy przebieg rozwiązywania zagadnienia metodą Monte Carlo jest analogiczny jak w przypadkach opisanych w ust. 1.

6. Realizacja modelu zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku wielowarstwowym na maszynie cyfrowej

Zaproponowany model probabilistyczny zastosowano do wyznaczania pola temperatur w betonowej płycie grzejnej, przylegającej do warstwy izolacyjnej z supremy, która z kolei przylega do muru (rys. 8). Współczynniki przewodzenia ciepła w poszczególnych warstwach są λ_1 , λ_2 , λ_3 . Pozostałe warunki brzegowe przyjęto analogicznie jak w ust. 2, tj. równaniami (9a); (9b); (9c) i (9d).



Rys. 8. Izolowana betonowa płyta grzejna

Część obszaru płyty pokazanej na rys. 8 aproksymujemy obszarem siatkowym (rys. 9). W tym obszarze modelujemy ruchy błędne cząsteczek według następujących zasad:

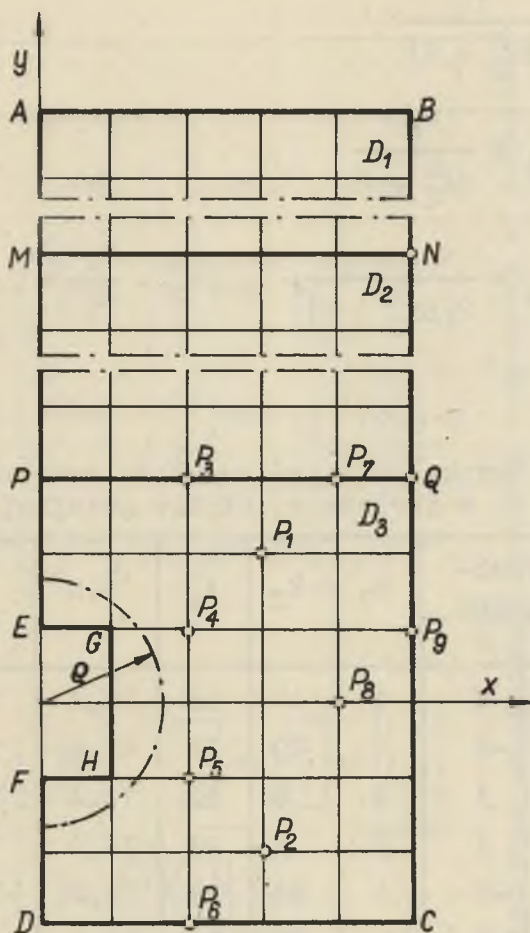
Dla węzłów wewnętrznych nie leżących na liniach kontaktu MN lub PQ według schematu rys. 4a. Dla węzłów położonych na brzegach AE, FD i BC z wyjątkiem punktów A, M, P, E, F, D, B, N, Q, C, według schematu rys. 4c. Dla punktów położonych na liniach AB, MN, PQ i DC według schematu rys. 4b oraz 4d odpowiednio przy $i = 1, 2, 3, 4$.

Parametry p_{ji} przyjmują następujące wartości:

$$p_{11} = \frac{1}{2(Bi_1^h + 2)};$$

$$p_{21} = p_{11} + \frac{Bi_1^h}{Bi_1^h + 2};$$

$$p_{31} = p_{21} + \frac{1}{2(Bi_1^h + 2)}; \quad Bi_1^h = \frac{\alpha_1 h}{\lambda_1} \quad (26)$$



Rys. 9. Obszar siatkowy aproksymujący część izolowanej płyty grzewczej

$$p_{1i} = \frac{1}{4}$$

$$p_{2i} = p_{1i} + \frac{\lambda_{i-1}}{2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)}$$

$$p_{3i} = p_{2i} + \frac{1}{4}; \quad (i = 2, 3); \quad (26)$$

$$p_{14} = \frac{1}{2(Bi_2^h + 2)}$$

$$p_{24} = p_{21} + \frac{1}{Bi_2^h + 2}$$

$$p_{34} = p_{24} + \frac{1}{2(Bi_2^h + 2)}; \quad Bi_2^h = \frac{\alpha_2 h}{\lambda_3} \quad (26)$$

