

GERARD KOSMAN

Katedra Ciepłych Maszyn Wirnikowych

STAN NAPRĘŻENIA W SILNIE NAGRZANYCH GRUBOŚCIENNYCH
POWŁOKACH WALCOWYCH I KULISTYCH

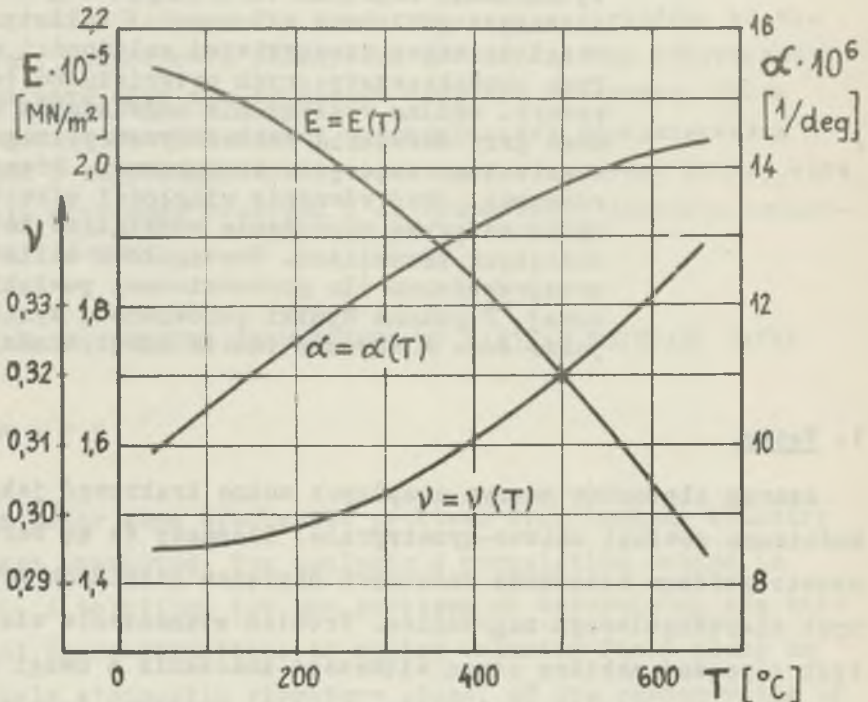
Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczenia naprężeń termicznych w grubościennych powłokach walcowych i kulistych z uwzględnieniem rzeczywistej zależności stałych charakterystycznych materiału od temperatury. Ogólne rozwiązanie zagadnienia otrzymano przy założeniu osiowo-symetrycznego, niestacjonarnego pola temperatury. Równanie równowagi oraz równanie ciągłości odkształceń wyrażone przez naprężenia rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń. Szczegółowe obliczenia przeprowadzono dla grubościennej powłoki walcowej. Uzyskane wyniki porównano z wynikami jakie daje klasyczna teoria sprężystości.

1. Wstęp

Szereg elementów maszyn ciepłych można traktować jako grubościenne powłoki osiowo-symetryczne. Elementy te są bardzo często poddane działaniu znacznych naprężeń ciepłych wywołanych nierównomiernym nagrzaniem. Problem wyznaczenia wielkości tych naprężeń nabiera coraz większego znaczenia z uwagi na stosowanie, ze względów ekonomicznych coraz wyższych temperatur czynnika roboczego.

Spotykane w literaturze technicznej [1], [2], [3], [4], [5] wzory określające wielkość naprężeń w grubościennych powłokach osiowo-symetrycznych nie uwzględniają zmienności stałych mate-

riałowych od temperatury. Przy analizowaniu stanu naprężeń w elementach maszyn ciepłych założenie takie byłoby znacznym uproszczeniem ze względu na występowanie dużych gradientów temperatur. W przypadku materiałów stosowanych w budowie turbin przy zachodzących zmianach temperatur, własności mechaniczne materiałów ulegają znacznym zmianom. Dla zilustrowania wpływu temperatury na własności mechaniczne materiałów przedstawiono na rys. 1 zależności modułu Younga E , współczynnika Poissona ν i współczynnika rozszerzalności cieplnej α od temperatury dla staliwa L17HMF wg [6].



