ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ENERGETYKA z. 34 Nr kol. 279

TADEUSZ CHMIELNIAK

Katedra Kotłów i Maszyn Cieplnych

USTALONY ROZKŁAD TEMPERATUR W GRUBOŚCIENNYCH RURACH LEKKO ZAKRZYWIONYCH

Streszczenie. W pracy podano rozwiązanie ustalonego rozkładu temperatur w rurach grubościennych lekko zakrzywionych. Do analizy problemu wybrano metodę zaburzeń. Rozpatrzono rozwiązanie podstawowe i pierwsze przybliżenie dla dwu różnych układów geometrycznych oraz różnych warunków brzegowych.

1. Wstęp

W pracy rozpatrzono analityczne rozwiązanie ustalonego rozkładu temperatur w rurach grubościennych lekko zakrzywionych. Do rozwiązania problemu wybrano metodę zaburzeń parametru charakteryzującego stopień zakrzywienia rury. Tematyka pracy związana jest z problematyką poszukiwania ustalonych i nieustalonych pól temperatur w elementach złożonych. Problematyka ta od pewnego okresu jest przedmiotem zainteresowania Katedry Cieplnych Maszyn Wirnikowych w związku z badaniami nad rozkładem temperatur w elementach turbin cieplnych. Przedstawiony w pracy sposób określenia rozwiązania można bez trudu zastosować do każdego typu warunków brzegowych i do geometrycznie innych elementów (np. do prętów o przekroju prostokątnym).

2. Równania wyjściowe i metoda rozwiązania

Rozpatrzmy element składający się z trzech części (rys. 1). Część pierwszą i trzecią stanowi prosty odcinek wydrążonego walca. Przylegający do nich odcinek zakrzywiony niech stanowi część drugą II. Części I i II oraz II i III posiadają wspólne przekroje a-a i zbudowane są z jednakowego materiału. Do określenia pola temperatur w części I i III elementu wykorzystamy współrzędne cylindryczne. W części II przyjmiemy natomiast współrzędne (rys. 1).

$$
\begin{aligned}
x &= - r \sin\varphi \\
y &= (e - r \cos\varphi) \cos \Theta \\
z &= (e - r \cos\varphi) \sin \Theta
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Po tych założeniach równania opisujące ustalone pola temperatur w tak przyjętych częściach rozpatrywanego elementu będą miały postać:

Część I, III

$$
\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial \beta^2} = 0 \tag{2}
$$

Część II

$$
\frac{\partial^2 T_2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{(1-\alpha\varepsilon\cos\varphi)^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \beta^2} +
$$

$$
+ \frac{1}{\alpha} \frac{\varepsilon \sin\varphi}{1-\alpha\varepsilon\cos\varphi} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\varepsilon\cos\varphi}{(1-\alpha\varepsilon\cos\varphi)} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} = 0 \tag{3}
$$

W dalszym ciągu pracy zakładać będziemy pełną symetrię kształtu elementu i warunków brzegowych względem przekroju $\Theta = 0$. W konsekwencji tego założenia wystarczy rozpatrzyć jedynie pola temperatur w części I i II. W części III elementu bowiem, rozkład temperatur będzie analogiczny jak w części I.

Rozwiązań równań (2) i (3) poszukiwać będziemy dla warunków:

$$\beta_1 = 0; \qquad T_1 = \varphi(\alpha) \tag{4}$$

$$\beta_1 = \beta_{10}, \ \beta_2 = -\beta_{20}; \qquad T_1 = T_2, \ \frac{\partial T_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial T_2}{\partial \beta_2}\,\frac{1}{1-\alpha\beta\cos\varphi} \tag{5}$$

$$\beta_2 = 0; \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \beta_2} = 0 \tag{6}$$

