

JERZY GRYCHOWSKI

Katedra Pomp i Silników Wodnych

LAMINARNY PRZEPŁYW CIECZY W PRZESTRZENI CYLINDRYCZNEJ
OGRANICZONEJ WIRUJĄCĄ TARCZĄ

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozważania na temat laminarnego przepływu cieczy w przestrzeni ograniczonej wirującą tarczą i nieruchomymi ściankami cylindrycznej osłony.

Wyprowadzono wzory umożliwiające obliczenie grubości warstw przyściennych na wirującej tarczy i nieruchomych ściankach, w zależności od prędkości wirowania cieczy zawartej między tymi warstwami.

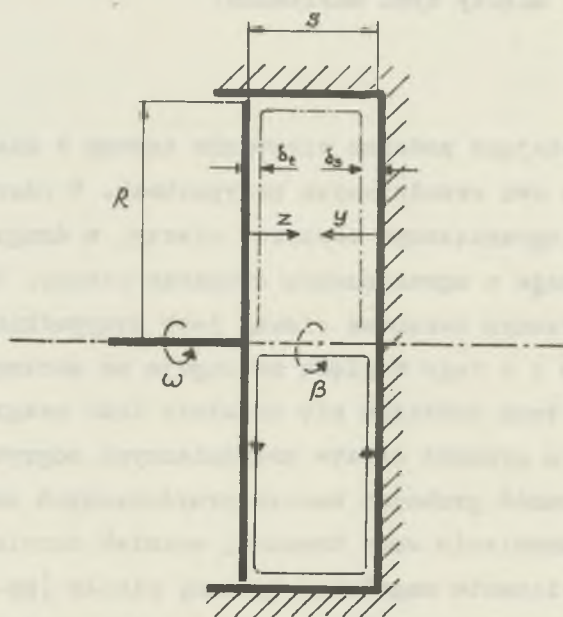
1. Wstęp

Zjawiska powstające podczas wirowania tarczy w cieczy należy rozpatrywać w dwu zasadniczych przypadkach. W pierwszym tarcza wiruje w nieograniczonym obszarze cieczy, w drugim natomiast tarcza wiruje w ograniczonym obszarze cieczy. Wirowanie tarczy w ograniczonym obszarze cieczy jest przypadkiem najczęściej spotykanym i z tego względu zasługuje na szczególną uwagę. Zagadnieniu temu poświęca się ostatnio dużo uwagi.

W zjawisku tym grubość warstw przyściennych odgrywa decydującą rolę. Znajomość grubości warstw przyściennych umożliwia: dokładniejsze określenie mocy traconej wskutek tarcia wirującej tarczy, rozwiązanie zagadnień wymiany ciepła (np. chłodzenie wirników turbin gazowych) oraz określenie rozkładu ciśnienia w otoczeniu wirnika lub tarczy odciążającej napór osiowy, co wiąże się bezpośrednio z wyznaczeniem nacisków osiowych.

Dokładniejsza więc znajomość zjawisk występujących w przestrzeniach ograniczonych ściankami kadłuba i powierzchniami elementów wirujących, umożliwia projektowanie bardziej sprawnych układów.

Analizując fizykalnie zjawisko wirowania tarczy w ograniczonym obszarze cieczy dochodzimy do wniosku, że na cząsteczki cieczy znajdujące się w pobliżu wirującej tarczy działają obwodowe siły tarcia oraz promieniowe siły odśrodkowe. W wyniku działania tych sił, cząsteczki cieczy ulegają odrzuceniu ku obwodowi tarczy, a na ich miejsce napływają cząsteczki cieczy spływające wzdłuż nieruchomych ścianek osłony. Po pewnym czasie, pod działaniem odśrodkowym wirującej tarczy, ustali się krążenie cieczy wzdłuż ograniczających ten obszar cieczonek ścianek oraz napływ cieczy ku tarczy wzdłuż jej osi (rys. 1).



Rys. 1. Schemat urządzenia z wirującą tarczą

Jak wykazały badania [1], [2], przepływ cieczy odbywa się w warstwach przyściennych, natomiast ciecz wypełniająca przestrzeń ograniczoną warstwami przyściennymi zachowuje się z dużą dokładnością jak ciało stałe wirujące ze stałą prędkością kątową β . Prędkość wirowania tego "rdzenia" cieczy zależy między innymi od parametrów geometrycznych. Grubość warstwy laminarnej wyraża się następującą przybliżoną zależnością [3]:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (1)$$

gdzie:

- δ m - grubość warstwy przyściennej (rys. 1),
- ν m²/s - współczynnik lepkości kinematycznej,
- ω 1/s - prędkość kątowa wirowania tarczy.

