

JERZY TOMECZEK

Katedra Teorii Maszyn Ciepłych

WYZNACZENIE OPTIMALNYCH ROZMIARÓW
PIONOWEGO PIERŚCIENIOWEGO KANAŁU
W MATERIALE CHŁODZONYM PRZEZ KONWEKCJĘ SWOBODNĄ

Streszczenie. W pracy rozpatrzony został problem stabilności konwekcji swobodnej w pierścieniowym kanale pionowym. Wyznaczone zostały krytyczne wartości liczby Rayleigha (Ra), poniżej których nie jest możliwe rozwinięcie się konwekcji swobodnej w kanale. Zagadnienie zostało rozwiązane metodą Galerkinia rozwiązywania równań różniczkowych. Obliczenia cyfrowe przeprowadzono dla różnych stosunków χ promienia zewnętrznego do wewnętrznego kanału celem zbadania wpływu tego stosunku na warunki stabilności konwekcji.

1. Równania podstawowe

Rozwiązywanie zagadnień stabilności konwekcji swobodnej zostało zapoczątkowane przez Rayleigha, który jako pierwszy obliczył krytyczną liczbę $(Ra)_k$ dla poziomej warstwy płynu. W okresie późniejszym przeprowadzono obliczenia dla szeregu innych często spotykanych geometrii. Ukazało się również kilka prac doświadczalnych potwierdzających obliczenia teoretyczne [3]. Z punktu widzenia praktycznego konieczna jest przede wszystkim znajomość warunków, w jakich zachodzi utrata stabilności.

Romanow badał konwekcję swobodną w kanale zamkniętym od dołu w obszarze $(Ra) > (Ra)_k$. Problem ten związany był z chłodzeniem łopatek turbin. Żuchowicki opracował szereg rozwiązań dla cylindrów poziomych i pionowych. Jedynie w

przypadku cylindra pionowego dla symetrycznych rozkładów prędkości podaje drugie przybliżenie. Beckmann wyznaczył doświadczalnie wartość $(Ra)_k$ dla poziomego kanału pierścieniowego. Podał jednakże tylko jedną wartość nie uzależniając jej od rozwartości kanału.

Przedmiotem naszych rozważań będzie pierścieniowy kanał cylindryczny o nieskończonej długości, którego oś symetrii usytuowana jest pionowo. Kanał wypełniony jest płynem nieściśliwym. W przypadku, gdy temperatura płynu jest jednakoowa we wszystkich punktach, znajdować się on będzie w spoczynku. Istnieją jednak warunki, przy których płyn może znajdować się w spoczynku nawet wówczas, gdy temperatura jego nie jest stała we wszystkich punktach.

W wyniku przeprowadzonych eksperymentów stwierdzono istnienie krytycznych gradientów temperatury, poniżej których nie jest możliwe rozwinięcie się konwekcji swobodnej, a przepływ ciepła odbywa się jedynie przez przewodzenie. Przeprowadzono dokładne obliczenia tych gradientów [1], [6] dla wielu często spotykanych układów.

Równania opisujące proces mają postać:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} - \beta \vec{g} (t - t_{od})$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + (\vec{w} \nabla) (t - t_{od}) = a \nabla^2 t$$

W dalszym ciągu oznaczać będziemy $t - t_{od} \equiv t$. Jeżeli płyn ma znajdować się w stanie ustalonym, zatem muszą być spełnione

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

Jeżeli ponadto istnieje równowaga $[t = t(\vec{r}) = t_0(\vec{r}), p = p(\vec{r}) = p_0(\vec{r})]$, to równania (1) przyjmą postać

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \beta \vec{g} t_0 = 0; \nabla^2 t_0 = 0 \quad (3)$$

Z pierwszego równania (3) wynika, że gradient temperatury musi być wszędzie równoległy do wektora \vec{g} . Zatem

$$\nabla t_0 = -A_0(\vec{r}) \vec{k} \quad (4)$$

gdzie \vec{k} jest jednostkowym wektorem skierowanym wzdłuż osi z w górę. Znak $-$ w równaniu (4) nie wynika oczywiście z równań (3), przyjęty został jedynie po to, by uzyskać poprawny wynik końcowy.