Rys. 1. Zależność stałych charakterystycznych materiału od temperatury dla staliwa L 17 HMF

W niniejszej pracy zostanie przedstawiona przybliżona metoda wyznaczenia naprężeń cieplnych w silnie nagranych grubościennych powłokach walcowych i kulistych. Podana metoda pozwala w sposób prosty a jednocześnie dostatecznie dokładny wyznaczyć naprężenia wywołane nierównomiernym nagraniem powłoki z uwzględnieniem zmienności stałych materiałowych od temperatury.

2. Stan naprężenia w grubościennej powłoce walcowej

Rozpatrzmy długą, grubościenną powłokę walcową poddaną działaniu niestacjonarnego pola temperatury. Zakładamy, że przebieg temperatury $T(r,t)$ jest osiowo-symetryczny i nie zależy od współrzędnej z w kierunku osiowym. Stałe charakterystyczne materiału (E, α i ν) zależą od temperatury i tym samym są funkcjami zmiennych r i t :

$$E = E(r,t); \quad \alpha = \alpha(r,t); \quad \nu = \nu(r,t)$$

Stan naprężenia wywołany nierównomiernym nagraniem powłoki traktujemy jako quasi-statyczny. W podstawowych równaniach teorii sprężystości można więc pominąć wyrazy inercyjne. Założenie to sprawia, że czas t jest tylko parametrem.

Punktem wyjścia do wyznaczenia stanu naprężeń są następujące równania:

1. Równanie równowagi powłoki [1]

$$r \frac{d}{dr}(\sigma_r) + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (1)$$

2. Związki między naprężeniami i odkształceniami [1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] + \alpha T\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie:

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ - naprężenia promieniowe, obwodowe i osiowe,
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ - wydłużenia względne w kierunku promieniowym,
 obwodowym i osiowym.

Ze względu na osiową symetrię zagadnienia odkształcenia i naprężenia styczne równają się zeru.

Ponieważ temperatura nie zmienia się w kierunku osiowym można przyjąć, że w dostatecznej odległości od końców przekroje poprzeczne pozostają płaskie a wydłużenie jednostkowe w kierunku osiowym jest wielkością stałą: $\varepsilon_z = \text{const}$. Założymy na wstępie, że $\varepsilon_z = 0$, a następnie wprowadzimy odpowiednie poprawki. Z trzeciego równania (2) otrzymujemy

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) - \alpha E T \quad (3)$$

Po uwzględnieniu ostatniej zależności równania (2) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\varphi \right) + (1+\nu)\alpha T \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\varphi - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) + (1+\nu)\alpha T\end{aligned}\quad (4)$$

gdzie:

u - przemieszczenie promieniowe.

Po wyeliminowaniu przemieszczenia u z równań (4) otrzymujemy równanie ciągłości odkształceń wyrażone przez naprężenia

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E}(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\varphi) + (1+\nu)\alpha T = \\ & = \frac{d}{dr} \left[\frac{r(1-\nu^2)}{E} (\sigma_\varphi - \frac{1-\nu}{\nu} \sigma_r) + r(1+\nu)\alpha T \right] \end{aligned} \quad (5)$$

które po przekształceniach można napisać w postaci

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \sigma_\varphi \right) + \frac{1+\nu}{Er} \sigma_\varphi = \\ & = \frac{1+\nu}{Er} \sigma_r + \frac{d}{dr} \left[\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_r - (1+\nu)\alpha T \right] \end{aligned} \quad (5a)$$

Rozważane zagadnienie brzegowe sprowadza się do rozwiązania układu równań (1) i (5a) z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} \quad \text{dla } r = r_1 \\ \sigma_r &= \sigma_{r_2} \quad \text{dla } r = r_2 \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

- r_1, r_2 - wewnętrzny i zewnętrzny promień powłoki
- $\sigma_{r_1}, \sigma_{r_2}$ - naprężenia promieniowe na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej powłoki.