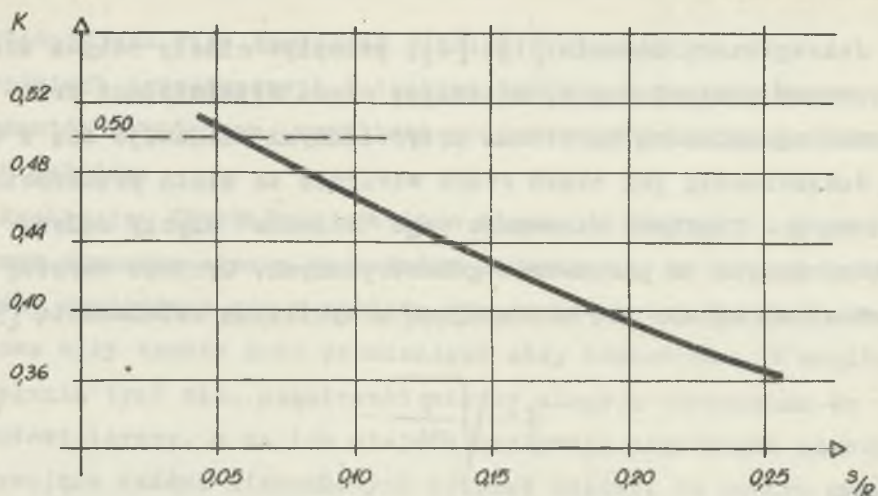
Aby określić wpływ wymiarów geometrycznych, charakteryzujących parametry konstrukcyjne, należy wzór (1) uzupełnić odpowiednią funkcją:

$$\delta = A(k) \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (2)$$

gdzie:

- $A(k)$ - poszukiwana funkcja współczynnika k ,
- k - bezwymiarowy stosunek prędkości wirowania "rdzenia" cieczy do prędkości wirowania tarczy, $k = \beta/\omega$.

Jak wykazały badania przeprowadzone w Katedrze Pomp i Silników Wodnych oraz dane zawarte w literaturze [2], stosunek prędkości wirowania rdzenia cieczy do prędkości wirowania tarczy jest funkcją stosunku szerokości szczeliny do promienia zewnętrznego tarczy (rys. 2).



Rys. 2. Wykres funkcji $k = f\left(\frac{s}{R}\right)$, (I.W. Daily, R.E. Nece)

2. Określenie grubości warstwy przyściennej na tarczy

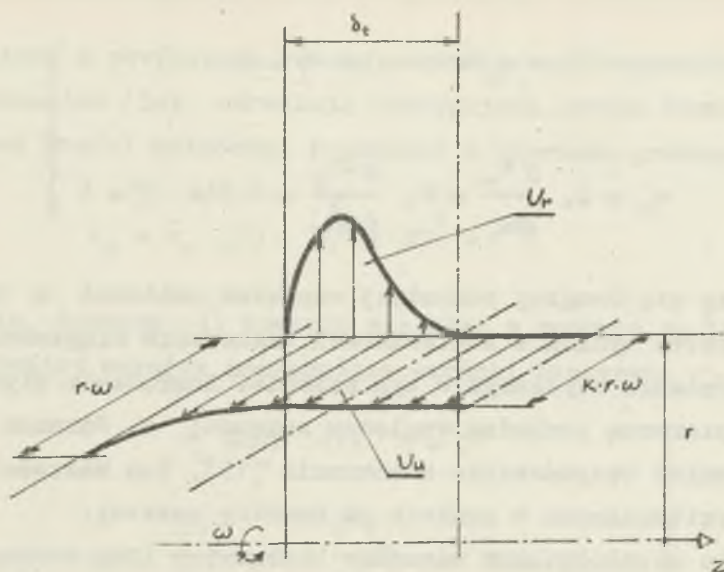
2.1. Profile prędkości w warstwie przyściennej

W celu rozwiązania równania ruchu uwzględniającego zjawiska lepkości (równanie Naviera-Stokesa), należy wyznaczyć profile składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz obwodowym.