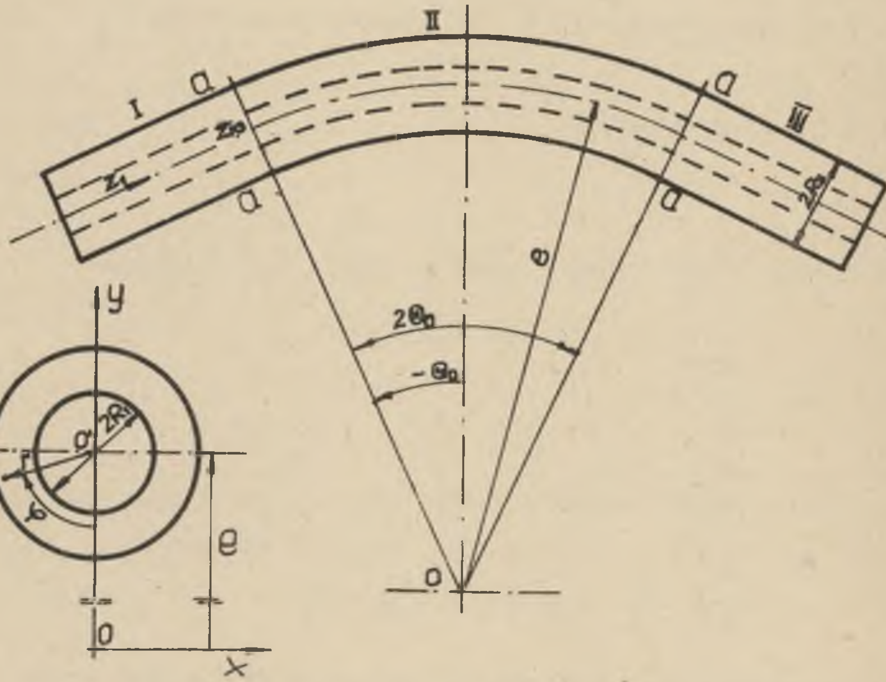
$$\alpha = 1; \qquad \frac{\partial T_p}{\partial \alpha} + Bi_1\left[Tc_1 - T_p\right] = 0$$

$$p = 1,2 \tag{7}$$

$$\alpha = k; \qquad -\frac{\partial T_p}{\partial \alpha} + \frac{1}{k}\,Bi_2\left[Tc_2 - T_p\right] = 0$$

W równaniach (2), (3) oraz w warunkach (4÷7) oznaczono: T_p - wartość temperatur, $\alpha = r/R_1$, $\beta_1 = {}^{z}/R_2$, $\beta_2 = \frac{\Theta e}{R_2}$ - współrzędne, $\varphi(\alpha)$ - dana funkcja spełniająca założenia gwarantujące zbieżność jej szeregu Fouriera-Bessela [1], Bi - liczba Biota, T_{ci} - temperatura otoczenia, $\varepsilon = {}^{R_2}/e$, $k = {}^{R_2}/R_1$, p - wskazuje ilość stref. Pozostałe oznaczenia jak na rys. 1.

Równanie opisujące ustalone pole temperatur w części II elementu zapisane w postaci (3) posiada współczynniki zależne od φ, α i parametru ε, który określa stopień zakrzywienia rury II. Ze względu na to, że próby otrzymania dokładnego rozwiązania równań (2), (3) z warunkami (4÷7) napotykają na ogromne trudności w dalszym ciągu zajmiemy się jego poszukiwaniem dla $\varepsilon \ll 1$, czyli rozpatrywać będziemy przypadki małych zakrzywień rury stanowiącej część II elementu.