Po scałkowaniu równania (1) względem σ_r a równania (5a) względem σ_φ otrzymujemy

$$\sigma_r = \int_{r_1}^r \frac{1}{r} (\sigma_\varphi - \sigma_r) dr + \sigma_{r_1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} = & \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r + F(r) + \\ & + \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \left[A + \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r dr \right] \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F(r) = & \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T f(r) dr - \frac{\alpha ET}{1-\nu} + \frac{Er_1(1+\nu_1)\alpha_1 T_1}{(1-\nu^2)r f(r)} \\ A = & \frac{(1-\nu_1^2)r_1}{E_1} \left[\sigma_{\varphi_1} - \frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma_{r_1} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$f(r) = \exp \left[\int_{r_1}^r \frac{\nu}{(1-\nu)r} dr \right]$$

Wielkości z indeksem 1 odpowiadają promieniowi wewnętrznemu $r = r_1$. Równanie (7) rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń [3]. Występującą w równaniu (7) różnicę naprężeń $(\sigma_{\varphi} - \sigma_r)$ wyznaczamy z równania (8)

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} - \sigma_r = & F(r) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r + \frac{AE}{(1-\nu^2)r f(r)} + \\ & + \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r dr \end{aligned} \quad (10)$$

Pierwsze przybliżenie różnicy naprężeń otrzymujemy z równania (10) przyjmując $\sigma_r = 0$

$$(\sigma_\varphi - \sigma_r)^{(1)} = F(r) + A^{(1)} \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \quad (11)$$

gdzie:

$$A^{(1)} = \frac{(1-\nu_1^2)r_1}{E_1} \left[\sigma_{\varphi_1}^{(1)} - \frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma_{r_1} \right]$$

Ponieważ nie znamy wartości $\sigma_{\varphi_1}^{(1)}$ stałą $A^{(1)}$ wyznaczmy z warunku brzegowego na powierzchni zewnętrznej. Wstawiając (11) do (7) otrzymujemy

$$\sigma_r^{(1)} = \int_{r_1}^r \frac{F(r)}{r} dr + A^{(1)} \int_{r_1}^r \frac{E}{(1-\nu^2)r^2 f(r)} dr + \sigma_{r_1} \quad (12)$$

Stała $A^{(1)}$ po uwzględnieniu warunku (6) przyjmuje postać

$$A^{(1)} = \frac{\sigma_{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{F(r)}{r} dr - \sigma_{r_1}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{(1-\nu^2)r^2 f(r)} dr} \quad (13)$$

Korzystając ze związków (12) i (10) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 (\zeta_{\varphi} - \zeta_r)^{(2)} = & F(r) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \zeta_r^{(1)} + A^{(2)} \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} + \\
 & + \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \zeta_r^{(1)} dr \quad (14)
 \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu ostatniej zależności do równania (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \zeta_r^{(2)} = & - \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \zeta_r^{(1)} - \right. \\
 & - \left. \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \zeta_r^{(1)} dr \right] dr + \\
 & + \int_{r_1}^r \frac{F(r)}{r} dr + A^{(2)} \int_{r_1}^r \frac{E}{(1-\nu^2)r^2 f(r)} dr + \zeta_{r_1} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Stałą A wyznaczamy z warunku (6)

$$\begin{aligned}
 A^{(2)} = & A^{(1)} + \\
 & + \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \zeta_r^{(1)} - \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \zeta_r^{(1)} dr \right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{(1-\nu^2)r^2 f(r)} dr} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Powtarzając tok rozumowania dochodzimy do zależności określającej n-te przybliżenie naprężeń promieniowych. Zależność ta przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(n)} = & - \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n-1)} - \right. \\ & \left. - \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr + \\ & + \int_{r_1}^r \frac{F(r)}{r} dr + A^{(n)} \int_{r_1}^r \frac{E}{(1-\nu^2)r^2 f(r)} dr + \sigma_{r_1} \end{aligned} \quad (17)$$

