

STANISŁAW GREŁA

O BADANIACH DIAGNOSTYCZNYCH STANU DYNAMICZNEGO
MASZYN WIRNIKOWYCH

Streszczenie. Z punktu widzenia teorii informacji drgania, dźwięki i szum, emitowane w wyniku działania maszyny, stanowią zakodowaną formę kinematyki i dynamiki zachodzących w maszynie procesów fizycznych.

W szerszym ujęciu autora, akustyczne badanie diagnostyczne sprowadza się do detekcji jako aktu wykrywania istnienia albo obecności nieokreślonego obiektu. Jest to bowiem detekcja sygnałów polegająca na decydowaniu czy rzeczywiście został odebrany pożądany sygnał, gdy towarzyszą mu niepożądane sygnały albo szum.

Efektywny system diagnostyczny dostarczający szczegółowych informacji o własnościach elementów konstrukcyjnych i podzespołów maszyny przepływowej (wirnikowej) oraz optymalizacja konstrukcji mogą w istotny sposób zmniejszyć przypadkowość w funkcjonowaniu tego typu maszyn i umożliwić opracowanie teorii niezawodności na innej podstawie niż na rachunku prawdopodobieństwa [8].

W s t ę p

Maszyny wirnikowe (sprężarki, turbiny, pompy i maszyny elektryczne) należą do grupy maszyn o skomplikowanej pod względem dynamicznym strukturze wewnętrznej. Problematyka dynamiki tych maszyn szczególnie wysokoobrotowych (przekładniowych) nadal nastrocza wiele trudności a stan dynamiczny maszyny wirnikowej jest jednym z podstawowych czynników określających jakość jej wykonania, poprawność montażu oraz prawidłowość eksploatacji [7].

Określenie tego stanu jest celem diagnostyki technicznej zaliczonej do ogólnej teorii informacji (komunikacji), od której różni się tylko fizykalną interpretacją pojęć. Diagnostyka techniczna opiera się nie na statystyce, lecz na założeniu, że maszyna jest urządzeniem zdeterminowanym, to znaczy, że każdemu możliwemu stanowi maszyny odpowiadają dokładnie określone objawy zewnętrzne i przeciwnie, każdemu sygnałowi diagnostycznemu odpowiada w pełni określony stan techniczny maszyny [12].

Podstawę diagnostyki akustycznej stanowi efekt akustyczny, który w przeciwieństwie do innych środków informacji, charakteryzuje się dużą pojemnością informacyjną.

Duża pojemność informacyjna dźwięku wymaga jednak modulacji sygnału tj. rozszerzenia jego widma a więc i odpowiedniego rozszerzenia pasma urządzenia pomiarowego [6].

1. Ogólne podstawy diagnostyki akustycznej

W teorii informacji rozważa się źródła informacji o własnościach ergodycznych, które w określonych warunkach mogą produkować każdą z wielu możliwych wiadomości.

Badania nad przekazywaniem informacji rzuciły nowe światło na pojęcie kodowania rozumianego tutaj jako przedstawienie jednej rzeczy za pomocą innej.

Z punktu widzenia teorii informacji dźwięki (sygnały) i szumy towarzyszące działaniu maszyny przepływowcej, stanowią zakodowaną formę jej ruchów (drgań) elementów roboczych oraz zachodzącego w nich procesu termoeenergetycznego [6]. Również związek cech konstrukcyjnych z efektem akustycznym jest jednoznaczny i stanowi odbicie najistotniejszych procesów fizycznych zachodzących w maszynie [4].

Można również powiedzieć, że "wiadomości" emitowane przez maszynę o jej stanie termoeenergetycznym, kinematycznym i dynamicznym

są zakodowane w sygnałach akustycznych i szumie w postaci ciśnienia akustycznego względnie drgań mechanicznych [6].

Maszyna stanowi jednak wielokanałowy układ informacyjny i istotnym zagadnieniem są sposoby rozdzielania sygnałów emitowanych przez maszynę. Każdy zaś sygnał charakteryzuje się długością czasu trwania, zakresem częstości jego widma i zakresem dynamiki.

Ilościową miarą pojęcia wiadomości jest liczba informacji zawarta w wiadomości. Każdy element wiadomości przekazywanej w postaci efektu akustycznego, zawiera tym większą liczbę informacji im większa jest ogólna liczba elementów w zbiorze, z którego został wybrany dany element.

Te nowe koncepcje wprowadzają miarę ilości informacji zwaną entropią i jej jednostkę nazwaną bitem.

Twierdzenie o próbkowaniu pozwala na przedstawienie sygnału zmieniającego się w sposób ciągły w postaci ciągu próbek o różnych amplitudach (tj. w formie dyskretnej).

Ergodyczny model źródła wiadomości, który można przyporządkować również poszczególnym elementom maszyny ma pewne niezmiennie własności statystyczne.

Źródłem wiadomości jest w naszym rozumieniu maszyna wzgl. urządzenie dokonujące przypadkowych (a więc nie możliwych do ścisłego przewidzenia) wyborów spośród zbioru wszystkich możliwych przeznaczonych do przesłania wiadomości. Entropia źródła jest wtedy miarą nieokreśloności wyboru. Jest ona równa na zasadzie "jeden z dwu" liczbie wyborów, których źródło musi dokonać, aby określić jedną rzeczywiście przesłaną wiadomość.

Przed otrzymaniem wiadomości odbiorca nie jest pewny, która ze zbioru możliwych wiadomości zostanie wytworzona i przekazana mu przez źródło. Entropia źródła może być uważana za miarę tej niepewności.

Jeśli wiadomość jest wybierana spośród zbioru n równie prawdopodobnych sygnałów lub wiadomości, to entropia jest równa $\log_2 n$.

W przypadku kiedy prawdopodobieństwo wybrania i -tego sygnału ($i = 1, 2, \dots, n$) będzie równe każdorazowo i niezależnie od wyników poprzednich, to również entropia wyrazi się wzorem

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad \text{bitów na sygnał}$$

Stawiając diagnozę stanu maszyny analizujemy zewnętrzne cechy maszyny i powstające przy tym procesy. Każdą taką cechę można rozpatrywać jako symptom jakiegoś stanu, ponieważ w pewnych stanach cecha ta występuje, w innych nie. Uważając wtedy każdy ze stanów maszyny za oddzielne źródło obliczamy entropię każdego z nich. Jeśli pomnożymy entropię każdego ze stanów przez prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że maszyna znajdzie się w tym właśnie stanie, a następnie dodamy otrzymane iloczyny, uzyskamy entropię źródła łącznego (całej maszyny).

Zakładamy więc, że jeśli maszyna jest w stanie i , to prawdopodobieństwo, że wyprodukuje ona sygnał j , wynosi $p_i(j)$. Zgodnie z wzorem poprzednim entropia i -tego stanu

$$H_i = - \sum_j p_i(j) \log_2 p_i(j)$$

Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że maszyna znajdzie się w i -tym stanie. Entropia całej maszyny, traktowanej jako źródło sygnałów, jest wtedy równa

$$H = \sum p_i H_i \quad [\text{bit/sygnał}]$$

Wykorzystując poprzedni wynik możemy zapisać

$$H = - \sum p_i p_i(j) \log_2 p_i(j) \quad [\text{bit/sygnał}]$$

Litery i , j pod znakiem sumy \sum oznaczają, jak poprzednio, że należy zsumować wszystkie iloczyny otrzymane przez podstawienie w powyższym wzorze zamiast liter i i j wszystkich ich możliwych wartości.

W ten sposób przechodzi się od źródeł wytwarzających poszczególne sygnały niezależnie - do źródeł w przypadku których prawdopodobieństwo pojawienia się kolejnego sygnału zależy od sygnałów poprzednich.