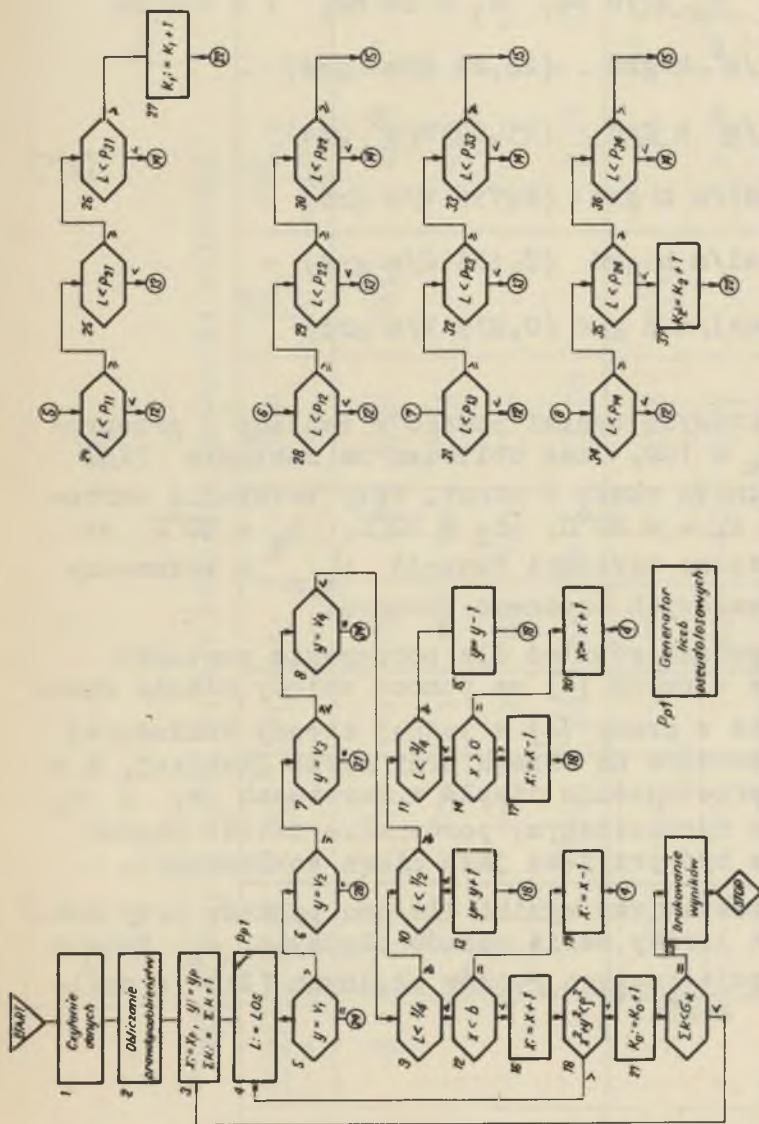
Tablica 2

Wyniki obliczeń rozkładu temperatur
w izolowanej płycie grzejnej

| Punkt | Współ- rzędne | | k_1 | k_2 | k_0 | $v_{m,n}$ °C | $v'_{m,n}$ °C | $\Delta v_{m,n}$ grd |
|----------------|------------------|----|-------|-------|-------|-----------------|------------------|-------------------------|
| | x | y | | | | | | |
| P ₁ | 3 | 2 | 1 | 11 | 88 | 72,4 | 72,9 | - 0,5 |
| P ₂ | 3 | -2 | 1 | 29 | 72 | 61,6 | 65,0 | - 3,4 |
| P ₃ | 2 | 3 | 2 | 6 | 92 | 74,4 | 73,6 | + 0,8 |
| P ₄ | 2 | 1 | 1 | 5 | 94 | 76,0 | 75,9 | + 0,1 |
| P ₅ | 2 | -1 | 1 | 10 | 89 | 73,0 | 73,0 | ± 0,0 |
| P ₆ | 2 | -3 | 1 | 27 | 72 | 62,8 | 62,0 | + 0,8 |
| P ₇ | 4 | 3 | 2 | 11 | 87 | 71,4 | 71,1 | + 0,3 |
| P ₈ | 4 | 0 | 1 | 19 | 80 | 67,6 | 69,9 | - 2,3 |
| P ₉ | 5 | 1 | 2 | 13 | 85 | 70,2 | 70,8 | - 0,6 |

W algorytmie przewidziano wyznaczanie liczb k_1 , k_2 i k_0 określających ilość serii ruchów błędnych kończących się przy brzegu górnym AB, brzegu dolnym CD oraz na brzegu EGHF.