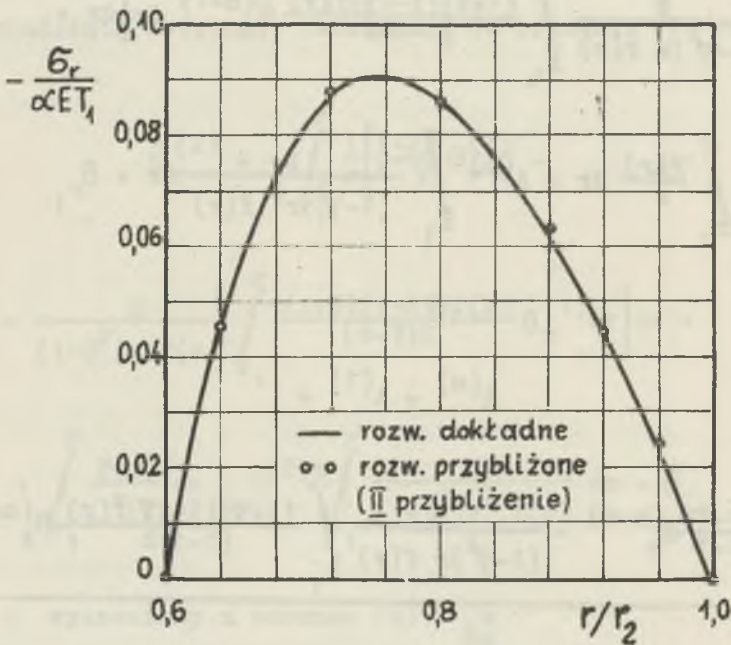
gdzie:

$$A^{(n)} = A^{(1)} +$$

$$\begin{aligned} + \frac{\int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n-1)} - \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} dr} \end{aligned} \quad (18)$$

W oparciu o zależności (12), (15) i (17) przeprowadzono obliczenia naprężeń promieniowych w powłoce walcowej o stosunku średnic $d_1/d_2 = 0,6$ dla przypadku, gdy temperatura powierzchni wewnętrznej jest równa T_1 , a temperatura powierzchni zewnętrznej jest równa zeru. Żeby można było porównać otrzymane

wyniki z wynikami rozwiązań ścisłych i sprawdzić przedstawioną metodę, do obliczeń przyjęto stałe wartości E , α i ν . Wyniki obliczeń przybliżonych (punkty) i dokładnych (linia ciągła) zestawiono na rys. 2. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że drugie przybliżenie daje zadowalająco dokładne wyniki. W obliczeniach praktycznych można więc ograniczyć się do drugiego przybliżenia.



Rys. 2. Rozkład naprężeń promieniowych w powłoce walcowej. Porównanie wyników rozwiązania dokładnego i przybliżonego dla E , ν i $\alpha = \text{const}$

Gdy znamy wielkość naprężeń promieniowych można z zależności (3) i (8) obliczyć naprężenia obwodowe i osiowe

$$\sigma_{\varphi}^{(n)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n)} + F(r) + \frac{E}{(1-\nu^2)r f(r)} \left[\int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)f(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n)} dr + A^{(n)} \right] \quad (19)$$

$$\sigma_z^{(n)} = \nu \left[\sigma_r^{(n)} + \sigma_{\varphi}^{(n)} \right] - \alpha ET \quad (20)$$

Naprężenia osiowe wyznaczone z zależności (20) odpowiadają założeniu $\epsilon_z = 0$. Do naprężeń tych należy dodać stałe naprężenie σ_z' dobrane w ten sposób, aby wypadkowa siła na końcach była równa zeru. Wypadkowa naprężeń osiowych (20) wynosi

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z^{(n)} 2\pi r dr$$

a wypadkowa stałego naprężenia σ_z' jest równa $\sigma_z' \pi (r_2^2 - r_1^2)$. Wartość σ_z' , sprowadzająca całkowitą siłę osiową do zera, dana jest więc wzorem

$$\sigma_z' = - \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z^{(n)} r dr \quad (21)$$

3. Stan naprężenia w grubościennej powłoce kulistej

Rozpatrzmy grubościenną powłokę kulistą poddaną działaniu niestacjonarnego, symetrycznego względem środka pola temperatury. Stan naprężenia wywołany nierównomiernym nagraniem powłoki traktujemy podobnie jak poprzednio jako quasi-statyczny.