Rzadko występujące elementy wiadomości, a więc elementy, których prawdopodobieństwo pojawienia się jest małe zawierają w sobie dużo informacji i odwrotnie, elementy o dużym prawdopodobieństwie występowania zawierają mało informacji. Jako informacje zbędne traktuje się te informacje i odpowiadające im sygnały, które nie dotyczą bezpośrednio treści przekazywanej wiadomości, lecz określają jej pewne cechy uboczne, towarzyszące właściwej treści.

Na przykład, przy przekazywaniu wiadomości w postaci sygnału akustycznego o stanie dynamicznym w łożysku maszyny, jako informacje zbędne można uznać te sygnały, które określają częstość podstawową i inne cechy charakterystyczne tonu podstawowego. Nadmiar informacji (redundancja) w wiadomości (sygnale) oznacza natomiast, że w danych warunkach jej przekazywania całkowity odbiór wiadomości nie jest uzależniony od przekazania określonej (zbytecznej) jej części. Jednakże w miarę wzrostu poziomu zakłóceń nadmiar wiadomości stopniowo zmniejsza się, ponieważ w celu pełnego odtwarzania wiadomości należy zwiększyć jej część użyteczną kosztem części zbytecznej.

Dalszy wzrost zakłóceń powoduje już zmniejszenie istotnej części przekazywanej wiadomości.

Dolna granica zakresu dynamiki sygnału i dokładność jego przesyłania zależą od poziomu zakłóceń.

Zazwyczaj przyjmuje się, że zakres dynamiki sygnału jest określony stosunkiem średnich mocy sygnału P i zakłóceń N , a ściślej mówiąc - różnicą ich poziomów mocy (np. w decybelach)

$$D = 10 \lg \frac{P}{N} = 10 \lg P - 10 \lg N \quad (\text{dB})$$

Tak więc trzy parametry sygnału: czas trwania T , szerokość widma częstotliwości F oraz różnicę poziomu w stosunku do poziomu zakłóceń D , traktować można jako trzy rozmiary sygnału, których iloczyn

$$V = FTD = FT \log_2 \frac{P}{N}$$

określa pojemność informacyjną sygnału.

Jest rzeczą oczywistą, że niezbędnym warunkiem przesyłania sygnału danym kanałem bez wprowadzenia dodatkowych zniekształceń jest warunek, aby objętość sygnału była mniejsza lub co najwyżej równa pojemności informacyjnej kanału. Wynika stąd dalsza ważna cecha charakterystyczna kanału informacyjnego, a mianowicie jego przepustowość informacyjna określona przez maksymalną liczbę informacji jaką można przesłać przez kanał w jednostce czasu, obliczoną jako

$$C = \frac{H}{T} = F \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \quad \text{bit/s}$$

Liczba informacji zawartych w sygnale równa się jego pojemności jedynie przy dużych wartościach stosunku mocy sygnału do szumów.

Liczba elementów (parametrów) sygnału w czasie trwania T i szerokości widma F wynosi $n = \frac{T}{\Delta t} = 2 F T$.

Parametrami tymi mogą być np. wartości chwilowe funkcji sygnału $f(t)$ oddalone między sobą w skali $\frac{1}{2F}$ (s) lub współczynniki odpowiadające kolejnym wyrazom rozwinięcia funkcji sygnału na szereg Fouriera.

Ponieważ liczba informacji w danej wiadomości jest wielkością stałą - zmieniając podstawę kodu - można odpowiednio zmienić liczbę elementów sygnału.

Badanie diagnostyczne obejmuje odebranie sygnału emitowanego przez maszynę (względnie mechanizm) jego rozdzielenia na składowe, wydzielenie w nich cech charakterystycznych i zestawienie ich z cechami sygnałów odpowiadających możliwym stanom maszyny rozróżnionym podczas badania.

Wynikiem badania diagnostycznego (np. stanu dynamicznego) turbiny parowej jest stwierdzenie przynależności stanu maszyny względnie jej mechanizmów do jednej z klas z góry ustalonej klasyfikacji stanów [15], [16].

Wybór istotnych cech maszyny pod kątem postawienia diagnozy następuje często z trudnością jeśli nie w pełni znany jest cel i przeznaczenie informacji diagnostycznej.

W wielu przypadkach ograniczone informacje o stanie dynamicznym maszyny można przekazać za pomocą sygnału (np. z sejsmicznego czujnika drgań) o bardzo wąskim widmie.

W teorii drgań rozpatruje się bowiem w wielu przypadkach ruchy, które zmierzają do pewnego stanu ustalonego (granicznego) określonego przez dynamiczne cechy obiektu drgającego i układ zewnętrznych oddziaływań.

Podobieństwo równań drgań układu i równań regulacji może okazać się bardzo pożyteczne. Przede wszystkim przy zastosowaniu układów automatycznej regulacji można modelować niektóre drgania i odwrotnie (na przykład wykorzystując maszyny analogowe).

W przypadkach silnych nieliniowości strukturalnych oraz wtedy, gdy występują w układzie nieliniowości wprowadzone celowo, odchylenie od działania liniowego jest widoczne.

Jeśli nie można dokonać aproksymacji liniowej, to trzeba zrezygnować z wygodnych metod teorii liniowej ze względu na to, że traci słuszność zasada superpozycji.

Inną konsekwencją niesłuszności zasady superpozycji jest niemożność stosowania całki Fouriera. Wynika stąd, że nie istnieje dla układów nieliniowych formalny związek pomiędzy dziedziną czasową a dziedziną częstościową. Można dokonywać niezależnie zarówno analizy czasowej jak i częstościowej, ale nie jest możliwe wyliczenie odpowiedzi czasowej na podstawie charakterystyki częstościowej i odwrotnie.

W praktyce związki pomiędzy tymi charakterystykami są używane, ale są one empiryczne, to znaczy oparte na doświadczeniu oraz na intuicyjnym wyczuwaniu fizycznego wpływu charakterystyki nieliniowej.

Ogólnie można powiedzieć, że jeśli na układ mają działać sygnały skokowe oraz narastające liniowo, to wówczas wydaje się pożądane dokonywanie analizy i syntezy w dziedzinie czasowej, jeśli spodziewane są sygnały sinusoidalne lub inne sygnały okresowe, wówczas korzystną może być analiza w dziedzinie częstości.

Do opisu procesów stochastycznych nie można użyć konwencjonalnych funkcji ciągłych, stosowanych do opisu przebiegów sinusoidalnych lub przebiegów z harmonicznymi.

W najlepszym razie można tylko stwierdzić, że wartość funkcji będzie prawdopodobnie zawarta w pewnym przedziale. Innymi słowy, opis funkcji przypadkowej nie może być deterministyczny, lecz tylko probabilistyczny.

Na szczęście jednak wiele procesów stochastycznych z dziedziny dynamiki maszyn wirnikowych, można opisać niewielką liczbą funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Poza tym dla procesu ergodycznego uśrednienie czasowe pojedynczej realizacji procesu stochastycznego jest równoważne uśrednieniom statystycznym wziętym na całym zbiorze. Dość często wartość oczekiwana takiego zbioru będzie taka sama jak wartość średnia czasowa.

Pojęcie detekcji nieokreślonego obiektu wymaga na wstępie dokładnego zdecydowania co ma stanowić proces detekcji.

Dla najbardziej znanych procesów istnienie progów detekcji jest integralnym elementem jej mechanizmu. Innym podstawowym pojęciem, jakie się włącza do modelu matematycznego detekcji jest pojęcie kary (w sensie teorii gier).

Stąd teoria detekcji sygnałów wtłaczana jest w ramy, które są charakterystyczne dla weryfikacji hipotez i podejmowania decyzji.

Ponieważ na decyzję wpływa ocena parametrów dystrybuanty dlatego też sformułowania teorii podejmowania decyzji stanowią uogólnienia sformułowań opartych na funkcji straty i funkcji ryzyka znanych w teorii estymacji.