Rys. 1. Rura grubościenna. Układy współrzędnych

Do skonstruowania rozwiązania zagadnienia brzegowego (2-7) dla małych wartości ε wykorzystamy metodę zaburzeń [3,4]. Szukane wartości temperatur w myśl tej metody przedstawimy w postaci szeregu

$$T_p = T_{op} + \varepsilon T_{1p} + \varepsilon^2 T_{2p} + \dots \tag{8}$$

Nieznane funkcje T_{op}, T_{1p} ... określają równania różniczkowe i warunki brzegowe otrzymane przez podstawienie wyrażenia (8) do równań (2), (3), warunków (4÷7) i następnie porównanie wyrażeń przy tych samych potęgach ε. W naszym przypadku skoncentrujemy się na wyznaczeniu wartości T_{op} i T_{1p}. Zagadnienia brzegowe dla ich wyznaczenia mają postać:

$$\nabla_I^2 T_{op} = 0 \qquad p = 1,2 \tag{9}$$

$$\beta_1 = 0; \quad T_{01} = \varphi(\alpha) \qquad \text{a)}$$

$$\beta_1 = \beta_{10}, \; \beta_2 = -\beta_{20}; \quad T_{01} = T_{02}, \; \frac{\partial T_{01}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial T_{o2}}{\partial \beta_2} \qquad \text{b)}$$

$$\beta_2 = 0, \quad \frac{\partial T_{o2}}{\partial_2} = 0 \qquad \text{c)} \qquad (10)$$

$$\alpha = 1; \quad \frac{\partial T_{op}}{\partial \alpha} + B_{i1}(T_{c1} - T_{op}) = 0 \qquad p = 1,2$$

$$\text{d)}$$

$$\alpha = k; \quad -\frac{\partial T_{op}}{\partial \alpha} + 1/k \; Bi_2 (T_{c2} - T_{op}) = 0 \qquad p=1,2$$

$$\nabla_{II}^2 T_{11} = 0 \tag{11}$$

$$\nabla_{II}^2 T_{12} = \cos\varphi \frac{\partial T_{o2}}{\partial \alpha} - 1/\alpha \sin\alpha \frac{\partial T_{o2}}{\partial \varphi} - 2\alpha\cos\varphi \frac{\partial^2 T_{o2}}{\partial \beta_2^2} \tag{12}$$

$$\beta_1 = 0; \quad T_{11} = 0 \qquad \text{e)}$$

$$\beta_1 = \beta_{10}, \; \beta_2 = -\beta_{20}; \; T_{11} = T_{12}, \; \frac{\partial T_{11}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial T_{o2}}{\partial \beta_2}\alpha\cos\varphi + \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_2}$$

$$\text{f)}$$

$$\beta_2 = 0; \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_2} = 0 \qquad g) \qquad (13)$$

$$\alpha = 1; \quad \frac{\partial T_{1p}}{\partial \alpha} + Bi_1 T_{1p} = 0 \qquad p = 1,2$$

$$h)$$

$$\alpha = k; \quad \frac{\partial T_{1p}}{\partial \alpha} + 1/k\ Bi_2 T_{1p} = 0 \qquad p = 1,2$$

gdzie:

$$\nabla^2_I = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1/\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_p^2}$$

$$\nabla^2_{II} = \nabla^2_I + 1/\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

3. Rozwiązanie równań (3) z warunkami brzegowymi (10)

Eliminując z równania (9) współrzędną α przy pomocy skończonej transformacji Hankela [2] o jądrze postaci:

$$U_n = \left[Y_o(\mu_{mo}) + \frac{\mu_{mo}}{Bi_1} Y_1(\mu_{mo})\right] J_n(\mu_{mn}\alpha) +$$

$$- \left[J_o(\mu_{mo}) + \frac{\mu_{mo}}{Bi_1} J_1(\mu_{mo})\right] Y_n(\mu_{mn}\alpha), \qquad n = o \qquad (14)$$

gdzie: J_n i Y_n są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju o wskaźnikach całkowitych nieujemnych, μ_{mo} są po uwzględnieniu warunków (10 d) pierwiastkami równania (15) dla $n = o$

$$\frac{U_n(k\mathcal{H})}{U_n'(k\mathcal{H})} = - \frac{\mathcal{H}}{\alpha_{2/\alpha_1} Bi_1} \qquad (15)$$

otrzymujemy do wyznaczenia przetransformowanej wielkości T_{op} zwyczajne równanie różniczkowe

$$\frac{d^2\bar{T}'_{op}}{d\beta_p^2} - \mu_{mo}^2 \bar{T}'_{op} = 0 \tag{16}$$

w którym

$$\bar{T}'_{op} = \bar{T}_{op} + R_1^2/\mu_{mo}^2 \left[2/\pi\ Tc_1 - U_o\ (\mu_{mo}k)\ Bi_2\ Tc_2\right] \tag{17}$$