Równanie równowagi powłoki w kierunku promieniowym przyjmuje postać [1]

$$r \frac{d}{dr} (\sigma_r) + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (22)$$

Wychodząc ze związków między naprężeniami i odkształceniami dochodzimy do równania ciągłości odkształceń wyrażonego przez naprężenia, które dla kuli przyjmuje postać

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1-\nu}{E} \sigma_\varphi \right) + \frac{1+\nu}{rE} \sigma_\varphi = \frac{1+\nu}{rE} \sigma_r + \frac{d}{dr} \left(\frac{\nu}{E} \sigma_r - \alpha T \right) \quad (23)$$

Równania (22) i (23) łącznie z warunkami brzegowymi (6) stanowią układ równań, z którego można wyznaczyć naprężenia σ_r i σ_φ . Po rozwiązaniu równania (22) względem σ_r , a równania (23) względem σ_φ otrzymujemy

$$\sigma_r = \int_{r_1}^r \frac{2}{r} (\sigma_\varphi - \sigma_r) dr + \sigma_{r_1} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r + G(r) + \frac{E}{(1-\nu)r g(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)g(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r dr + \\ + \frac{BE}{(1-\nu)r g(r)} \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie:

$$G(r) = \frac{E}{(1-\nu)r} \int_{r_1}^r \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T g(r) dr - \frac{\alpha ET}{1-\nu} + \frac{E r_1 \alpha_1 T_1}{(1-\nu)r g(r)}$$

$$B = \frac{(1-\nu_1)r_1}{E_1} (\sigma_{\varphi_1} - \frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma_{r_1}) \quad (26)$$

$$g(r) = r^2(r) = \exp \left[\int_{r_1}^r \frac{2\nu}{(1-\nu)r} dr \right]$$

Równanie (24) rozwiązujemy podobnie jak równanie (7) metodą kolejnych przybliżeń. Ponieważ tok rozumowania jest podobny do poprzedniego ograniczymy się tylko do podania końcowych zależności. Pierwsze przybliżenie naprężeń promieniowych wyznaczamy z wzoru

$$\sigma_r^{(1)} = \int_{r_1}^r \frac{2}{r} G(r) dr + B^{(1)} \int_{r_1}^r \frac{2E}{(1-\nu)r^2 g(r)} dr + \sigma_{r_1} \quad (27)$$

gdzie:

$$B^{(1)} = \frac{\sigma_{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{2}{r} G(r) dr - \sigma_{r_1}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{2E}{(1-\nu)r^2 g(r)} dr} \quad (28)$$

Zależność określająca n-te przybliżenie naprężeń promieniowych w powłoce kulistej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(n)} = & - \int_{r_1}^r \frac{2}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n-1)} - \right. \\ & \left. - \frac{E}{(1-\nu)r g(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)g(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr + \\ & + \int_{r_1}^r \frac{2}{r} G(r) dr + B^{(n)} \int_{r_1}^r \frac{2E}{(1-\nu)r^2 g(r)} dr + \sigma_{r_1} \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B^{(n)} = & B^{(1)} + \\ & + \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{2}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n-1)} - \frac{E}{(1-\nu)r g(r)} \int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)g(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{2E}{(1-\nu)r^2 g(r)} dr} \end{aligned} \quad (30)$$

Naprężenia obwodowe wyznaczamy z wzoru

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(n)} &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r^{(n)} + G(r) + \\ &+ \frac{E}{(1-\nu)r} g(r) \left[\int_{r_1}^r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)g(r)}{(1-\nu)E} \sigma_r^{(n)} dr + B^{(n)} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

4. Szczególne przypadki

Podane powyżej zależności można dla celów praktycznych uprościć nie zmniejszając jednocześnie ich przydatności. W przypadku materiałów stosowanych w budowie maszyn ciepłych przy zachodzących zmianach temperatur, współczynnik Poissona ν zmienia się w granicach 0,3 + 0,35 (rys. 1). Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że zmiana współczynnika ν od 0,3-0,5 tylko nieznacznie wpływa na wielkość naprężeń i dlatego w obliczeniach praktycznych zmienność ν można pominąć.