Przez rozsądne planowanie oparte na statystykach sygnału i szumu obserwator starający się wykryć pewien obiekt czy sygnał w obecności szumu może zmaksymalizować swoje nagrody.

Odpowiedni dający się zaakceptować model matematyczny detekcji sygnałów w zakresie diagnostyki akustycznej musi przepisywać kary niepoprawnym decyzjom i musi zawierać miarę na oszacowanie wydajności procesu detekcji.

Te nowe metody postępowania wprowadzane w badaniach diagnostycznych sprężarek wirnikowych [8] wymagają dalszego doskonalenia co odbywa się między innymi właśnie przez optymalizację stawienia diagnozy oraz przez wprowadzenie automatycznych urządzeń diagnostycznych.

2. Elementy teorii analizy widmowej drgań, sygnałów i szumu

Równolegle można rozpatrywać dwa rodzaje procesów drgających: ruch drgający układów mechanicznych oraz drgania w obwodach elektrycznych [9].

Obydwa te zjawiska są opisywane analogicznymi równaniami różniczkowymi. Liniowe przekształcenia całkowe zwłaszcza przekształceni-

nia Fouriera i Laplace'a, pomagają w rozwiązaniu wielu zagadnień dotyczących układów liniowych.

Widma są transformatami Fouriera przebiegów fizycznych i odwrotnie, przeto przekształcenie Fouriera ma wyraźny sens fizyczny.

Jeśli się odwróci tradycyjny sposób ujęcia teorii szeregów Fouriera i przekształcenia Fouriera, to szeregi Fouriera stają się przypadkiem granicznym w ramach teorii przekształcenia Fouriera [1].

Pojawiają się wtedy specyficzne trudności natury matematycznej, a nie fizycznej, które są związane z charakterem granicznym szeregów Fouriera. Rozpatrując dane zagadnienie w kategoriach przekształceń całkowitych można unikać numerycznej analizy harmonicznej lub operacji na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Z warunkami liniowości układu i stacjonarności spotykamy się również w pewnych przypadkach dynamiki maszyn.

Jeżeli układ nie ma własności harmonicznej odpowiedzi na harmoniczne wymuszenie, jak np. nieliniowy serwomechanizm, to analizę przebiegów musi się przeprowadzić przez ich rozkład na składowe harmoniczne.

Własność niezmienności w czasie (stacjonarności) jest często zachowana nawet przy braku liniowości.

Znacznie rzadziej własność ta jest spotykana w układach przestrzennych. W dużej liczbie przypadków praktycznych o charakterze szumu stochastycznego wystarczy zastosować definicje i operacje oparte na zbiorze do pojedynczej realizacji procesu stochastycznego. W zasadzie, aby uśrednienie czasowe pojedynczej realizacji procesu stochastycznego było równoważne uśrednieniom stochastycznym wziętym na całym zbiorze, proces musi być ergodyczny.

Eksperymentalna analiza drgań, między innymi dziedziną spektroskopii wykazały jednak niedostateczność metod matematycznych również dla realnych potrzeb dynamiki maszyn przepływowych. Takie pojęcia jak gęstość spektralna, amplituda składowej spektralnej pow-

stały bowiem na gruncie eksperymentalnym i wysunęły się poza zasięg stosowanych teorii matematycznych.

2.1. Wzór całkowy Fouriera jako para przekształceń Fouriera

Wzór całkowy Fouriera w postaci zespolonej [11]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

można zapisać w równoważnej postaci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \quad (2)$$

gdzie

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (3)$$

Obie te zależności mają charakter przekształceń całkowych (system 2). Zapis symboliczny zależności (3) ma postać

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (4)$$

gdzie \mathcal{F} oznacza symbol przekształcenia Fouriera.

Zależność (2) określa odwrotne przekształcenie Fouriera, zwane w skrócie \mathcal{F}^{-1} - przekształceniem i wzór (2) można zapisać w postaci

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j)] \quad (5)$$

Z porównania wzoru (3) z wzorem całkowym Fouriera w równoważnej postaci

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (6)$$

gdzie:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau; \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau \quad (7)$$

mamy

$$F(j\omega) = \pi [a(\omega) - jb(\omega)] \quad (8)$$

Wynika stąd, że jeśli funkcja $f(t)$ jest rzeczywista, to funkcja $F(j\omega)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej ω , jej częściami - rzeczywistą i urojoną - są odpowiednio funkcje: $\pi a(\omega)$ i $-\pi b(\omega)$

Przedstawiając (8) w postaci

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (9)$$

widać, że

$$|F(j\omega)| = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

$$\cos \theta(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}; \quad \sin \theta(\omega) = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}} \quad (10)$$

W zestawieniach analizy drgań często używa się następujących nazw wielkości występujących we wzorze (9): \mathcal{F} - transformata $F(j\omega)$ - inaczej: charakterystyka widmowa, gęstość widmowa lub po prostu - widmo funkcji $f(t)$; jej moduł $|F(j\omega)|$ - inaczej: charakterystyka amplitudowa lub widmo amplitudowe funkcji $f(t)$ ^x jej argument $\theta(\omega)$ - inaczej: charakterystyka fazowa lub widmo fazowe funkcji $f(t)$.

^x Nazwy tej używa się również w odniesieniu do wielkości $A(\omega)$, różniący się od $|F(j\omega)|$ tylko współczynnikiem π

Wobec tego, iż funkcja $a(\omega)$ jest parzysta, a $b(\omega)$ nieparzysta, z zależności (10) wynika, że charakterystyka amplitudowa, $|F(j\omega)|$ jest funkcją parzystą, a charakterystyka fazowa $\theta(\omega)$ - funkcją nieparzystą zmiennej ω

2.1.1. Warunki istnienia transformaty Fouriera

Jak wynika z matematycznej strony przekształceń Fouriera pewne popularne funkcje jak $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $e^{\alpha t}$ itd. nie mają transformaty Fouriera. Do tej grupy należy również funkcja jednostkowa $H(t)$ i impuls Diraca $\delta(t)$.

Przebiegi te nie mają transformat Fouriera, ponieważ ich całki Fouriera są rozbieżne. Należy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że nie można wytwarzać przebiegów bez znajomości ich widma lub też konstruować układu promieniującego energię nie znając jego charakterystyki promieniowania. Realizowalność fizyczna przebiegu jest warunkiem wystarczającym istnienia transformaty Fouriera. Nie można jednak zrezygnować z wielu przydatnych funkcji nie mających transformaty Fouriera w zwykłym sensie. Przeciwnie, można je stosować na równi z innymi funkcjami poprzez wprowadzenie uogólnionego przekształcenia Fouriera w sensie granicznym.

Funkcje okresowe i dystrybucje tworzą pary transformat Fouriera w sensie granicznym

2.2. Szereg Fouriera

- rozpatrywany jako graniczny przypadek przekształcenia Fouriera [1]. Badania funkcji okresowych typu drgań akustycznych wykazują, że ich energia jest zgromadzona w drganiach o częstościach będącymi całkowitymi wielokrotnościami częstości podstawowej. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby przy analizie przebiegów okresowych stosować aparat przekształcenia Fouriera. Założenie o ścisłej okresowości przebiegu, własności jaka fizycznie jest niemożliwa do zrealizowa-

nia, prowadzi do analizy widma dyskretnego. Symbol $\text{III}(x)$ w tym przypadku szczególnie dogodny do opisu zarówno ze względu na zjawisko powtarzania, właściwe okresowym przebiegiem, jak też ze względu na próbkowanie związane i harmonicznymi widmami.