Zgodnie z analizą fizykalną zjawiska, należy się spodziewać profilów prędkości podobnych do przedstawionych na rysunku 3. Funkcję wyrażającą wartość składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz obwodowym przyjęto, podobnie jak w pracy [4] w postaci wielomianu potęgowego:

$$v_r = a_0(r) + a_1(r)\eta + a_2(r)\eta^2 + a_3(r)\eta^3 + a_4(r)\eta^4 \quad (3)$$

$$v_u = b_0(r) + b_1(r)\eta + b_2(r)\eta^2 + b_3(r)\eta^3 \quad (4)$$



Rys. 3. Wykres profilów składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz obwodowym, na tarczy

gdzie:

- v_r m/s - składowa prędkości w kierunku promieniowym (rys. 3),
- v_u m/s - składowa prędkości w kierunku obwodowym (rys. 3),
- a_1, b_1 m/s - współczynniki równań (3) i (4), o wartościach zależnych funkcyjnie od promienia,
- η - bezwymiarowy współczynnik, charakteryzujący odległość punktu od ścianki ($\eta = \frac{z}{\delta_t}$).

Stopień wielomianów (3) i (4) uzależniony jest od ilości przyjętych warunków brzegowych.

Dla punktu na tarczy ($\eta = 0$) oraz dla punktu na granicy warstwy ($\eta = 1$), funkcja (3) powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= 0 \text{ dla } \eta = 0 \\ v_r &= 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0 \text{ dla } \eta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zerowanie się drugiej pochodnej względem zmiennej z na granicy warstwy wynika z konieczności zachowania ciągłości funkcji naprężenia stycznego w tym punkcie. Naprężenie styczne jest bowiem pierwszą pochodną względem zmiennej z . Warunek ten wynika również bezpośrednio z równania (15), dla wartości prędkości występujących w punkcie na granicy warstwy.

W celu uwzględnienia warunków brzegowych (5), równanie (3) przekształcamy do następującej postaci:

$$v_r = v_{r0} (a'_0 + a'_1 \eta + a'_2 \eta^2 + a'_3 \eta^3 - \eta^4) \quad (3a)$$

gdzie:

v_{r0} m/s - prędkość odniesienia składowej promieniowej.

Korzystając z podanych poprzednio warunków brzegowych (5), otrzymujemy następujące równania:

$$a'_0 = 0 \quad (6)$$

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 - 1 = 0 \quad (7)$$

$$a'_1 + 2a'_2 + 3a'_3 - 4 = 0 \quad (8)$$

$$2a'_2 + 6a'_3 - 12 = 0 \quad (9)$$

Wyznaczone z powyższych równań wartości współczynników a_1' wraz z równaniem (3a), określają następującą postać funkcji wyrażającej profil składowej prędkości w kierunku promieniowym:

$$v_r = v_{r0} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \quad (10)$$

Podobnie, funkcja (4) powinna spełniać w punkcie na tarczy oraz na granicy warstwy następujące warunki brzegowe:

$$\left. \begin{aligned} v_u &= \omega r \quad \text{dla } \eta = 0 \\ v_u &= k\omega r, \quad \frac{\partial v_u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dla } \eta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Z podanych warunków brzegowych (11), na podstawie podobnych jak poprzednio przekształceń, uzyskujemy następującą postać funkcji wyrażającej profil składowej prędkości w kierunku obwodowym:

$$v_u = \omega r [1 - 3\eta(1-k) + 3\eta^2(1-k) - \eta^3(1-k)] \quad (12)$$

Odpowiednie warunki brzegowe powodują, że funkcje $v_r = f(\eta)$ i $v_u = f(\eta)$ (wzory 10 i 12), mające tę samą postać (wzory 3 i 4), uzyskują zasadniczo różny obraz graficzny (rys. 3), zgodny z interpretacją fizykalną zjawiska.

2.2. Całkowanie równań warstwy przyściennej

Dla ustalonego przepływu osiowo-symetrycznego cieczy rzeczywistej, równanie ruchu Naviera-Stokesa może być przedstawione, dla odpowiednich kierunków, w następującej postaci [5]:

kierunek promieniowy

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_u^2}{r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (13)$$

kierunek obwodowy

$$\frac{v_r}{r} \frac{\partial (rv_u)}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_u}{\partial z} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_u}{\partial r} \right) - \frac{v_u}{r^2} + \frac{\partial^2 v_u}{\partial z^2} \right] \quad (14)$$

gdzie:

- v_z m/s - składowa prędkości w kierunku osiowym,
- μ kg/m³ - gęstość cieczy,
- p N/m² - ciśnienie cieczy w rozpatrywanym punkcie.

Wprowadzając do równań (13) oraz (14) przybliżenia wynikające z teorii warstwy przyściennej, powyższe równania można przedstawić w następującej postaci:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_u^2}{r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (15)$$

$$v_r \frac{\partial v_u}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_u}{\partial z} + \frac{v_u v_r}{r} = \nu \frac{\partial^2 v_u}{\partial z^2} \quad (16)$$

W równaniach (15) i (16) pominięto wpływ sił masowych.