W przypadku gdy nie uwzględniamy dodatkowych obciążeń elementu (np. sił powierzchniowych) należy przyjąć, że naprężenia promieniowe na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej elementu są równe zero. Warunki (6) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1} &= 0 \quad \text{dla } r = r_1 \\ \sigma_{r_2} &= 0 \quad \text{dla } r = r_2 \end{aligned} \quad (32)$$

Podstawiając te warunki do wyrażeń (12) ÷ (19) i (27) ÷ (31) oraz przyjmując, że $\nu = 0,3$ otrzymujemy następujące zależności do wyznaczenia naprężeń cieplnych:

A. Powłoka walcowa .

1. Naprężenia promieniowe (n-te przybliżenie)

$$\sigma_r^{(n)} = \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \left[F(r) - 0,57 \sigma_r^{(n-1)} + \frac{0,816E}{r^{1,43}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,43}}{E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr + C_n \int_{r_1}^r \frac{E}{r^{2,43}} dr \quad (33)$$

Zerowe przybliżenie naprężeń promieniowych przyjmujemy równe zeru

$$\sigma_r^{(0)} = 0 \quad (34)$$

Funkcja $F(r)$ dla $\gamma = 0,3$ przyjmuje postać

$$F(r) = \frac{2,04E}{r^{1,43}} \int_{r_1}^r \alpha T r^{0,43} dr - 1,43E \left[\alpha T - \alpha_1 T_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{1,43} \right] \quad (35)$$

Stałą C_n wyznaczamy z zależności

$$C_n = - \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left[F(r) - 0,57 \sigma_r^{(n-1)} + \frac{0,816E}{r^{1,43}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,43}}{E} \sigma_r^{(n-1)} dr \right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{r^{2,43}} dr} \quad (36)$$

2. Naprężenia obwodowe

$$\sigma_r^{(n)} = 0,43 \sigma_r^{(n)} + F(r) + \frac{0,816E}{r^{1,43}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,43}}{E} \sigma_r^{(n)} dr + \frac{C_n E}{r^{1,43}} \quad (37)$$

3. Naprężenia osiowe wyznaczamy z zależności (20) i (21).

B. Powłoka kulista

1. Naprężenia promieniowe (n-te przybliżenie)

$$\sigma_r^{(n)} = \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \left[2 G(r) - 1,14 \sigma_r^{(n-1)} + \frac{2,12 \cdot E}{r^{1,86}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,86}}{E} dr \right] dr + D_n \int_{r_1}^r \frac{E}{r^{2,86}} dr \quad (38)$$

Zerowe przybliżenie naprężeń promieniowych przyjmujemy równe zero

$$\sigma_r^{(0)} = 0 \quad (39)$$

Funkcja $G(r)$ dla $\nu = 0,3$ przyjmuje postać

$$G(r) = \frac{2,65E}{r^{1,86}} \int_{r_1}^r \alpha T r^{0,86} dr - 1,43E \left[\alpha T - \alpha_1 T_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{1,86} \right] \quad (40)$$

Stałą D_n wyznaczamy z zależności

$$D_n = - \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left[2 G(r) - 1,14 G_r^{(n-1)} + \frac{2 \cdot 12 \cdot E}{r^{1,86}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,86}}{E} G_r^{(n-1)} dr \right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{r^{2,86}} dr} \quad (41)$$