Jeśli $f(t)$ będzie funkcją transformowalną w zwykłym sensie o widmie $F(j\omega)$, wówczas jej splot z dystrybucją $\text{III}(t)$ daje w wyniku funkcję okresową $p(t)$

$$p(t) = \text{III}(t) * f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t - n) \quad n - \text{całkowite} \quad (11)$$

Zbieżność sumy jest zagwarantowana bezwzględną całkowalnością funkcji $f(t)$, co jest warunkiem istnienia zwykłej transformaty Fouriera. Okres funkcji $p(t)$ jest równy jednostce, tzn. $p(t+1) = p(t)$ dla wszystkich t . Funkcja $p(t)$ nie będzie miała transformaty Fouriera w zwykłym sensie, ponieważ całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt$$

jest rozbieżna. Jeśli jednak funkcja $p(t)$ zostanie pomnożona przez czynnik $\gamma(t)$, który maleje do zera zarówno dla dużych dodatnich wartości jak i dla dużych ujemnych wartości zmiennej t , to w efekcie funkcja ściśle okresowa zostaje sprowadzona przez to do funkcji, która jest realizowana fizycznie.

Jeśli na przykład

$$\gamma(t) = e^{-\pi \tau^2 t^2} \quad (12)$$

to transformata Fouriera $\Gamma(j\omega)$ funkcji $\gamma(t)$ (w systemie 1) ma postać

$$\Gamma(j\omega) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\pi \omega^2}{\tau^2}} \quad (13)$$

Funkcja $\gamma(t) p(t)$ będzie miała transformatę Fouriera

$$\begin{aligned} \gamma(t) p(t) &= \gamma(t) \sum_{-\infty}^{\infty} f(t - n) \rightleftharpoons \Gamma(j\omega) * \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\omega n} F(j\omega) = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F(n) \Gamma(\omega - n) \end{aligned} \quad (14)$$

Używając do zapisu symbolu szera otrzymamy

$$\sum_{-\infty}^{\infty} F(n) \Gamma(\omega - n) = \Gamma(j\omega) * [\text{III}(j\omega) F(j\omega)] \quad (15)$$

Jeśli się oznaczy $P(j\omega) = \text{III}(j\omega) F(j\omega)$ - to wyrażenie $P(j\omega)$ reprezentuje sobą zbiór jednakowo odległych impulsów Diraca o różnej wielkości, który można uważać jako zbiór próbek widma $F(j\omega)$ w punktach, w których zmienna przybiera wartości całkowite.

Jak wynika z powyższych rozważań $\gamma p \rightleftharpoons \Gamma * P$

Opierając się na twierdzeniu o splocie widać, że dystrybucję P można przyporządkować funkcji $p(t)$ jako jej transformatę Fouriera. W miarę jak τ dąży do zera, iloczyn γp przebiega ciąg funkcji, którego granicą jest p , natomiast ciąg wyrażeń $\Gamma * P$ będzie określał dystrybucję P . Tak więc $p(t)$ i $P(j\omega)$ można nazwać parą transformat Fouriera w sensie granicznym.

Przyjmując obecnie $f_{\tau}(t) = g(t) \Pi(t)$ (tzn. jeden segment funkcji okresowej), widać, że widmo funkcji okresowej jest zbiorem impulsów Diraca, których wielkości są określone przez równoległe próbki widma $F(j\omega)$ będącego transformatą Fouriera funkcji $f_{\tau}(t)$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{III}(j\omega) F(j\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{n-0}^{n+0} F(j\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F(jn) e^{j2\pi n t} = F(0) + \sum_1^n [F(jn) e^{j2\pi n t} + F^*(jn) e^{-j2\pi n t}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F(0) + 2 \sum_1^{\infty} (\operatorname{Re} F(jn) \cos 2\pi nt - \operatorname{Im} F(jn) \sin 2\pi nt) = \\
 &= a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt) \quad (16)
 \end{aligned}$$

jeśli

$$a_n - j b_n = 2 F(jn) \quad (17)$$

Zespolony współczynnik $a_n - j b_n$ szeregu Fouriera funkcji okresowej $g(t)$ o okresie $T = 1$ będzie również związany z jednym segmentem $g(t) \Pi(t)$ funkcji okresowej $g(t)$ transformatą Fouriera

$$a_n - j b_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) e^{-j2\pi nt} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \Pi(t) e^{-j2\pi nt} dt \quad (18)$$

Ścisłe pod względem matematycznym rozważania dotyczące szeregu Fouriera są bardziej złożone [11]. Wiąże się to w sposób istotny z nieskończoną energią przebiegu okresowego (całka tego przebiegu nie jest bezwzględnie zbieżna). Dlatego też zupełnie naturalne jest uważanie funkcji okresowej za granicę ciągu funkcji o skończonej energii i rozpatrywanie widma dyskretnego jako granicznego przypadku widma ciągłego o skończonej gęstości energii.

W przytoczonej notacji i terminologii funkcja okresowa $III * f$ ma widmo dyskretne $III F$ (zbiór współczynników Fouriera). Jeżeli okres funkcji zostanie zwiększony do τ to prążki w widmie wystąpią wtedy τ razy gęściej i będą τ razy mniejsze. Jeśli okres stanie się nieskończenie wielki, tzn. kiedy nie powtarza się pojedynczy segment f , wówczas suma wyrazów szeregu Fouriera przechodzi w całkę niewłaściwą. Podobnie całkami niewłaściwymi stają się całki

skończone określające współczynniki Fouriera. Całki te stają się dwustronnymi całkami Fouriera.

2.3. Gęstość widmowa mocy

Obliczenia mocy albo energii procesów promieniowania oparte są na twierdzeniu o mocy w postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) G^*(j\omega) d\omega \quad (19)$$

Jego dowód jest taki sam jak dla twierdzenia Rayleigha (głoszącym, że całka kwadratu modułu funkcji jest równa całce kwadratu modułu jej widma) tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (20)$$

przy czym f^* zastępuje się przez g^* a F^* przez G^* .

Twierdzenie o mocy może być zapisane za pomocą znanej symboliki

$$\int_{-\infty}^{\infty} f g^* dx = f g^* \Big|_{\omega=0} = \bar{f} * \bar{g}^* \Big|_{\omega=0} = F * G^*(-) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} F G^* d\omega$$

W ten sposób do obliczania mocy albo energii można zastosować dwa różne sposoby. Pierwszy z nich polega na tym, że moc chwilowa jest obliczona jako iloczyn pary sprzężonych zmiennych (pole elektryczne i magnetyczne, napięcie i prąd, siła i prędkość) całkowanych po czasie lub przestrzeni. Drugi polega na tym, że odpowiednie składowe widma są mnożone i całkowane po całym zakresie widmowym.

Znając funkcję o skończonej energii całkowitej można zdefiniować gęstość widmową energii skojarzoną z tą funkcją. Jeśli można wykonać przekształcenie Fouriera funkcji $f(t)$ otrzymując $F(j\omega)$ to stosując twierdzenie Parsevala dla szeregu Fouriera (będące odpowiednikiem twierdzenia Rayleigha) otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (21)$$

Kwadrat modułu transformaty - $|F(j\omega)|^2$ - noszący nazwę widma energii funkcji $f(t)$ jest funkcją parzystą, stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (22)$$

Według definicji

$$\frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\omega, f) \quad (23)$$

jest funkcją zarówno ω jak i f , gdyż $f(t)$ jest jednym z elementów zbioru.

Związek między funkcją $f(t)$ a jej widmem energii jest niejednoznaczny, gdyż mimo iż funkcja $f(t)$ determinuje $F(j\omega)$, a więc i $|F(j\omega)|^2$, to aby odtworzyć funkcję $f(t)$, trzeba koniecznie znać $|F(j\omega)|$ oraz $\arg F(j\omega)$. W ten sposób znajomość widma energii dostarcza tylko część informacji o funkcji $f(t)$, która to informacja nie mówi nic o fazie składowych Fouriera tej funkcji. Tego typu informacji właśnie dostarczają badania fal akustycznych przez pomiar natężenia dźwięku w funkcji częstości.