Aby uzyskać całkowite przyrosty wielkości występujących w tych równaniach, należy scałkować równania w granicy od punktu na tarczy do punktu na granicy warstwy przyściennej. Całkując równanie (16) otrzymujemy:

$$\int_0^{\delta t} v_r \frac{\partial v_u}{\partial r} dz + \int_0^{\delta t} v_z \frac{\partial v_u}{\partial z} dz + \int_0^{\delta t} \frac{v_r v_u}{r} dz = \nu \left. \frac{\partial v_u}{\partial z} \right|_0 \quad (16a)$$

Podstawiając do powyższego równania w miejsce prędkości v_r i prędkości v_u odpowiednie ich wyrażenia funkcyjne (10) i (12) oraz zakładając, że wartość prędkości v_z jest równa zero na granicach przedziału, uzyskujemy następujące rozwiązanie:

$$2 v_{ro} \cdot \delta t \left[\frac{1}{20} - \frac{9}{280}(1-k) \right] = \nu \cdot 3(1-k) \frac{r}{\delta t} \quad (17)$$

Wyznaczone z powyższego równania, wyrażenie określające wartość prędkości odniesienia, składowej promieniowej, jest następującej postaci:

$$v_{ro} = \frac{420(1-k)}{14 - 9(1-k)} \cdot \frac{\nu}{\delta t^2} \cdot r \quad (18)$$

Podobnie, całkując równanie (15) otrzymujemy:

$$\int_0^{\delta t} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dz + \int_0^{\delta t} v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} dz - \int_0^{\delta t} \frac{v^2}{r} dz = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\delta t} \frac{\partial p}{\partial r} dz + \nu \left. \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|_0 \quad (15a)$$

W obszarze warstwy przyściennej, na danym promieniu, można założyć, że panuje stałe ciśnienie równe:

$$\frac{dp}{dr} = \mu k^2 \omega^2 r \quad (19)$$

gdzie:

\bar{p} N/m² - średnie ciśnienie panujące w warstwie przyściennej.

Korzystając z tego przybliżenia oraz równań (10) i (12) uzyskujemy następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{252} v_{ro} \frac{\partial v_{ro}}{\partial r} \delta_t - \omega^2 r \delta_t \left[1 - \frac{3}{2}(1-k) + \frac{9}{14}(1-k)^2 \right] = \\ = -k^2 \omega^2 r \delta_t - \nu \frac{v_{ro}}{\delta_t} \end{aligned} \quad (20)$$

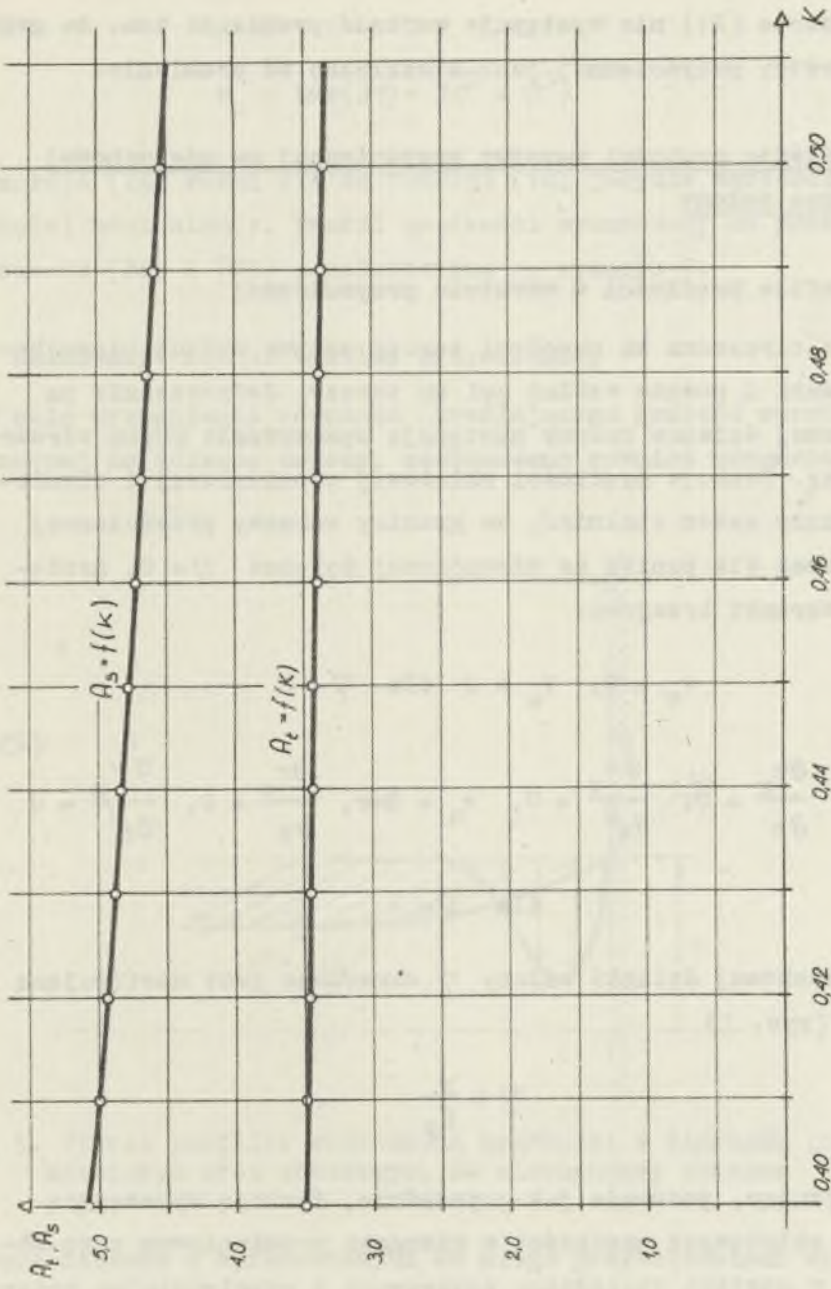
Uzyskane rozwiązania (18) i (20) umożliwiają wyznaczenie równania określającego grubość warstwy przyściennej w zależności od średniej prędkości wirowania cieczy:

$$\delta_t = A_t \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (21)$$

Funkcja A_t ma następującą postać:

$$A_t = 4,09 \left\{ \frac{(1-k) [21 - 11(1-k)]}{[14 - 9(1-k)]^2 \left[1 - \frac{3}{2}(1-k) + \frac{9}{14}(1-k)^2 - k^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (22)$$

Obraz graficzny funkcji $A_t(k)$ przedstawiono na rysunku 4. Z wykresu na rys. 4 wynika, że w miarę wzrostu prędkości wirowania "rdzenia" cieczy, grubość warstewki przyściennej maleje. Ponieważ współczynnik k jest funkcją szerokości szczeliny (rys. 2), stąd wniosek że wraz ze zmianą szerokości szczeliny zawartej między tarczą a osłoną, zmianie ulega również grubość warstwy przyściennej na tarczy.



Rys. 4. Wykres funkcji $A_t = f(\kappa)$ oraz $A_s = f(\kappa)$

We wzorze (21) nie występuje wartość promienia tzn. że grubość warstwy przyściennej jest niezależna od promienia.

3. Określenie grubości warstwy przyściennej na nieruchomej ścianie osłony

3.1. Profile prędkości w warstwie przyściennej

Ciecz odrzucona ku obwodowi tarczy spływa wzdłuż nieruchomej ścianki i podąża wzdłuż osi ku tarczy. Jednocześnie na nieruchomej ściance osłony następuje wyhamowanie ruchu wirowego cieczy. Funkcje prędkości składowej promieniowej i obwodowej powinny zatem spełniać, na granicy warstwy przyściennej $\eta = 1$ oraz dla punktu na nieruchomej ścianie $\eta = 0$, następujące warunki brzegowe:

$$v_r = 0, \quad v_u = 0 \quad \text{dla} \quad \eta = 0$$

$$v_r = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0, \quad v_u = k\omega r, \quad \frac{\partial v_u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_u}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

$$\text{dla} \quad \eta = 1$$

Dla nieruchomej ścianki osłony η określone jest następującą funkcją (rys. 1)

$$\eta = \frac{z}{\delta_s}$$

Przyjmując, podobnie jak poprzednio, funkcję wyrażającą wartość składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz obwodowym w postaci wielomianu potęgowego i uwzględniając podane powyżej warunki brzegowe, otrzymujemy:

$$v_r = v'_{r0} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \quad (24)$$

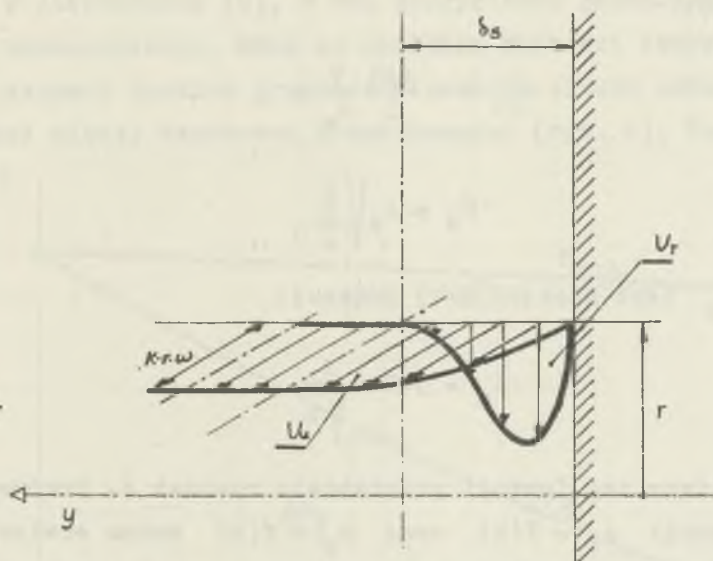
oraz:

$$v_u = k\omega r(3\eta - 3\eta^2 + \eta^3) \quad (25)$$

Funkcja (24) różni się od funkcji (10) jedynie wartością prędkości odniesienia. Profil prędkości wyznaczony na podstawie wzorów (24) i (25) przedstawiono na rysunku 5.

3.2. Całkowanie równań warstwy przyściennej

W celu wyznaczenia równania określającego grubość warstwy laminarnej na ścianie osłony, zastosowano również równania



Rys. 5. Wykres profili składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz obwodowym, na nieruchomej ścianie

Naviera-Stokesa z wprowadzonymi do niego przybliżeniami wynikającymi z teorii warstwy przyściennej. Całkując równania (15) i (16) w granicy od punktu na nieruchomej ścianie do punktu

na granicy warstwy oraz wykorzystując wyprowadzone funkcje prędkości (24) i (25), uzyskujemy następujące równania:

$$2 v'_{ro} \cdot \frac{9}{280} \delta_s = -3v \frac{r}{\delta_s} \quad (26)$$

$$\frac{1}{252} v'_{ro} \frac{\partial v_{ro}}{\partial r} \delta_s - \frac{9}{14} k^2 \omega^2 r \delta_s = -k^2 \omega^2 r \delta_s - v \frac{v'_{ro}}{\delta_s} \quad (27)$$

Otrzymane równania umożliwiają wyznaczenie funkcji określającej prędkość odniesienia oraz funkcji określającej grubość warstwy przyściennej w zależności od średniej prędkości wirowania cieczy:

$$v'_{ro} = -\frac{140}{3} \frac{v}{\delta_s} r \quad (28)$$

$$\delta_s = A_s \sqrt{\frac{v}{\omega}} \quad (29)$$

Funkcja A_s jest następującej postaci:

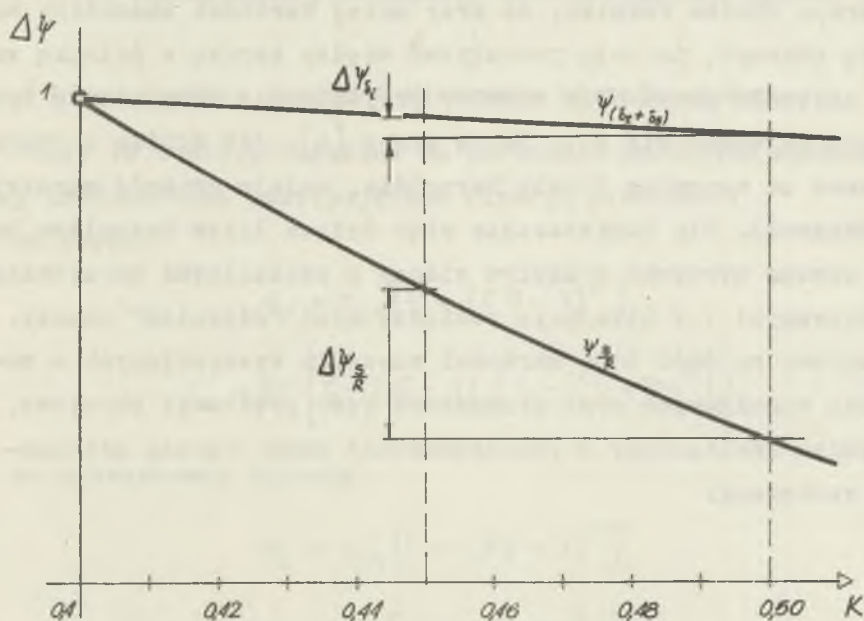
$$A_s = 3,212 \sqrt{\frac{1}{k}} \quad (30)$$