Rozwiązaniem równania (16) jest każda liniowa kombinacja funkcji $\exp\{\pm\mu_{mo}\beta_p\}$. Można więc zapisać go po uwzględnieniu (17) w postaci:

$$\bar{T}_{op} = A_{mp} \cosh\mu_{mo}\beta_p + B_{mn} \sinh\mu_{mo}\beta_p - \xi/\mu_{mo}^2 \tag{18}$$

gdzie przez ξ oznaczono

$$\xi = R_1^2 \left[{}^2/\pi\ T_{c1} - U_o\ (\mu_{mo}k)\ Bi_2\ T_{c2}\right]$$

Z warunków (10) z łatwością znajdujemy dla A_{mp} i B_{mp}

$$A_{m1} = \psi(\mu_{mo}) + \xi/\mu_{mo}^2 \tag{19}$$

$$A_{m2} = \left[\psi(\mu_{mo}) + \xi/\mu_{mo}^2\right] : \cosh\mu_{mo}(\beta_{20}+\beta_{10}) \tag{20}$$

$$B_{m1} = -\left[\psi(\mu_{mo}) + \xi/\mu_{mo}^2\right] \operatorname{tgh}\mu_{mo}(\beta_{20}+\beta_{10}) \tag{21}$$

$$B_{m2} = 0 \tag{22}$$

przy czym

$$\psi(\mu_{mo}) = \int_{R_1}^{R_2} r\,\varphi(r)\, U_o(\mu_{mo}\alpha)\, d\alpha$$

Wykorzystując formułę odwracania dla skończonej transformacji Hankela [2],otrzymujemy ostatecznie dla T_{op} wyrażenie

$$T_{op} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_o(\mu_{mo}\alpha)}{Z_{mo}} \left[A_{mp} \cosh\mu_{mo}\beta_p + B_{mp} \sinh\mu_{mo}\beta_p - \xi/\mu_{mo}^2\right] \tag{23}$$

Z_{mo} w równaniu (23) oznacza normę funkcji $U_o(\mu_{mo}\alpha)$ i równa się wyrażeniu (24) dla $n = 0$.

$$Z_{mn}(\mu_{mn}) = \frac{R_2^2}{2} \frac{U_n^2(\mu_{mnk})}{\mu_{mn}^2} \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 Bi_1^2 + \frac{\mu_{mn}^2 k^2 - n^2}{k^2}\right] +$$

$$- \frac{R_1^2}{2} \frac{U_n^2(\mu_{mn})}{\mu_{mn}^2} \left[Bi_1^2 + \mu_{mn}^2 - n^2\right] \tag{24}$$

Dla $n = o$ wyrażenie to po uwzględnieniu równania charakterystycznego (15) daje się wyrazić przez:

$$Z_{mo}(\mu_{mo}) = \frac{2R_1^2}{\pi^2 Bi_1^2 \mu_{mo}^2} \left\{ \frac{\left[J_o(\mu_{mo}) + \frac{\mu_{mo}}{Bi_1} J_1(\mu_{mo})\right]^2 \left(\frac{\alpha^2}{\alpha_1} Bi_1^2 + \mu_{mo}^2\right)}{\left[\alpha_2/\alpha_1\, J_o(\mu_{mok}) - J_1(\mu_{mo}k) \frac{\mu_{mo}}{Bi_1}\right]^2} + \right.$$