Jeśli jest znane jedynie widmo energii, to stracona informacja jest dokładnie tego samego charakteru jak ta którą się traci w przypadku, gdy zamiast danej funkcji znamy jedynie jej funkcję korelacji własnej (autokorelacji).

Jeżeli rozpatrywana funkcja $f(t)$ jest funkcją rzeczywistą reprezentującą sobą przebiegi dynamiczne, zachodzące w maszynie przepływowej to jej widmo energii jako funkcja parzysta jest w konsekwencji w pełni zdeterminowane przez swoje wartości dla $\omega \geq 0$.

Dla podkreślenia tego faktu można użyć pojęcia "widmo energii dla dodatnich częstotści", które to pojęcie określa część widma $|F(j\omega)|^2$, dla której $\omega \geq 0$. Ponieważ $(F(j\omega))^2$ ma charakter gęstości energii mierzonej na jednostkę ω , to wówczas gdy dla dyskretnych wartości ω energia nie jest równa zero, gęstość ta musiałaby być nieskończenie wielka. Sytuacja taka występuje w przypadku nieskończenie wąskich linii prążków widmowych.

Całkowe widmo energii określające energię w przedziale $(0, \omega)$ wyraża $\int_0^{\omega} (F(j\omega))^2 d\omega$. Każdy prążek w widmie energii będzie przyczyną skończonych nieciągłości w całkowym widmie energii.

Praktyczny przypadek stanowi ograniczone pasmo częstotści oraz zawartość energii wejściowej w tym paśmie. Niech $x(t)$ będzie sygnałem wejściowym danego układu (względnie podzespołu maszyny) o następującej transmitancji widmowej

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0 & \text{dla wszystkich innych wartości} \end{cases} \quad (24)$$

Jeśli $y(t)$ jest przebiegiem wyjściowym jego transformata widmowa $Y(j\omega)$ ma postać

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = G(j\omega) X(j\omega) \quad (25)$$

Energia wejściowa zawarta w paśmie $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ jest całkowitą energią wyjściową, to znaczy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varepsilon(\omega, x) d\omega \end{aligned} \quad (26)$$

Energia wejściowa zawarta w paśmie $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ jest równa całce $\mathcal{E}(\omega, x)$ w przedziale (ω_1, ω_2) a $\mathcal{E}(\omega, x)$ ma postać gęstości energii i jest zdefiniowana jako gęstość widmowa energii odpowiedniej funkcji czasowej.

Podobnie postępując można określić gęstość widmową mocy. Oczywiście ma to sens tylko wówczas, gdy całkowita energia ma wartość nieskończoną. Określamy

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (t) \leq T \\ 0 & \text{dla innych wartości} \end{cases} \quad (27)$$

Dla $(t) \leq T$, $x_T(t)$ jest identycznie równe $x(t)$. W granicy gdy $T \rightarrow \infty$, $x_T(t)$ i $x(t)$ są wszędzie identyczne. Dla skończonych wartości T , $x_T(t)$ jest na pewno całkowna i ma transformatę Fouriera, określoną jak niżej

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (28)$$

Energia funkcji $x_T(t)$ określa relacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (29)$$

Średnia moc $x_T(t)$ wynosi

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (30)$$

Przy przejściu do granicy można skreślić znacznik dolny 1, ponieważ wynik jest rzeczywiście wartością średnią. Gęstość widmowa energii funkcji $x_T(t)$ wynosi

$$\mathcal{E}(\omega, x_T) = \frac{1}{x} |X_T(j\omega)|^2 \quad (31)$$

Z definicji gęstości widmowej energii wynika, że

$$\int_{-T}^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega, x_T) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (32)$$

stąd

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} (X_T(j\omega))^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(X_T(j\omega))^2}{T} d\omega \quad (33)$$

Średnia moc sygnału wejściowego $x(t)$ będącego sygnałem aperiodycznym albo realizację akustycznego procesu stochastycznego (dla $R_a = 1$) określa wzór

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (34)$$

Z porównania (34) i (33) wynika

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_1 \quad (35)$$

Gęstość widmową mocy $S(\omega, x)$ definiuje się jako

$$S(\omega, x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim \frac{1}{2\pi} \frac{(X_T(j\omega))^2}{T}$$

Ponieważ

$$\bar{P} = \int_0^{\infty} S(\omega, x) d\omega \quad (36)$$

a ponadto średnia moc w paśmie $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ wynosi

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega, x) d\omega$$

Gęstości widmowe energii i mocy procesu stochastycznego są określone przez wartości oczekiwane na zbiorze, z wyjątkiem przypadku gęstości widmowych mocy, w którym wartość oczekiwana powinna być obliczona wcześniej niż gdy $T \rightarrow \infty$. Stąd

$$\mathcal{E}(\omega) = E [(\omega f)]$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} E [|F_T(j\omega)|^2] \quad (37)$$

W zasadzie gęstości widmowe są stosowane tylko do stacjonarnych procesów stochastycznych, ponieważ wówczas tylko gęstość widmowa procesu nie ulega zmianie przy dowolnym przesunięciu skali czasu. W analizie rzadko stosuje się gęstość widmową energii, gdyż drugie potęgi funkcji czasowych nie dają się na ogół efektywnie scałkować. Gęstość widmowa mocy jest pojęciem raczej dogodnym, dzięki któremu metody matematyczne projektowania statystycznego układów sterowania i dynamiki maszyn stają się proste.

W szczególnym przypadku procesu stochastycznego, nie tylko stacjonarnego lecz i ergodycznego, uśrednienie zbioru realizacji procesu stochastycznego zgodnie z równaniem (37) nie może dać wartości różnej od uzyskanej z obliczeń gęstości widmowej pojedynczej realizacji procesu stochastycznego.

2.4.1. Związek między gęstością widmową a funkcją korelacji własnej

Jeśli $f(t) = x(t)$ należy do zbioru realizacji procesu stochastycznego, w którym sprawdza się hipoteza ergodyczna, transformata funkcji korelacji własnej ϕ_{xx} ma postać

$$\phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt$$

gdzie:

$\varphi_{xx}(\tau)$ jest funkcją korelacji własnej procesu określaną z ogólnego równania korelacji wzajemnej

$$\varphi_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t) f_j(t + \tau) dt$$

czyli

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-j\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (37)$$

Po zastąpieniu $x(t)$ przez $x_T(t)$ zdefiniowane równaniem (27) łatwo zauważyć, że dla $T \rightarrow \infty$, $x(t)$ i $x_T(t)$ są w granicy identyczne

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-j\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt \quad (38)$$

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-j\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t + \tau) dt$$

Przyjmując, że można zmienić kolejność całkowania, otrzymamy

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} dt x_T(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x_T(t + \tau) e^{-j\omega\tau} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} dt x_T(t) e^{+j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x_T(t + \tau) e^{-j\omega(t + \tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) \end{aligned}$$

$$\Phi_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 \quad (39)$$

przy czym $X_T(j\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji $x_T(t)$

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(X_T(j\omega))^2}{T}$$

Jednakże z definicji gęstość mocy, mamy

$$S(\omega, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{(X_T(j\omega))^2}{T}$$

skąd

$$\Phi_{xx}(\omega) = \pi S(\omega, x) \quad (40)$$

W przypadku procesu stacjonarnego i ergodycznego:

$$S(\omega, x) = S(\omega)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \Phi_{xx}(\omega) \quad (41)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (42)$$

Ponieważ $\varphi_{xx}(\tau)$ jest funkcją parzystą, więc

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (43)$$

Z drugiej strony, z odwrotnego przekształcenia Fouriera funkcji $\Phi_{xx}(\omega)$ wynika że:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (44)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos\omega\tau d\omega \quad (45)$$

Widać stąd, że dla stacjonarnego i ergodycznego procesu stochastycznego gęstość widmowa mocy jest proporcjonalna do transformaty Fouriera funkcji korelacji własnej.