Sieć działań programu obliczeń według podanego algorytmu przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10. Schemat blokowy algorytmu zagadnienia rozkładu temperatur w betonowej płycie grzejnej

$$v_1 = -\frac{S_1}{2h}, \quad v_2 = \frac{S_1}{2h}, \quad v_3 = v_2 + \frac{S_2}{h}, \quad v_4 = v_3 + \frac{S_3}{h},$$

$$b = \frac{1}{2h}.$$

W tabelicy 2 zestawiono wyniki obliczeń dla przykładu rys. 8, przy następujących wartościach parametrów:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 250 \text{ mm}, & s_2 &= 70 \text{ mm}, & s_3 &= 60 \text{ mm}, & l &= 100 \text{ mm} \\
 \alpha_1 &= 20 \text{ kcal/m}^2 \text{ h grd} & (23,26 \text{ W/m}^3 \text{ grd}) \\
 \alpha_2 &= 10 \text{ kcal/m}^2 \text{ h grd} & (11,63 \text{ W/m}^3 \text{ grd}) \\
 \lambda_1 &= 0,65 \text{ kcal/m h grd} & (0,756 \text{ W/m grd}) \\
 \lambda_2 &= 0,09 \text{ kcal/m h grd} & (0,105 \text{ W/m grd}) \\
 \lambda_3 &= 0,704 \text{ kcal/m h grd} & (0,819 \text{ W/m grd})
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Obliczenia, których wyniki podano w tabelicy 2 przeprowadzono przy $\sigma_k = 100$. Czas obliczeń na maszynie ZAM2 wynosił dla 1 punktu około 6 minut. Przy założeniu wartości liczbowych $t_1 = -20^\circ\text{C}$, $t_2 = 20^\circ\text{C}$, $t_g = 80^\circ\text{C}$ ze wzoru (8) wyznaczono wartości funkcji $\psi_{m,n}$ w zaznaczonych punktach węzłowych badanego obszaru.

W tabelicy 2 podano również dla porównania wartości $\psi'_{m,n}$ wyznaczone w pracy [4] za pomocą metody różnic skończonych. Ponieważ w pracy [4] z jednej strony dokładniej aproksymowano wartości na brzegu przy rurze grzejnej, a z drugiej strony przewodzenie ciepła w warstwach s_1 i s_2 liczone sposobem uproszczonym, porównanie ściśle obydwu wyników nie może być przyjęte jako miara dokładności.

W tabelicy 3 zestawiono wyniki dla dwu punktów przy różnych wartościach liczby serii ruchów błędnych σ_k . Podano również liczbę pojedynczych ruchów błędnych (lj) w ogólnej liczbie σ_k serii.

Tablica 3

Wpływ liczby serii ruchów błędnych na wyniki obliczeń

| Punkt | Współrzędne | | σ_k | k_1 | k_2 | k_0 | $\bar{v}_{m,n}$ OC | $\bar{v}'_{m,n}$ OC | $\Delta \bar{v}_{m,n}$ grd | L_j |
|----------------|-------------|----|------------|-------|-------|-------|-----------------------|------------------------|-------------------------------|-------|
| | x | y | | | | | | | | |
| P ₁ | 3 | 2 | 50 | 1 | 7 | 42 | 69,6 | 72,9 | - 3,3 | 3113 |
| | | | 100 | 1 | 11 | 88 | 72,4 | | - 0,5 | 4614 |
| | | | 200 | 2 | 18 | 180 | 73,6 | | + 0,7 | 10187 |
| | | | 1000 | 24 | 62 | 914 | 73,88 | | + 0,98 | 83963 |
| P ₂ | 3 | -2 | 50 | 1 | 12 | 37 | 63,6 | 65,0 | - 1,4 | 2233 |
| | | | 100 | 1 | 29 | 70 | 61,6 | | - 3,4 | 3451 |
| | | | 200 | 1 | 52 | 147 | 63,9 | | - 1,1 | 9095 |
| | | | 1000 | 7 | 235 | 758 | 65,20 | | + 0,2 | 46675 |