2. Naprężenia obwodowe

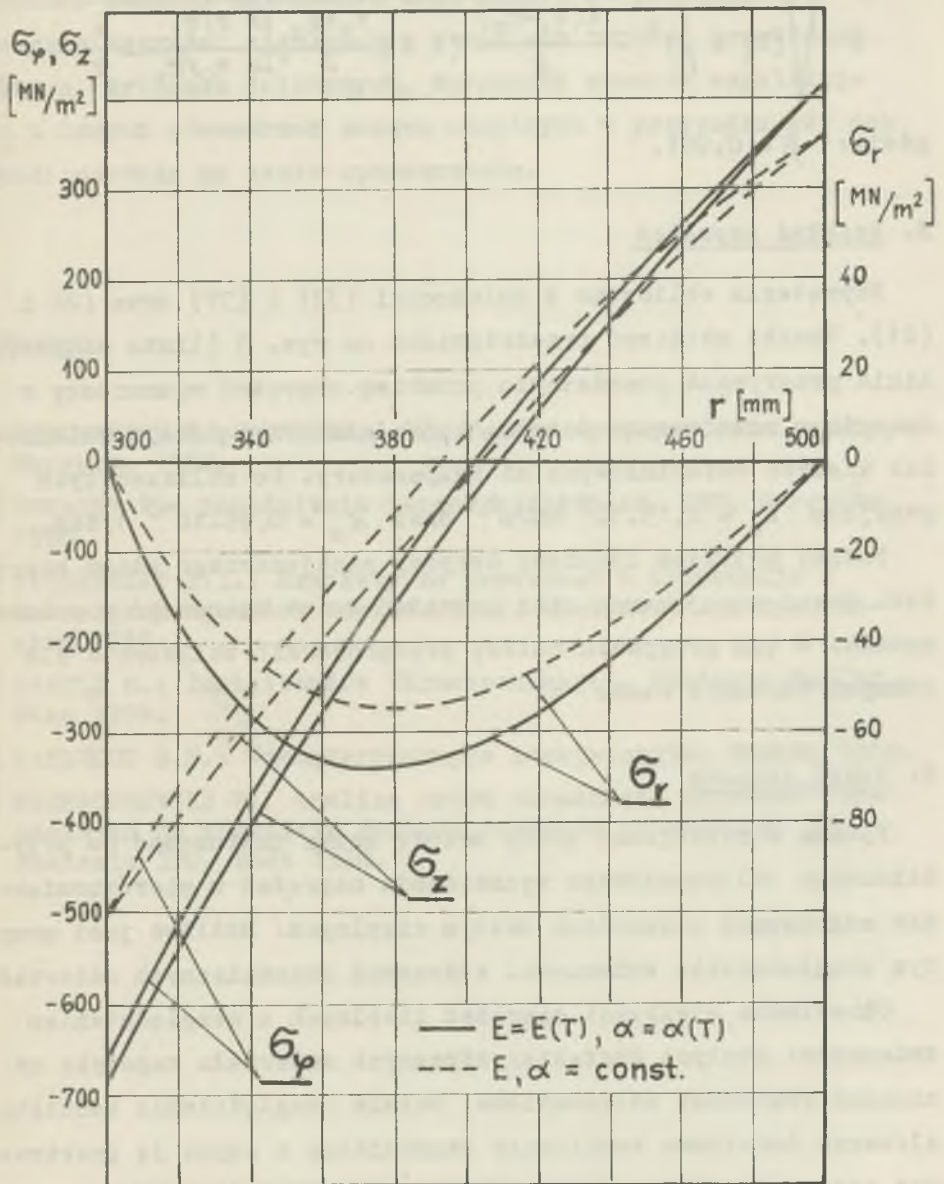
$$G_\varphi^{(n)} = 0,43 G_r^{(n)} + G(r) + \frac{1,06 \cdot E}{r^{1,86}} \int_{r_1}^r \frac{r^{0,86}}{E} dr + \frac{D_n E}{2r^{1,86}} \quad (42)$$

5. Przykład liczbowy

Dana jest długa powłoka walcowa o następujących danych: promień wewnętrzny $r_1 = 300$ mm, promień zewnętrzny $r_2 = 500$ mm materiał L17HMF, moduł Younga E i współczynnik rozszerzalności cieplnej α wg krzywych na rys. 1, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$. Należy wyznaczyć ustalony stan naprężeń wywołany nierównomiernym nagraniem. Temperatura powłoki jest tylko funkcją promienia i zmienia się od wartości $T_1 = 300^\circ\text{C}$ na powierzchni wewnętrznej do $T_2 = 0$ na powierzchni zewnętrznej. Współczynnik przewodzenia ciepła λ jest liniową funkcją temperatury $\lambda = \lambda_0 (1 - 0,001 \cdot T)$.