Zważywszy, że dla procesu stacjonarnego

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

skąd

$$\varphi_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \overline{x^2(t)} \quad (46)$$

Tak więc wartość średnia kwadratu realizacji procesu stochastycznego jest równa wartości funkcji korelacji własnej w punkcie $\tau = 0$.

Z równania (45)

$$\varphi_{xx}(0) = \int_0^{\infty} s(\omega) d\omega \quad (47)$$

Wynika stąd, że wartość średnią kwadratu realizacji stacjonarnego procesu stochastycznego można obliczyć bezpośrednio z jego gęstości widmowej mocy, stosując w tym celu ostatni wzór. Zadana funkcja korelacyjna może odnosić się do nieskończenie wielu funkcji czasowych. Podobną własność ma także gęstość wid-

mowa danego przebiegu. Ponieważ jednak obliczenie średniej kwadratu uchybu układów liniowych wymaga tylko tej informacji o widmie dlatego stało się ono tak popularne.

3. Pomiary widm akustycznych przebiegów dynamicznych maszyn wirnikowych

W ogólniejszym sensie widmo funkcji analizowanej $f(t)$ można przedstawić miarą widmową $F(d\omega)$ określaną relacją:

$$F(d\omega) = dF(\omega) = d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(\omega, t) dt = S(\omega) d\omega$$

gdzie:

$dF(\omega) \rightarrow \delta F(\omega)$ - amplituda składowej spektralnej o pulsacji ω ,

$f(t)$ - funkcja analizowana,

$\varphi(\omega, t)$ - funkcja analizująca,

$S(\omega)$ - gęstość amplitudy lub gęstość spektralna tzn. ilość amplitudy przypadająca na jednostkowy przedział częstości.

Jeśli funkcja analizująca $\varphi(\omega, t)$ będzie funkcją eksponentialną periodyczną tj. $\varphi(\omega, t) = e^{-j\omega t}$ to, widmo jest widmem furierowskim.

Symbol $d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt$ jest rozumiany jako $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots dt$ co

ujawnia charakter widma jako pewnej wielkości średniej.

Odwroćeniem analizy widmowej jest synteza, czyli

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\omega) \varphi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega + \sum_k R_k(\omega_k) \varphi(\omega, t)$$

przy tym całka $dF(\omega) \varphi(\omega, t)$ jest całką w sensie Stieltjesa.

Jeżeli $\varphi(\omega, t)$ oraz funkcja analizowana są funkcjami periodycznymi, to powyższa całka przechodzi w szereg Fouriera. Przejście od analizy fourierowskiej do analizy eksperymentalnej polega na przejściu od stałego widma średniego do widm chwilowych.

Najlepszą ze znanych metod [5] takiego przejścia jest metoda polegająca na znalezieniu takiej funkcji analizującej $\psi(\omega, t)$ aby rozkład funkcji analizowanej $f(t)$ na funkcje ortogonalne $\varphi(\omega, t)$ dawał wprost widmo chwilowe funkcji $f(t)$

$$dF(\omega) = d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(\omega, t) dt$$

Takie rozkłady istnieją, jak na przykład rodzina impulsów ortogonalnych

$$\varphi(\alpha, t) = e^{-j\alpha\omega_0 t} e^{-k^2(t-t_0)^2} = \varphi(\alpha, t) g(t)$$

Nadaje się on szczególnie do analizy drgań impulsowych i nieperiodycznych. W tym przypadku funkcja granic $g(t) = e^{-k^2(t-t_0)^2}$ będzie funkcją Gaussa a więc i funkcja przenoszenia aparatury (bramka) będzie również bramką gaussowską [14].

Analizator całkuje widmo względem ω w przedziale $\Delta\omega$, to znaczy w granicach swojej zdolności rozdzielczej. Całka jest wzięta w sensie Stieltiesa

$$\begin{aligned} \bar{F}(\omega) &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} dF(\omega) e^{j\omega t} = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \\ &+ \sum_k B_k (a_k) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Składowe sumy prawej strony stanowią: tło (całka) oraz suma \sum_k składowych periodycznych.

Jeżeli $\Delta\omega$ jest dostatecznie małe (czyli bramka jest dostatecznie wąska) to suma składowych periodycznych posiada tylko jeden składnik zwany prążkiem. Praktycznie zachodzi to dla $\Delta\omega \leq 2\pi 25$ Hz.

Dalsze zwężenie szerokości wąskiego pasma $\Delta\omega$ na jeszcze węższe i wykonanie analizy tego samego przebiegu powtórnie pozwala z łatwością odróżnić prążki od tła: mianowicie tło ulegnie obniżeniu, prążki pozostaną tej samej wysokości, gdyż w obu przypadkach w całości mieszczą się w bramce. Widać stąd zaraz wyraźnie, że prążki widmowe oraz tło są w innej skali.

Manipulacja szerokością pasma filtrów pozwala również rozróżnić czy mamy do czynienia z drganiem periodycznym o nieskończonej gęstości spektralnej, czy też z widmem ciągłym o gęstości skończonej.

Pomiar prawdziwej wysokości prążków widma gwarantuje oscyloskop katodowy lub galvanometr zwierciadłowy.

Spośród stosowanych metod w technice pomiaru drgań złożonych, analiza harmoniczna, po określeniu poszczególnych składowych dostarcza niewątpliwie najobszerniejszej informacji o drganiach. Ilość pomiarów jest jednak w tym przypadku duża i pomiary są odpowiednio pracochłonne. Drgania złożone wykazują przy tym zawsze pewne nieregularności i zakłócenia przypadkowe co prowadzi do niewłaściwej oceny drgań.

Najwłaściwszą metodą pomiaru drgań mechanicznych jest określenie wartości skutecznej, która daje ocenę niezależną od kształtu, zwłaszcza zaś od kątów fazowych drgań składowych.

Wartość skuteczna prędkości ruchu drgającego zalecana jest przez projekt normy na pomiary drgań IOS [16] jako miernik oceny poziomu drgań maszyn. Tym miernikiem jest prędkość równo-

ważna czyli $\sqrt{2}$ -krotna wartość średniej kwadratowej prędkości drgań:

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T [\dot{x}(t)]^2 dt}$$

Wybór prędkości jako parametru określającego ruch drgający uwarunkowany jest danymi doświadczalnymi o subiektywnej ocenie poziomu drgań maszyn w zakresie częstości do 500 Hz.

Z powyższego wynika, że celowym jest stosowanie układów pomiarowych określających bezpośrednio prędkość drgań i posiadających charakterystykę kwadratową.