Drugie równanie (3) wraz z równaniem (4) daje w wyniku

$$\vec{k} \cdot \nabla A_0(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

Skąd wynika, że

$$A_0(\vec{r}) = A_0 \quad (6)$$

Zatem równowaga w układzie możliwa jest jedynie w przypadku, gdy

$$\nabla t = -A \vec{k} \quad (7)$$

Ze względów praktycznych istotne jest znalezienie wartości A , ponieważ dla wartości $|\nabla t| < A$ wszelkie zaburzenie w płynie musi zanikać i rozwinięcie się konwekcji swobodnej nie jest możliwe. Dla $|\nabla t| = A$ możliwe jest zrealizowanie w płynie stanu ustalonego, tzn. zaburzenia wprowadzone do układu ustalają się.

Istnieje nieskończona [4] ilość wartości A , które spełniają równania (3). Ponieważ tworzą one ciąg pojedynczy, zatem tłumienie konwekcji możliwe jest jedynie poniżej najmniejszej z nich. Wyznaczeniem tej właśnie wielkości zajmować się będziemy obecnie.

Niech p_0, t_0 oznaczają ciśnienie i temperaturę w płynie w stanie spoczynku. Nałożmy na stan ustalony perturbację tak, że

$$t = t_0 + t'; \quad p = p_0 + p' \quad (8)$$

Równania (1) przyjmą, po odrzuceniu małych członów, postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p' - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} - \beta \vec{g} t' \\ \operatorname{div} \vec{w} &= 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial \tau} + (\vec{w} \nabla) t' = a \nabla^2 t' \end{aligned} \quad (9)$$

Jeżeli możliwa jest równowaga, to równania te można zapisać

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p' - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} - \beta \vec{g} t' &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{w} &= 0; \quad (\vec{w} \nabla) t' = a \nabla^2 t' \end{aligned} \quad (10)$$

Na granicy płynu i ciała stałego muszą być spełnione warunki

$$t' = t'_c; \quad \lambda \frac{\partial t'}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial t'_c}{\partial n}; \quad \vec{w} = 0 \quad (11)$$

gdzie c dotyczy ciała stałego, zaś n kierunek normalny do granicy płynu i ciała stałego.

Równania (10) wraz z warunkami (11) określają równanie Eulera następującego operatora [4], [5]

$$J = \frac{1}{2} \int_V [(\operatorname{rot} \vec{w})^2 + (\operatorname{grad} t')^2] dV \quad (12)$$

przy warunkach dodatkowych

$$K \equiv \int (\vec{k} \cdot \vec{w}t') dV = 1; \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (13)$$

Jeżeli operator (12) osiąga minimum, to osiąga je również operator

$$J_1 = \int_V \left\{ \frac{1}{2} (-v \operatorname{rot} \vec{w})^2 + \frac{a\beta\vec{g}}{A_0} (\operatorname{grad} t')^2 + \psi_1 \vec{k} \cdot \vec{w} t' + \psi_2 \operatorname{grad} p' \cdot \vec{w} \right\} dV \quad (14)$$

gdzie mnożniki Lagrange'a oznaczają

$$\psi_1 = +\beta g, \quad \psi_2 = -\frac{1}{Q} \quad (15)$$

Obliczając pierwszą wariację operatora (13) mamy

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \int_V (-v \operatorname{rot} \vec{w} \operatorname{rot} \delta \vec{w} + \frac{a\beta\vec{g}}{A_0} \operatorname{grad} t' \operatorname{grad} \delta t' + \\ &- \beta\vec{g} t' \delta \vec{w} - \beta\vec{g} \cdot \vec{w} \delta t - \frac{1}{Q} \operatorname{grad} p' \delta \vec{w}) dV = \\ &= \int_V \left[(-v \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} - \beta\vec{g} t' - \frac{\nabla p'}{Q}) \delta \vec{w} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta\vec{g}a}{A_0} \nabla^2 t' + \beta\vec{g} \vec{k} \cdot \vec{w} \right) \delta t' \right] dV \end{aligned}$$

Jeżeli zatem operator (12) ma osiągnąć ekstremum musi być spełnione

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} + \beta \vec{g} t' + \frac{\nabla p'}{\rho} &= 0 \\ a \nabla^2 t' + A_0 \vec{k} \cdot \vec{w} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Wykazaliśmy zatem, że rozwiązywanie równań (10) przy warunkach (11) jest równoważne poszukiwaniu ekstremum operatora (12). Powiązanie zagadnień konwekcji swobodnej z zagadnieniami rachunku wariacyjnego zostało wykorzystane przez Żuchowickiego, poprzez zastosowanie metody Galerkinia rozwiązywania równań różniczkowych, wywodzącej się bezpośrednio z rachunku wariacyjnego.