$$\left. - \left(Bi_1^2 + \mu_{mo}^2\right) \right\}$$

Funkcje (23) będące rozwiązaniami (9) nazwać można podobnie jak to czyni się np. w mechanice płynów [4] rozwiązaniami podstawowymi. Stanowią one rozwiązanie zagadnienia rozkładu temperatur w rurach prostych dla warunków (10). Dla pewnych szczególnych warunków brzegowych rozwiązania te mogą być trywialnymi. Jest tak np. w przypadku izolowania rury od zewnątrz i wewnątrz i utrzymywania jej końców w równych temperaturach.

4. Rozwiązanie równań (11) i (12) z warunkami (13)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania rozpatrywanych równań należy ustalić w oparciu o rozwiązanie (23) ostateczną postać równania (12). W tym celu podstawmy (23) do (12). Po wykonaniu działań otrzymamy:

$$\nabla_{II}^{2} T_{12} = -2\alpha\cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} A'_{m2} \cosh \mu_{mo}\beta_2 \, U_o(\mu_{mo}\alpha) + \tag{25}$$

$$- \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} A''_{m2} \cosh \mu_{mo}\beta_2 \, U_1(\mu_{mo}\alpha)$$

gdzie:

$$A'_{m2} = \frac{\mu_{mo}^{2} A_{m2}}{Z_{mo}} \qquad\qquad A''_{m2} = \frac{\mu_{mo} A_{m2}}{Z_{mo}} \tag{26}$$

Ogólne rozwiązanie równania (11) po zastosowaniu skończonych transformacji Hankela i cosinusów może być przedstawione w postaci

$$T_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} (C_{mn} \cosh \mu_{mn}\beta_1 + D_{mn} \sinh \mu_{mn}\beta_1) U_n(\mu_{mn}\alpha) \cos n\varphi \tag{27}$$

gdzie C_{mn} i D_{mn} są stałymi zależnymi od wartości μ_{mn}, które są pierwiastkami równania (15) dla dowolnych n.
Rozwiązanie równania (25) wygodnie jest przedstawić w postaci sumy całki szczególnej (T'_{12}) tego równania i całki ogólnej (T''_{12}) odpowiadającego mu równania jednorodnego.

$$T_{12} = T'_{12} + T''_{12} \tag{28}$$

Całkę szczególną T'_{12} równania (24) można przedstawić formułą

$$T_{12}' = \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} G_{mr} \cosh(\mu_{mo}\beta_2)\, U_1(\mu_{r1}\alpha) \tag{29}$$

Występujące w (29) wielkości μ_{r1} są pierwiastkami równania (15) dla n = 1. Po podstawieniu (29) do (25) otrzymujemy do wyznaczenia G_{mr} równość

$$\sum_{r=1}^{\infty} G_{mr} (\mu_{mo}^2 - \mu_{r1}^2)\, U_1(\mu_{r1}\alpha) = -\left[2\alpha A'_{m2} U_o(\mu_{mo}\alpha) + A''_{m2} U_1(\mu_{mo}\alpha)\right] \tag{30}$$

z której po wykorzystaniu ortogonalnych własności funkcji Bessela otrzymujemy:

$$G_{mr} = \frac{-2A'_{m2} L_1 - A''_{m2} L_2}{(\mu_{mo}^2 - \mu_{r1}^2)\, Z_{1r}} \tag{31}$$

gdzie:

$$L_1 = \int_0^1 \alpha\, U_o(\mu_{mo}\alpha)\, U_1(\mu_{r1}\alpha)\, d\alpha \tag{32}$$

$$L_2 = \int_0^1 \alpha U_1 (\mu_{mo}\alpha)\, U_1 (\mu_{r1}\alpha)\, d\alpha \tag{32}$$

Z_{r1} - norma funkcji $U_1 (\mu_{r1}\alpha)$ obliczona z (24) dla $n = 1$.