7. Uwagi końcowe

Metoda Monte Carlo posiada dość istotne zalety. Rozwiązanie zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła klasycznymi metodami różnicowymi związana jest z koniecznością użycia maszyn cyfrowych o dość dużej pamięci. Wymagane jest przy tym rozwiązanie całego problemu tj. obliczenie temperatury we wszystkich punktach rozpatrywanego obszaru. Metoda Monte Carlo pozwala na obliczenie temperatury w jednym dowolnie wybranym punkcie i może być stosowana przy użyciu maszyn o małej pamięci.

Dużą zaletą metody Monte Carlo jest też możliwość geometrycznie symetrycznego transponowania wyników nawet jeżeli temperatury przy brzegu symetrycznego obszaru nie są symetryczne.

Ocena dokładności rozwiązania metodą Monte Carlo jest zagadnieniem złożonym. Na dokładność wpływa wielkość siatki podziału obszaru h , aproksymacja warunków brzegowych, prawidłowość rozkładu liczb pseudolosowych otrzymywanych z generatora na maszynie cyfrowej, a także dokładność samej metody.

Błąd bezwzględny metody ϵ można oszacować według wzoru podanego w [5]:

$$\epsilon \leq \frac{3 \max f(x,y)}{\sqrt{\sigma_k}} \quad (28)$$

gdzie:

$\max f(x,y)$ - maksymalna wartość funkcji w obszarze.

W przypadku przykładu rozpatrywanego w ustępie 6

$$\max f(x,y) = t_g - t_1 = 100 \text{ grad}$$

Przy $\sigma_k = 100$ otrzymujemy wtedy $\epsilon \leq 30 \text{ grad}$.

W rzeczywistości, jeżeli za dokładne rozwiązanie przyjmujemy wartości podane w [3], błąd nie przekracza 3,4 grad.

Celem zwiększenia dokładności należy zwiększyć ilość modelowanych serii ruchów błędnych σ_k . Dlatego dla przeprowadzenia obliczeń metodą Monte Carlo pożądane jest stosowanie maszyn cyfrowych o możliwie dużej prędkości działania.

LITERATURA

- [1] Brown G.W.: Metody Monte Carlo. Nowoczesna matematyka dla inżynierów, red. E.F. Beckenbach, PWN, 1962.
- [2] Rozewicz J.: Przybliżone rozwiązywanie zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła metodą Monte Carlo. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Energetyka Nr 21, 1966.
- [3] Szargut J.: Przybliżona metoda wyznaczania ilości przewodzonego ciepła. Gaz, Woda i Technika Sanitarna Nr 5, 1957.
- [4] Szargut J., Mierzwiński S., Garwoliński E.: Obliczanie wydajności betonowych płyt grzejnych. Gaz, Woda i Technika Sanitarna Nr 6, 1957.
- [5] Szrejder J. (red.): Metod statisticzeskich ispytаний (Metod Monte-Karlo). Fizmatgiz, 1962.

Wpłynęło do Redakcji 2 kwietnia 1966 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО
К ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

Предлагается обобщение применения метода Монте-Карло к стационарной задаче теплопроводности при условиях определяющих коэффициент теплоотдачи и температуру окружающей среды. Излагается применение метода к вопросам теплопередачи в неоднородных, анизотропных и многослойных твердых телах.

Представлены способы и результаты численного решения примерных задач на электронной цифровой вычислительной машине.

APPLICATION MONTE CARLO METHOD FOR STEADY HEAT
CONDUCTION PROBLEM WITH THIRD BOUNDARY CONDITION

S u m m a r y

In the paper is presented generalisation of application Monte Carlo method for steady heat conduction problem with given value of temperature of surrounding medium and given heat exchange coefficient. Techniques are proposed for use the method in the case of non-homogenous and anisotropic solid bodies.

The numerical examples of solving above problems by use the electronic computer have been discussed.