Jeżeli rozpatrywać będziemy czystą konwekcję swobodną, to równania (10) przyjmą postać

$$\begin{aligned} -\vec{g} \beta t' - \frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \vec{k} \nabla^2 w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad -A_0 w = a \nabla^2 t' \end{aligned} \quad (17)$$

Przy czym $\vec{w} = \vec{k} w$.

W dalszym ciągu pomijając będziemy indeks prim.

2. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Równania (17) należy rozwiązać przy następujących warunkach brzegowych:

$$w = 0, \quad t = t_c, \quad \lambda \frac{dt}{dr} = \lambda_c \frac{dt_c}{dr} \quad \text{dla } r = R_1 \text{ i } r = R_0 \quad (18)$$

$$\text{oraz } t_c = 0 \quad \text{dla } r = \infty$$

gdzie:

R_0, R_1 - wewnętrzny i zewnętrzny promień kanału.

Równania (17) rozwiązane zostaną metodą Galerkiną.
Niech

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

będzie ciągiem funkcji ciągłych wraz z pierwszą pochodną w przedziale R_0, R_1 , spełniających warunki brzegowe (18) i liniowo niezależnych. Rozwiązania poszukiwać będziemy w formie

$$\vec{w}^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} \vec{\varphi}_i \quad (19)$$

gdzie n oznacza n -te przybliżenie.

Wprowadzamy obecnie zmienną

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \quad \frac{1}{\chi} \leq \xi \leq 1 \quad (20)$$

gdzie $\chi = \frac{R_1}{R_0}$. Podstawiając równania (19), (20) do (17) otrzymamy

$$-A_0 w = \frac{a}{R_1^2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \quad (21)$$

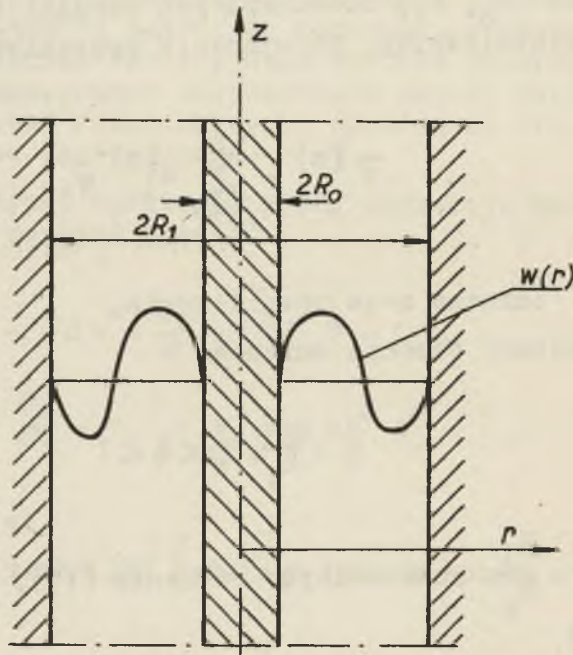
stąd

$$t = -\frac{A_0 R_1^2}{a} \left[\int_{\frac{1}{\chi}}^1 (\int_{\xi}^1 w \, d\xi) d\xi + M \ln \xi + P \right] \quad (22)$$

Stałe M i P wyznaczamy z warunków brzegowych (18) dla $\xi = 1$ i $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Załóżmy, że

$$\varphi_i = (1 - \xi^2)(\alpha\xi - 1)(1 - T\xi^2)\xi^i \quad (23)$$

Rysunek 1 przedstawia graficznie przebieg powyższego wyrażenia poprzez równanie (19).