Całkę ogólną T_{12} ze względu na formalne podobieństwo równania (11) i równania jednorodnego odpowiadającego równaniu (25) przedstawimy w tej samej postaci co (27)

$$T''_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} (E_{mn} \cosh \mu_{mn}\beta_2 + F_{mn} \sinh \mu_{mn}\beta_2)\, U_n(\mu_{mn}\alpha) \cos n\varphi \tag{33}$$

Dla konstrukcji ostatecznego rozwiązania koniecznym jest określenie w oparciu o warunki (13e,f,g) stałych: C_{mn}, D_{mn}, E_{mn} F_{mn}.

Z warunków (13) po wykorzystaniu ortogonalnych własności $U_s(\mu_{ts}\alpha)$ i $\cos(s\varphi)$ wynikają następujące równości:

z (13e)

$$C_{ts} = 0 \tag{34}$$

z (f) i (g)

$s \neq 1$, $t \geqslant 1$

$$D_{ts} \sinh \mu_{ts}\beta_{10} = E_{ts} \cosh \mu_{ts}\beta_{20} + F_{ts} \sinh \mu_{ts}\beta_{20} \tag{35}$$

$$D_{ts} \cosh \mu_{ts}\beta_{10} = - E_{ts} \sinh \mu_{ts}\beta_{20} + F_{ts} \cosh \mu_{s}\beta_{20} \tag{36}$$

$$F_{ts} = 0 \tag{37}$$

$\bar{s} = 1, \quad t \geq 1$

$$D_{t1} \sinh\mu_{t1}\beta_{10} = E_{t1} \cosh\mu_{t1}\beta_{20} + F_{t1} \sinh\mu_{t1}\beta_{20} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} G_{mt} \cosh\mu_{mo}\beta_{20} \tag{38}$$

$$D_{t1} \cosh\mu_{t1}\beta_{10} + E_{t1} \sinh\mu_{t1}\beta_{20} - F_{t1} \cosh\mu_{t1}\beta_{20} =$$
$$= - 1/Z_{t1}\mu_{t1} \sum_{m=1}^{\infty} A''_{m2} \sinh\mu_{mo}\beta_{20} \int_0^1 \alpha^2 U_o (\mu_{mo}\alpha) U_1 (\mu_{t1}\alpha) d\alpha +$$
$$+ 1/\mu_{t1} \sum_{m=1}^{\infty} G_{mt}\, \mu_{mo} \sinh\mu_{mo}\beta_{20} \tag{39}$$

$$F_{t1} = 0 \tag{40}$$

Z równań (35), (36), (37) łatwo stwierdzić, że:

$$D_{ts} = E_{ts} = F_{ts} = 0 \qquad s \neq 1$$

Natomiast dla stałych D_{t1}, E_{t1} otrzymujemy po rozwiązaniu układu równań (38), (39), (40) wyrażenia (w wyprowadzonych związkach odpowiednio zmieniono wskaźniki):

$$D_{m1} = \frac{1}{\cosh\mu_{m1}(\beta_{10}+\beta_{20})} \sum_{n=i}^{\infty} \Big\{ G_{nm} \cosh\mu_{no}\beta_{20} \big[\sinh\mu_{m1}\, \beta_{20} -$$

(41)

$$- \frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}} \operatorname{tgh}\mu_{no}\beta_{20} \cosh\mu_{m1}\beta_{20} \Big] + \frac{I_{nm}}{Z_{m1}\mu_{m1}} \cosh\mu_{m1}\beta_{20} \Big\} \tag{41}$$

$$E_{m1} = \frac{1}{\cosh\mu_{m1}(\beta_{10}+\beta_{20})} \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ G_{nm} \cosh\mu_{no}\beta_{20} \Big[- \cosh\mu_{m1}\beta_{10} +$$

$$+ \frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}} \operatorname{tgh}\mu_{no}\beta_{20} \cosh\mu_{m1}\beta_{10} \Big] + \frac{I_{nm}}{Z_{m1}\mu_{m1}} \sinh\mu_{m1}\beta_{10} \Big\} \tag{42}$$

gdzie:

$$I_{nm} = - \sum_{n=1}^{\infty} A'_{n2} \sinh\mu_{no}\beta_{20} \int_{0}^{1} \alpha^2 \, U_o(\mu_{no}\alpha) \, U_1(\mu_{m1}\alpha) \, d\alpha \tag{43}$$