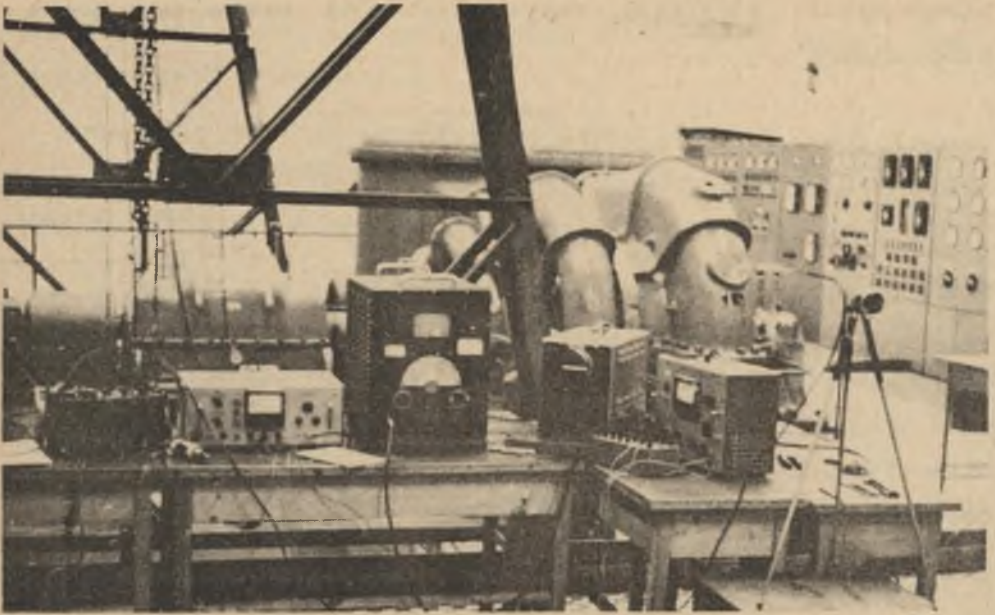
3.1. Charakterystyka stosowanej aparatury pomiarowej

Istnieje wiele typów aparatów do pomiarów wielkości dynamicznych maszyn wirnikowych. Ze znanych zestawów aparatury pomiarowej należy wyróżnić zestawy firm: Reutlinger oraz Brüel Kjaer.

Są to aparatury elektroniczne pozwalające na pomiar amplitudy i częstości, analizę drgań mechanicznych oraz efektów akustycznych a także na wyważanie dynamiczne wirników w łożyskach własnych maszyny [13].

Do badań stanu dynamicznego maszyn przepływowych - prowadzonych przez autora [8] - stosowany jest kombinowany zestaw aparatury w układzie (rys. 1):

- a) 2 czujniki dynamiczne z masą sejsmiczną (wzgl. zespół mikrofonów),
- b) lampowy miernik drgań (wzgl. fonometr),
- c) analizator częstości typu Pimonowa,
- d) oscyloskop,
- e) generator wzorcowy RC,
- f) rejestrator drgań.



Rys. 1. Zestaw stosowanej aparatury do badań diagnostycznych stanu dynamicznego maszyn wirnikowych

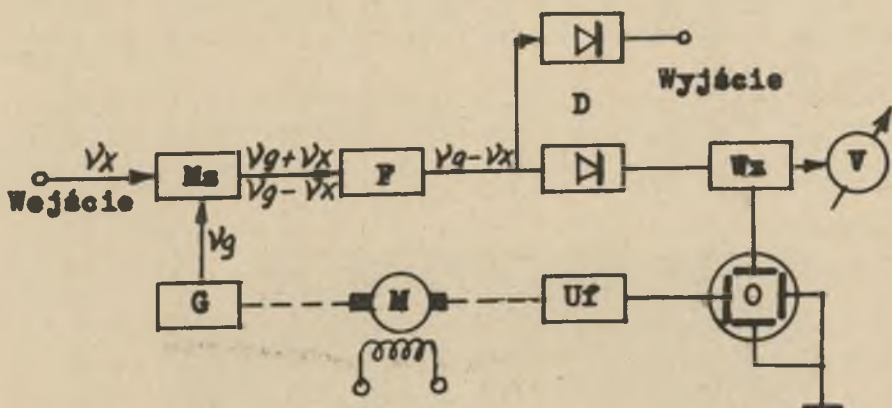
A n a l i z a t o r c z ę s t o ś c i A.F. 10S, [10]- wykonany wg systemu Pimonowa, stanowi układ heterodynowy z filtrem kwarcowym, od dwóch pasmach przenoszenia (bramkach) o szerokości połówkowej 30 Hz i 3 Hz.

Analizator ten pozwala na analizę składowych przebiegów o dynamice do 40 dB i częstościach 10 Hz-50 kHz, 100 Hz-15 kHz i 15-50 kHz.

Widmo ukazuje się na ekranie oscyloskopu panoramicznego z długą poświatą odciętą jest częstość, rzędną amplituda w skali liniowej (0-100%).

Skalę amplitud można przełączać w stosunku 1:10. Analizator jest wyposażony w posuw automatyczny umożliwiający przejście skali częstości w czasie 15 lub 150 S.

Zasadę działania analizatora heterodynowego przedstawiono na schemacie rys. 2.



Rys. 2. Blokowy schemat działania analizatora A.F. 10S

G - generator o zmiennej częstotliwości, M - silnik, Uf - układ formujący przesunięcie poziome, O - oscyloskop, V - wskaźnik, Ms - mieszacz, F - filtr kwarcowy, D - detektor, Wz - wzmacniacz

Przebieg badany w postaci przebiegu napięciowego podawany jest do mieszacza w którym poszczególne jego składowe zostają zdudnione z napięciem sinusoidalnym dostarczonym z wewnętrznego generatora o płynnie zmieniającej się częstotliwości w zakresie pomiarowym.

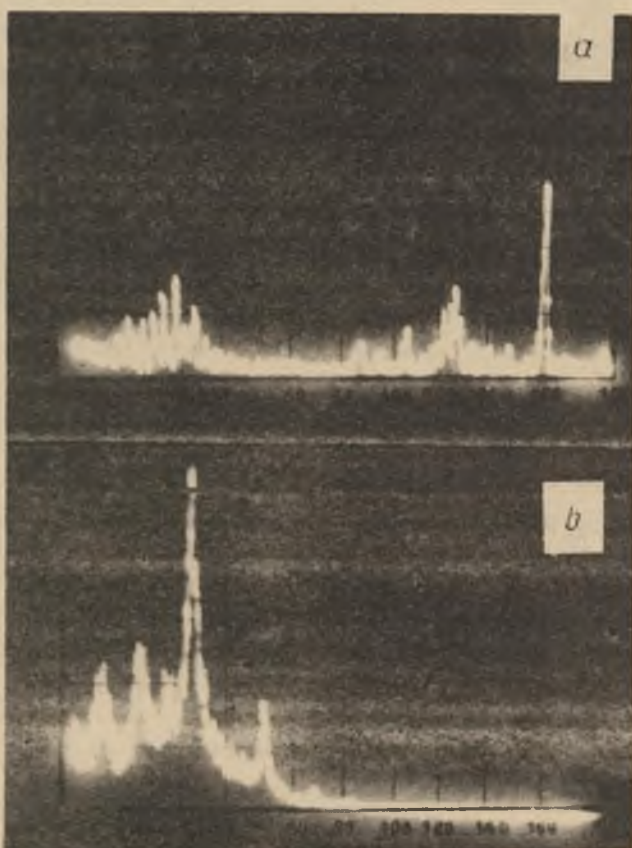
Podczas procesu analizy częstotliwość nośna generatora heterodyny zmienia się w sposób ciągły wskutek czego pasmo przenoszenia filtru analizującego pozornie przesuwają się wzdłuż analizowanego zakresu częstotliwości widma badanego sygnału.

W wyniku tego procesu powstaje napięcie wynikowe o częstotliwościach sumacyjnych ($v_g + v_x$) i różnicowych ($v_g - v_x$) lub ($v_x - v_g$).

Ponieważ na wyjściu mieszacza znajduje się filtr kwarcowy o bardzo wąskim paśmie przenoszenia i nastrojony na jedną stałą

częstość (50 kHz) do dalszych stopni analizatora, przepuszczone są sygnały jedynie wtedy, gdy kolejne częstotliwości składowe badanego przebiegu wytworzą w efekcie interferencji z sygnałem z generatora wewnętrznego sygnał różnicowy równy częstotliwości nastrojenia filtru.

Sygnały te po przejściu kolejnych stopni, gdzie ulegają wzmocnieniu i detekcji, podawane są na pionową parę płytek od-



Rys. 3. Obraz widma quasiprążkowego badanego przebiegu otrzymany na wskaźniku oscyloskopowym analizatora A.F. 10S

chylających lampy oscyloskopowej. Pozioma para płytek lampy zasilana jest napięciem, które tworzy jakby logarytmiczną oś częstości i jest zsynchronizowana z przestrajaniem generatora wewnętrznego.