Rys. 1. Pionowy kanał pierścieniowy

Jeżeli pierwsze z równań (17) pomnożymy przez φ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) to otrzymamy po całkowaniu

$$\int_V \xi \beta + \varphi_k \, dV + \nu \int_V \varphi_k \nabla^2 w \, dV = 0 \quad (24)$$

Niech (równ. (22))

$$t = \theta \frac{A_0 R_1^2}{a}$$

Zatem równanie (24) przyjmie postać

$$(Ka) \int_{\frac{1}{x}}^1 \xi \theta \varphi_k d\xi + \int_{\frac{1}{x}}^1 \varphi_k \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw}{d\xi} \right) d\xi = 0 \quad (25)$$

gdzie:

$$(Ka) = \frac{g \beta A_0 R_1^4}{\nu a} \quad (26)$$

Ponieważ k przyjmuje n wartości, zatem równanie (25) można przedstawić w postaci

$$QC = 0 \quad (27)$$

gdzie:

$$Q = \begin{vmatrix} [(Ka)Y_{0,0,x} + X_{0,0,x}] \dots [(Ka)Y_{n,0,x} + X_{n,0,x}] \\ \vdots \\ [(Ka)Y_{0,n,x} + X_{0,n,x}] \dots [(Ka)Y_{n,n,x} + X_{n,n,x}] \end{vmatrix} \quad (28)$$

zaś współrzędnymi wektora C są współczynniki c_i równania (19)

$$C = \begin{vmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \quad (29)$$

Wektor C jest niezerowy, jeżeli $|Q| = 0$. Warunek ten określa równocześnie krytyczny gradient temperatury za pomocą liczby $(Ka)_k$. Pierwsze przybliżenie określa równanie

$$(Ka)_k^{(1)}(\alpha) = \frac{-X_{0,0,\alpha}}{Y_{0,0,\alpha}} \quad (30)$$

Rozwiązanie równania $|Q| = 0$ prowadzi każdorazowo do zagadnienia poszukiwania pierwiastków wielomianu stopnia n , przy czym n oznacza numer kolejnego przybliżenia.

Funkcja φ_k określona równaniem (23) posiada miejsca zerowe w punktach: $1, \frac{1}{\alpha}, T^{-1/2}$. Trzecie miejsce nie jest stałe lecz zależne od rozwartości kanału, czyli od stosunku R_1/R_0 . Liczbę T wyznaczamy z równania ciągłości strugi płynu

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 2\pi\xi(1-\xi^2)(\alpha\xi-1)(1-T\xi^2)d\xi = 0 \quad (31)$$

Po wykonaniu działań uzyskuje się następujące wyrażenie

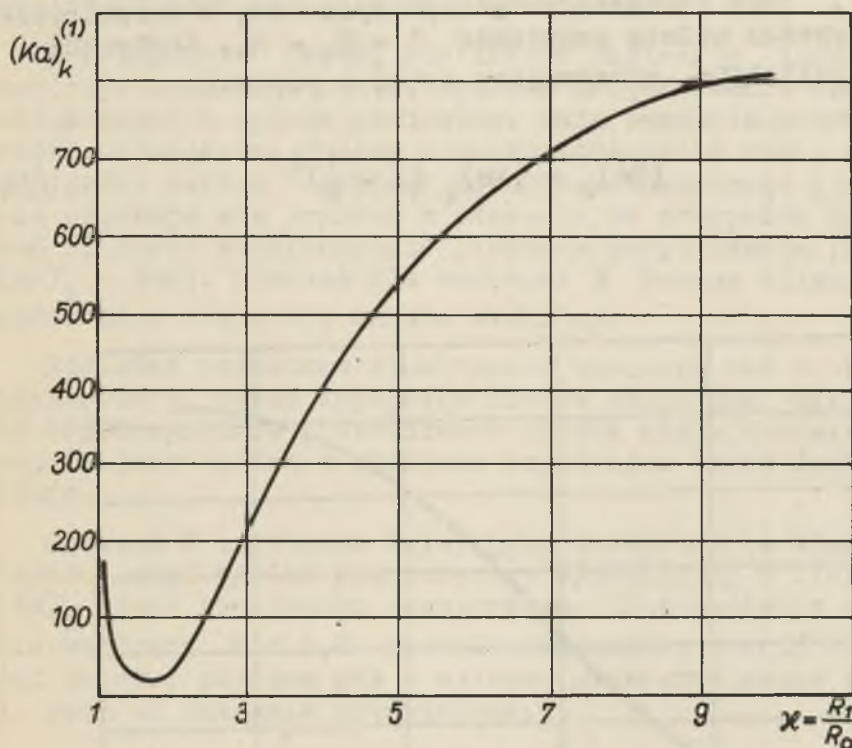
$$T = \frac{\frac{2}{15}\alpha - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{20}\frac{1}{\alpha^4}}{\frac{2}{35}\alpha - \frac{1}{12} + \frac{1}{20}\frac{1}{\alpha^4} - \frac{5}{210}\frac{1}{\alpha^6}} \quad (32)$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że T zmienia się w granicach od 2,333 ($\alpha = \infty$) do 1 ($\alpha = 1$).