Obraz graficzny tej funkcji przedstawia rysunek 4. Porównując wykresy funkcji $A_t = f(k)$ oraz $A_s = f(k)$ można stwierdzić, że grubość warstwy przyściennej na nieruchomej ścianie jest około 30% większa w stosunku do grubości warstwy przyściennej na wirującej tarczy. W miarę spadku średniej prędkości wirowania "rdzenia" cieczy, grubości warstw przyściennych wzrastają. Przyrost ten dla obu warstw nie jest jednakowy, dla warstwy na nieruchomej ścianie jest on większy. Dla wartości współczynnika k malejącej w granicy do zera, równanie (21) ważne dla

wirującej tarczy, opisuje w pewien sposób przypadek wirowania tarczy w nieskończonym obszarze cieczy. Wartość funkcji A_t odpowiadająca temu przypadkowi wynosi $A_t \approx 4,4$. W dostępnej literaturze [1] podano przybliżone rozwiązanie przypadku wirowania tarczy w nieograniczonym obszarze cieczy i wyznaczona wartość tego współczynnika wynosi $A_t = 3,71$. Choć nie można porównywać obu tych rozwiązań, należy zwrócić uwagę na dużą zbieżność tych wartości.

4. Wpływ szerokości szczeliny na grubość warstw przyściennych

Jak wynika z przeprowadzonych doświadczeń oraz danych zawartych w literaturze [2], w obu przypadkach przepływu laminarnego i turbulentnego, wraz ze spadkiem wartości szerokości szczeliny wzrasta średnia prędkość wirowania cieczy zawartej w przestrzeni między warstwami przyściennymi (rys. 2). Wzrost śred-



Rys. 6. Wykres zredukowanych wartości szerokości szczeliny oraz sumy grubości warstw przyściennych

niej prędkości wirowania "rdzenia" cieczy powoduje również spadek grubości warstw przyściennych (rys. 4). Aby prześledzić, w jakim stopniu następuje spadek grubości warstw przyściennych w stosunku do spadku wartości szerokości szczeliny s , na rysunku 6 przedstawiono wykres odpowiednich wielkości zredukowanych. Wykres na rysunku 6 przedstawia w sposób poglądowy obraz graficzny zredukowanego stosunku $\frac{s}{R}$ oraz zredukowanej sumy grubości warstw przyściennych na tarczy i na nieruchomej ściance w stosunku do ich wartości odpowiadających wartości $k = 0,4$. Z analizy wykresu wynika, że dla odpowiedniego spadku szerokości szczeliny, obserwowany spadek sumy grubości warstw przyściennych jest wielokrotnie mniejszy:

$$\Delta\psi_{\delta_1} \ll \Delta\psi \frac{s}{R} \quad (31)$$

Z wykresu wynika również, że przy małej wartości szczeliny może się zdarzyć, że cała przestrzeń między tarczą a ścianką zajęta zostanie przez obie warstwy przyścienne. Przypadkiem tego rodzaju zajmował się S.L. Soo w pracy [6]. Jak wynika z wzoru (1) wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa, maleje grubość warstwy przyściennej. Dla dostatecznie więc dużych liczb Reynoldsa możemy zawsze otrzymać przepływ cieczy z oddzielnymi warstewkami przyściennymi i z wirującym pomiędzy nimi "rdzeniem" cieczy. Ze względu na dość duże wartości szczelin występujących w maszynach wirnikowych oraz stosunkowo duże prędkości obrotowe, przypadek analizowany w przedstawionej pracy będzie najczęściej spotykany.

5. Porównanie otrzymanego rozwiązania z danymi zawartymi w literaturze

W pracy [1] podane zostały również wzory umożliwiające obliczenie grubości warstwy przyściennej na wirującej tarczy i na nieruchomej ścianie obudowy, w następującej postaci:

$$\delta_t = \left[\left(\frac{20 + 20\zeta}{7 + 3\zeta} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{15} + \frac{\zeta}{5}} \right] \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \quad (31)$$

oraz

$$\delta_s = \left(\frac{20}{7} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{15}{7}} \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \quad (32)$$

gdzie:

ζ - bezwymiarowy stosunek, którego wartość wynosi

$$\zeta = \frac{1}{k},$$

β 1/s - średnia prędkość wirowania rdzenia cieczy.