Dzięki temu każdemu położeniu plamki świetlnej na ekranie lampy wzdłuż osi poziomej (odciętej) odpowiada jednoznacznie określona częstość. Przestrajanie generatora wewnętrznego i zmiana napięć na płytkach poziomych odbywa się automatycznie w efekcie czego plamka świetlna rysuje na ekranie lampy quasi-prążkowe widmo badanego przebiegu (rys. 3).

Analizator wyposażony jest w dodatkowe wyjście dla wyprowadzenia impulsu do rejestratora wymagającego sprzężenia ze skalą częstości generatora analizatora.

Dwa pasma przenoszenia o szerokościach połówkowych pasma 30 Hz i 3 Hz stanowią w zasadzie filtry wąskopasmowe i zgodnie z założeniem, służą przede wszystkim do analizy mikrostruktury widma, tj. do badania charakterystyk tonu podstawowego i jego harmonicznym.

Filtr wąskopasmowy (3 Hz) wydziela bez trudności poszczególne składowe harmoniczne tonu podstawowego nawet w przypadku bardzo niskich tomów.

Do analizy "formontowej" sygnału dynamiki wirnika maszyny przepływowej można wykorzystać filtr 30 Hz analizatora heterodynowego.

Ocenę szerokości pasma obu zastosowanych filtrów analizujących w A.F.10S, z punktu widzenia charakterystyk czasowych przebiegów akustycznych w stanie nieustalonym, można oprzeć na założeniu, że filtr wąskopasmowy (45 Hz) ze względu na swoją stałą czasową całkuje analizowane przebiegi w przedziałach ok. 1/50 s.

W związku z tym przebiegi szybko zmieniające się w czasie, określające na przykład zmiany amplitudy (poziomu) sygnału będą analizowane niedokładnie, gdyż ulegną znacznemu zniekształceniu.

Stąd też dokładność pomiaru poziomu zależy jest od prędkości automatycznego analizowania. Najdokładniejsze wyniki uzyskać można oczywiście przy małych prędkościach a więc przy ręcznym analizowaniu.

Pasma przenoszenia analizatora oraz prędkość analizy dobiera się tu zgodnie z warunkami procesu tj. z warunkami tego jak szybkie zmiany poziomu sygnału powinny być rejestrowane.

Przy maksymalnych prędkościach analizowania jakie umożliwia miernik błąd pomiaru osiąga 4 dB.

Szeroki zakres zastosowań zyskał ostatnio analizator duńskiej firmy Brüel & Kjaer. Analizator ten ma niemal wszystkie zalety klasycznego analizatora kanałowego, ale też i jedną istotną wadę: małą prędkość przełączenia filtrów kanałowych.

Filtry tercjowe zastosowane w tym analizatorze mają charakterystyki tłumienności o płaskich wierzchołkach i dość stromych zboczach.

Napięcie wyjściowe (względne w odniesieniu do składowej podstawowej) układu przełączeniowego jest rejestrowane na specjalnej taśmie papierowej rejestratora. Rejestrator ten stosować można zarówno do pomiaru uśrednionej obwiedni widma sygnału akustycznego jak i do wyznaczania obwiedni czasowej sygnału w pasmach o szerokości $1/3$ oktawy.

Wadą analizatora jest brak szybko działającego układu przełączenia filtrów pasmowych oraz zbyt duża szerokość ich pasm przenoszenia szczególnie w zakresie częstości 1000-3000 Hz.

Z punktu widzenia badania mikrostruktury widma sygnału akustycznego w zakresie dynamiki maszyn niezbędne jest stosowa-

nie pasm znacznie węższych. Warunek ten spełnia analizator AF-10S firmy LEA.

LITERATURA

- [1] BRACEWELL R.: Przekształcenia Fouriera i jego zastosowania WNT, Warszawa, 1965.
- [2] BRÜEL & KJÆR: Elektronische Messgeräte für Wissenschaft und Technik. Katalog 1967.
- [3] DEUTSCH R.: Teoria estymacji. PWN, Warszawa 1969.
- [4] DIETRICH J., JASKÓŁA Z., MAKOMASKI Z.: Charakterystyki częstościowe i funkcja korelacji w metodzie oceny konstrukcji i stanu przekładni zębatych.
IV Symposium Podstaw Konstrukcji Maszyn. Białystok-Białowieża 1969, Wyd. KOPKM Zeszyt 30, Gliwice, 1969.
- [5] FAZANOWICZ J.: Pomiary widm akustycznych. CMP, 1959, nr 19
- [6] GRELA St.: Świat dźwięków a informacja. Referat problemowy SEP HiL, Kraków, 1968. Powiel. ZTSS Pol. Sl. Gliwice.
- [7] GRELA St.: Diagnostyka dynamiki turbomaszyn. Referat problemowy SEP HiL, Kraków, 1968. Powiel. ZTCS Pol. Sl. Gliwice.
- [8] GRELA St., KUTARBA K., SEDLAK W.: Diagnostyka dynamiki sprzężarek wirnikowych i wyważanie.
Praca nauk. bad. (2 tomy) wyk. dla Huty im. Lenina w Krakowie 1968/69. Powiel. ZTCS Pol. Sl. Gliwice.
- [9] KALISKI S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
- [10] LABORATOIRE ELECTRO-ACONSTIQUE (LEA): Analyseur de fréquences AF.10S. Edition E. 1968.
- [11] OSIOWSKI I.: Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1965.
- [12] PAWŁOW B.W.: Badania diagnostyczne w technice, WNT Warszawa 1967.
- [13] RENTLINGER-SÖHNE: Instrukcja obsługi aparatury do pomiarów i analizy drgań oraz haładu firmy Reutlinger, 1967.

- [14] RYFFERT H.: Uzyskiwanie widma chwilowego na zasadzie uogólnionej analizy drgań. PTPN w Poznaniu, tom VIII, zeszyt 3/3, 1959.
- [15] VDI 2056: Beurteilungsstöße für Mechanische Schwingungen von Maschinen, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1960.
- [16] First Draft Proposal on Basic for specifying Evaluation Standards for Mechanical Vibrations of Machines International Organization for Standardization, Prague 1966.

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТУРБОМАШИН

Резюме

С точки зрения теории информации колебания, звуки и шум эмитируются в результате действия машины, являются закодированной формой кинематики и динамики происходящих в машине физических процессов.

В более широком представлении автором акустические диагностические исследования сводятся к детекции как способу обнаружения наличия или близости неопределенного объекта. Это именно детекция сигналов, которая заключается в констатировании, был ли фактически отобран желаемый сигнал, если сопутствуют ему нежелательные сигналы или шум.

Эффективная диагностическая система, предоставляющая подробные информации и свойствах конструктивных элементов и подузлов турбомашин а также оптимизация конструкции могут существенно уменьшить случайность в функционировании этого типа машин и создать условия разработать теорию надежности на другом основании, чем теория вероятности.

DIAGNOSTICAL RESEARCHES OF DYNAMIC STATE
OF ROTATING MACHINES

S u m m a r y

From the point of view of theory of information, vibrations sound and noise emitted by the work of machine are the code form of kinematics and dynamics of physical process taking place in a machine.

Acoustic diagnosis research develops detection of fact of existance or presence of undetermined object. It is then the signal detection which decides if there is received needed signal when there are unrequired noise and signals.

Effective diagnostic systems giving detailed informations properties of constructional elements and sub-assemblies of the flowing machine (rotating machine) and optimization of construction can effectively minimize the accidental events in functioning of that type of machines and enable the developing of the reliability theory on another basis than probability mathematics.