Po wprowadzeniu wielkości (34), (40), (41), (42) do związków (27), (28) otrzymujemy ostateczną formę szukanych rozwiązań dla T_{1p}, $p = 1,2$.

Wielkości T_{1p} zgodnie z panującą w teorii zaburzeń nomenklaturą nazywamy pierwszym przybliżeniem lub rozwiązaniem pierwszego rzędu.

W naszym przypadku założono, że rozpatrywane będą tylko rozwiązania T_{op} i T_{1p}. Niemniej jednak istnieje możliwość znalezienia dalszych rozwiązań, posługując się przy tym podobnym do przedstawionego w tej pracy aparatem matematycznym.

5. Ustalony rozkład temperatur w elemencie rurowym niesymetrycznym (rys. 2)

Zagadnienie ustalonego rozkładu temperatur w elemencie podanym na rys. 2 rozwiązano dla warunków brzegowych:

$$\beta_1 = 0; \qquad T_1 = \varphi_1(\alpha) \tag{44}$$

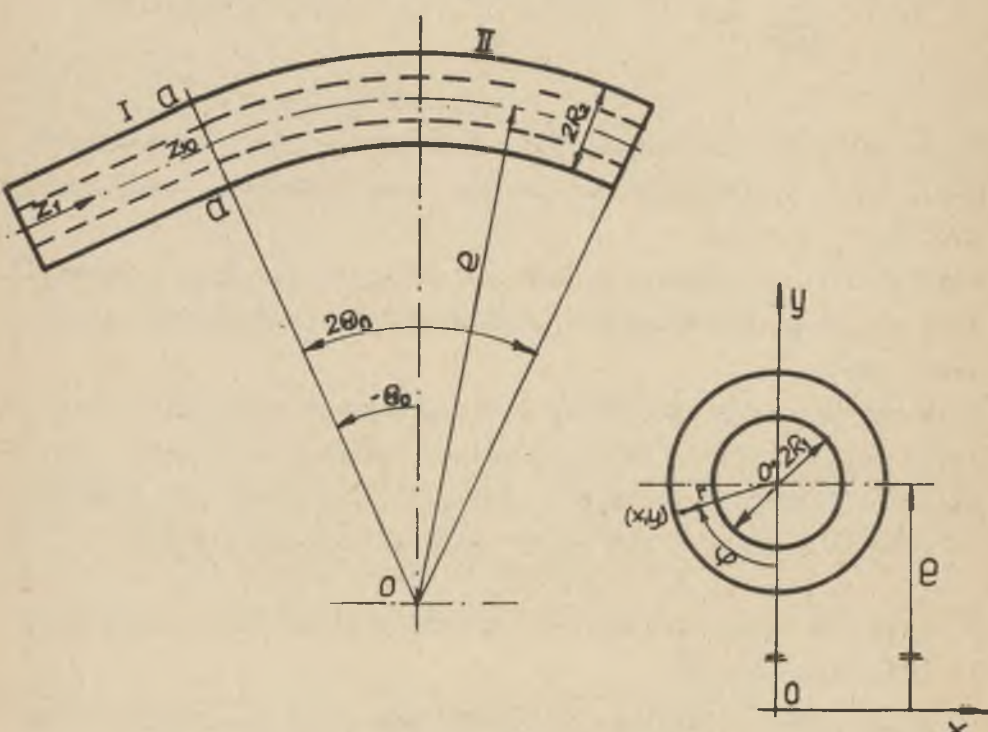
$$\beta_1 = \beta_{10}, \quad \beta_2 = -\beta_{20}; \quad T_1 = T_2, \ \frac{\partial T_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial T_2}{\partial \beta_2} \ \frac{1}{1-\alpha\varepsilon\cos\varphi} \tag{45}$$