Wzory te zostały uzyskane na podstawie podobnych rozważań przy zastosowaniu następujących funkcji prędkości:

na tarczy

$$v_r = v_{r1} [1 - (2\eta - 1)^2] \quad (33)$$

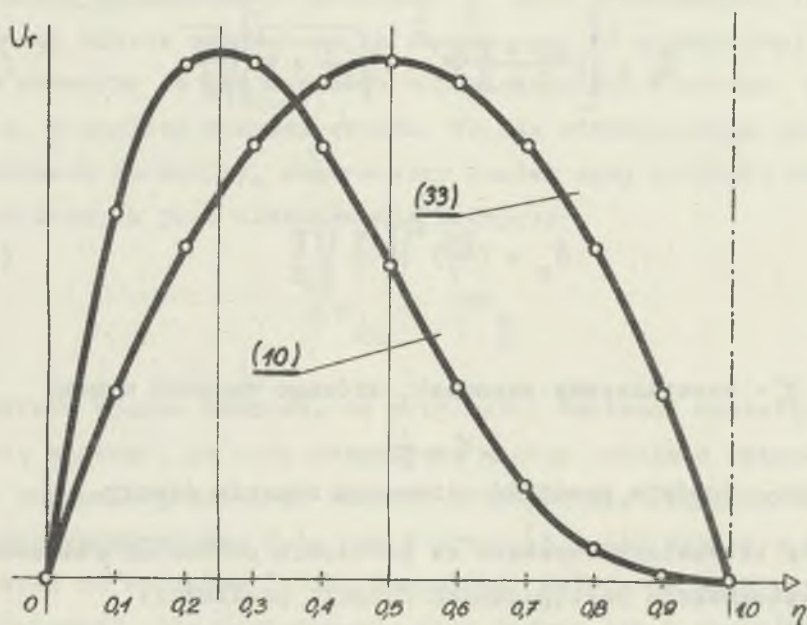
$$v_u = \beta r \left\{ \zeta - (\zeta - 1) [1 - (1 - \eta)^2] \right\} \quad (34)$$

na nieruchomej ścianie

$$v_r = v_{r1}' [1 - (2\eta - 1)^2] \quad (35)$$

$$v_u = \beta r [1 - (1 - \eta)^2] \quad (36)$$

Wykorzystane funkcje (33), (34), (35), (36) składowych prędkości w kierunku promieniowym oraz stycznym są wielomianami drugiego stopnia i nie spełniają wszystkich warunków brzegowych. Szczególnie funkcja określająca składową promieniową wydaje się być zbyt dużym przybliżeniem, nie odzwierciedlającym rzeczywistego kształtu prędkości w warstwie przyściennej. Dla po-



Rys. 7. Wykresy funkcji (10) i (33)

równania, na rysunku 7 przedstawiono wykresy funkcji składowych prędkości w kierunku promieniowym, uzyskane na podstawie równań (10) i (33).

Wartości funkcji A_t i A_s uzyskane na podstawie równań (31) oraz (32) są przeciętnie o 30% mniejsze. Stąd wniosek, że postać przyjętych funkcji prędkości jest niezmiernie ważna dla dokładności rozwiązania.

Korzystając z równań (15) i (16), można uzyskać dodatkowe warunki brzegowe, zwiększające stopień użytych do rozwiązania wielomianów. Warunki te wynikają z podstawienia do tych równań wartości prędkości występujących na granicy warstwy przyściennej. Rozwiązanie zagadnienia przy użyciu wyznaczonych w ten sposób funkcji powoduje, że otrzymane równania mają bardzo skomplikowaną strukturę, mało przydatną w praktycznym użyciu. Natomiast wartości liczbowe rozwiązań różnią się niewiele.

LITERATURA

- [1] DORFMAN L.A.: Gidrodinamiczeskoje soprotiwlenie i tiepłotodacza wraszczajuszczihsjia tieł. Gosudarstwiennoje izdatielstwo fizykomatematycznej literatury, Moskwa 1960.
- [2] DAILY J.W., NECE R.E.: Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating disks. *Journal of Basic Engineering*, March 1960.
- [3] PRANDTL L.: *Dynamika przepływów*. PWN, Warszawa 1956.
- [4] NABIL A., HASSAN: Laminar flow along a vertical wall. *Journal of Applied Mechanics*, September 1967.
- [5] TROSKOŁAŃSKI A.T.: *Hydromechanika*. PWT, Warszawa, 1962.
- [6] SOO S.L.: Laminar flow over an enclosed rotating disk. *Trans. ASME vol. 80*, 1958.

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ
ОГРАНИЧЕННЫМ ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ

Р е з ю м е

В статье рассмотрено некоторые вопросы ламинарного течения вокруг диска вращающегося в ограниченном пространстве.

Приведен метод приближенного расчета ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске и на неподвижной стенке.

LAMINAR FLOW IN A RIGHT-CYLINDRICAL CHAMBER ENCLOSED
WITH ROTATING DISK

S u m m a r y

This paper presents the consideration associated with the rotation of a smooth plane disk enclosed in right-cylindrical chamber.

In the present paper a solution is given for determination the thickness of the laminar boundary layer on a rotating disk and housing.