Wyrażenia określające X i Y wyprowadzone zostały w sposób ogólny dla dowolnego wskaźnika i, k (równ. 28) oraz dowolnej liczby α . Ze względu na ich rozmiary wyrażenia te nie zostaną podane, nie mieszczą się bowiem na dwóch stronach arkusza A4.

Obliczenia cyfrowe przeprowadzono na maszynie cyfrowej UMC dla wartości α od 1,2 do 10, jako najczęściej wystę-

pujące w praktyce. Otrzymane wyniki pierwszego przybliżenia zostały przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Zależność pierwszego przybliżenia liczby $(Ka)_k$ od rozwartości kanału

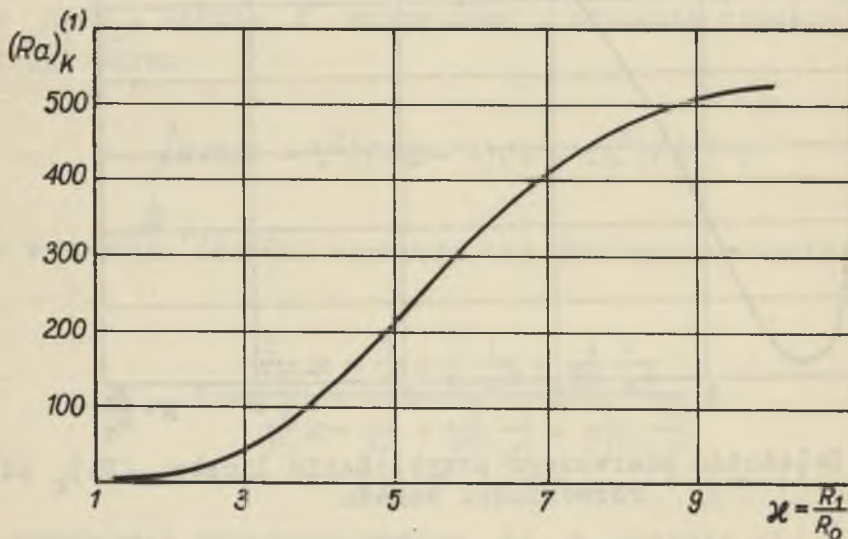
Analiza pierwszego przybliżenia pozwala na wyciągnięcie właściwych wniosków na temat najkorzystniejszego kształtu kanału oraz porównać otrzymane wyniki z wynikami dla kanałów o innej geometrii. Znajomość liczby $(Ka)_k$ pozwala na obliczenie krytycznego gradientu temperatury w kierunku osi z . Ważna jest również krytyczna liczba Reyleigha (Ra) , która nie jest równa liczbie (Ka) mimo że określone są przez podobne wyrażenia.

Liczba Rayleigha ma postać

$$(Ra) = \frac{\xi \beta \Delta l^4}{\nu a} \quad (33)$$

gdzie l jest charakterystycznym wymiarem. W rozpatrywanym przypadku należy podstawić $l = R_1 - R_0$. Krytyczną liczbę Rayleigha otrzymujemy zatem w postaci

$$(Ra)_k = (Ka)_k \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)^4 \quad (34)$$



Rys. 3. Zależność krytycznej liczby Rayleigha od zawartości kanału

Rysunek 3 przedstawia zależność $(Ra)_k$ od rozwartości κ kanału. Graniczna wartość liczby Rayleigha w przypadku $\kappa \rightarrow 1$ nie została wyznaczona, gdyż dla bardzo małych wartości κ trudno było uzyskać właściwą dokładność współczynników X oraz Y .