A. Rozkład temperatur

Ponieważ współczynnik przewodzenia ciepła λ zmienia się liniowo od temperatury rozkład temperatur wyznaczono z zależności



Rys. 3. Rozkład naprężeń cieplnych w powłoce walcowej

$$T = \sqrt{\left(T_1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{2(T_1 - T_2)}{\beta} \left(1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2}\right) \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} - \frac{1}{\beta}}$$

gdzie: $\beta = 0,001$.

B. Rozkład naprężeń

Naprężenia obliczono z zależności (33) ÷ (37) oraz (20 i (21). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3 (linia ciągła). Linia przerywana przedstawia przebieg naprężeń wyznaczony w oparciu o rozwiązania ścisłe, które nie uwzględniają zmienności stałych materiałowych od temperatury. Do obliczeń tych przyjęto $E_0 = 2,15 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ oraz $\alpha_0 = 0,95 \cdot 10^{-5} \text{ 1/deg}$.

Podany przykład liczbowy dotyczy stacjonarnego stanu naprężeń. Quasi-stacjonarny stan naprężeń można wyznaczyć w podobny sposób. W tym przypadku należy przeprowadzić obliczenia dla różnych wartości czasu t .

6. Uwagi końcowe

Podaną w niniejszej pracy metodę można zastosować do przybliżonego obliczeniowego wyznaczenia naprężeń w nierównomier- nie nagrzanym elementach maszyn cieplnych. Możliwe jest przy tym uwzględnienie zmienności własności mechanicznych materiału.

Określenie wielkości naprężeń cieplnych z uwzględnieniem zmienności stałych charakterystycznych materiału napotyka na znaczne trudności obliczeniowe. Ścisłe uwzględnienie kształtu elementu dodatkowo komplikuje zagadnienie i czyni je praktycznie nierozwiązalnym. W tej sytuacji najczęściej zastępuje się formę rzeczywistą modelem, który składa się z prostych ściśle ze sobą współpracujących elementów. Bardzo często jako modele poszczególnych zespołów maszyn cieplnych przyjmuje się grubości- enne powłoki osiowo-symetryczne (walcowe i sferyczne).

Podane powyżej zależności mogą służyć do przybliżonego wyznaczenia naprężeń cieplnych w korpusach turbin, przewodach parowych, króćcach dolotowych, korpusach zaworów regulacyjnych i innych elementach maszyn cieplnych w przypadku gdy ich kształt pozwala na takie uproszczenie.

LITERATURA

- [1] TIMOSHENKO S., GOODIER J.N.: Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa 1962.
- [2] NOWACKI W.: Zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1960.
- [3] GOLDENBLAT I.I.: Rasczety na procznost i kolebanija w usłowijach wysokich tiempieratur, Maszinostrojenije, Moskwa 1965.
- [4] PARKUS H.: Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, Wien 1959.
- [5] GATEWOOD B.E.: Tiempieraturnyje naprjażenija. Moskwa 1959.
- [6] GRZEGORZEWSKI W.: Analiza metod określania naprężeń termicznych na podstawie pomiaru rozkładu temperatur. Sprawozdanie ITC, Łódź 1968.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В НАГРЕТЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Р е з ю м е

В работе представлено метод определения термических напряжений в толстостенных цилиндрических и сферических оболочках для произвольной зависимости механических параметров материала от температуры. Обще решение задачи получено исходя из предпосылки осесимметрического нестационарного температурного поля. Уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций выраженное через напряжения решено методом последовательных приближений. Подробные расчеты сделано для толстостенной цилиндрической оболочки. Полученные результаты сравнено с результатами классической теории упругости.

THE STATE OF STRESS IN A THICK-WALLED CYLINDRICAL AND SPHERICAL HEATED SHELLS

S u m m a r y

In this paper a method for determination of the thermal stress in a thick-walled cylindrical and spherical shells for real temperature function of coefficients of elasticity has been presented. A general solution of this problem by assumption of an axially symmetric nonsteady temperature field has been given. Equation of equilibrium and equation for continuity of strain by successive approximation have been solved. Detailed computations have been carried out for the thick-walled cylindrical shell. The achieved results have been compared with results, which the classical theory of elasticity is giving.