3. Wnioski

Przeprowadzone w niniejszej pracy obliczenia wskazują na istnienie silnej zależności warunków, przy których rozwija się konwekcja, od rozwarcia α kanału. Okazało się przy tym że wartości $\alpha \approx 1,7$ są najkorzystniejsze ze względu na możliwość powstania prądów konwektywnych.

W przypadkach zatem, gdy liczba Rayleigha jest mała, wykorzystanie tego faktu, podczas projektowania kanałów chłodzonych w sposób naturalny, może znacznie poprawić warunki chłodzenia. Należy również podkreślić fakt, że w przypadku bardzo cienkiego rdzenia wewnętrznego ($\alpha \gg 8$) nie uzyskuje się poprawy w stosunku do przypadku kanału bez elementu wewnętrznego (pierwsze przybliżenie [6] $(Ra)_k = 480$). Również dla wartości α bardzo bliskich jedności płyn staje się bardzo stabilny.

Ponieważ rozważano symetryczne względem osi z (rys. 1) perturbacje, zatem krytyczna liczba Rayleigha nie zależy od współczynników przewodzenia ciepła ciała stałego i płynu, co jest zgodne z wynikami uzyskanymi przez Żuchowickiego.

Rysunek 2 umożliwia łatwiejsze analizowanie właściwości kanału, gdyż wymiar geometryczny występujący w liczbie $(Ka)_k$ jest promieniem zewnętrznym. Ekstrapolacja wykresu dla wartości $\alpha < 1,2$ pozwala szacunkowo ocenić właściwości kanału, podczas gdy z wykresu przedstawionego na rys. 3 jest to znacznie trudniejsze.

Ważniejsze oznaczenia:

- a - współczynnik przewodzenia temperatury,
- A - gradient temperatury w kierunku osi z (równ.4),
- g - przyspieszenie siły ciężkości,
- t - temperatura,
- w - prędkość,
- p - ciśnienie,
- (Ra) - liczba Rayleigha (równ. 34),

- ν - kinematyczny współczynnik lepkości,
- β - współczynnik rozszerzalności termicznej płynu,
- λ - współczynnik przewodzenia ciepła,
- α - rozwartość kanału,
- ρ - gęstość,
- τ - czas,
- $()_0$ - dotyczy parametrów w stanie równowagi,
- $()_{od}$ - dotyczy odpowiednio dobranego stanu odniesienia.

LITERATURA

- [1] Ostroumow G.A.: Swobodnaja konwekcja w usłowjach wnutriennoj zadaczi, GITTL, Moskwa 1952.
- [2] Romanow A.G.: Issledowanije tiepłoozbmena w głuchom kanale w usłowjach jestestwiennej konwekcji, Izw. ANSSSR, OTN, nr 6, s.63, 1956.
- [3] Silveston P.L.: Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten, Forschung auf dem Gebiete des Ing.-Wesens, 1958.
- [4] Sorokin W.S.: Wariacjonnyj metod w teorii konwekcji, Prikl. Mat. Mech., z.1, 1952.
- [5] Sorokin W.S.: O stacionarnych dżiwienjach w židkosti podogrewaemoj od dołu, Prikl. Mat. Mech., t.XVIII, s.197, 1954.
- [6] Żuchowicki E.M.: Ob ustojcziwosti nierawnomierno nagrietoj židkosti w wertikalnom elipticzeskom cylindre, Prikl. Mat. Mech., s.751, 1955.
- [7] Kontorowicz L.W., Kryłow W.J.: Pribliżennyje mietody wyższego analiza, Moskwa 1952.

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ВЕРТИКАЛЬНОГО КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА
ОХЛАЖДАЮЩЕГО СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

Резюме

В работе рассмотрена проблема стабильности свободной конвекции в вертикальном кольцевом канале. Вычислено критическое число Райля для разных размеров канала. Проблема развязана при помощи метода Галеркина.

THE OPTIMUM GEOMETRICAL PARAMETERS OF THE NATURAL CONVECTIVE COOLED ANNULAR VERTICAL DUCT

Summary

In this paper the natural convection stability problem in the annular vertical duct has been considered. The critical Rayleigh number for various ratios of the outside and inside duct radiuses is evaluated. The Galerkin method has been applied for solution of this problem.