$$\beta_2 = \beta_{20}; \qquad T_2 = \varphi_2(\alpha) \tag{46}$$

$$\alpha = 1; \qquad T_p = T_c$$

$$p = 1,2 \tag{47}$$

$$\alpha = k; \qquad \frac{\partial T_p}{\partial_r} = 0$$



Rys. 2. Rura grubościenna. Układy współrzędnych

Ponieważ tok postępowania przy znajdywaniu rozwiązania tego przypadku jest analogiczny jak w punktach poprzednich, w dalszym ciągu pominiemy wyprowadzenia, podając tylko rezultaty końcowe.

Przyjmując to samo co poprzednio oznaczenia, rozwiązania podstawowe, obecnie rozpatrywanego problemu zapiszemy w postaci:

$$\Theta_{op} = \frac{T_{op}-T_c}{T_c} = \sum_{m=1} \frac{U_o(\mu_{mo}\alpha)}{Z_{mo}} \left(A_{mp} \cosh\mu_{mo}\beta_p + B_{mp} \sinh\mu_{mo}\beta_p\right) \tag{48}$$

Przy czym: Z_{mo} równa się Z_{mn} dla $n = 0$

$$Z_{mn} = \frac{2\,R_1^2}{\pi^2\mu_{mn}}\, J_o^2(\mu_{mo}) \left\{ \frac{\left[1 - \frac{n^2}{\mu_{mn}^2 k^2}\right] J_n^2(\mu_{mn}) - \left[J_n'(\mu_{mnk})\right]}{\left[J_n'(\mu_{mn}k)\right]^2 J_n^2(\mu_{mn})} \right\} \tag{49}$$

a μ_{mn} określone są przez równania (50) dla $n = o$

$$U_n'(\mu_{mn}R_2) = 0, \quad U_n(\mu_{mn}R_1) = 0 \tag{50}$$

Formuły dla stałych A_{mp} i B_{mp} podają związki (51).

$$A_{m1} = \psi_1(\mu_{mo})$$

$$A_{m2} = \frac{\psi_1(\mu_{mo})\sinh\mu_{mo}\beta_{20} + \psi_2(\mu_{mo})}{\sinh\mu_{mo}(\beta_{10} + 2\beta_{20})}$$

$$B_{m1} = \frac{\psi_2(\mu_{mo}) - \psi_1(\mu_{mo})\cosh\mu_{mo}(\beta_{10}+\beta_{20})}{\sinh\mu_{mo}(\beta_{10}+2\beta_{20})} \tag{51}$$

$$B_{m2} = \frac{\psi_1(\mu_{mo}) \sinh\mu_{mo}\beta_{20} \cosh\mu_{mo}\beta_{20} +}{\sinh\mu_{mo}\beta_{20} \sin\mu_{mo}(\beta_{10} + 2\beta_{20})} \tag{51}$$

$$\frac{\psi_2(\mu_{mo}) \left[\sinh\mu_{mo} (\beta_{10}+\beta_{20}) - \cosh\mu_{mo}\beta_{20}\right]}{}$$

gdzie:

$$\psi_i = R_1^2 \int_1^k \alpha U_o (\mu_{mo}\alpha) \frac{\varphi_i(\alpha) - T_c}{T_c} d\alpha$$

Rozwiązania rzędu pierwszego mają postać:

$$T_{11} = \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} D_{m1} \sinh\mu_{m1}\beta_1 U_1 (\mu_{m1}\alpha) \tag{52}$$

$$T_{12} = \cos\varphi \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (E_{m1} \cosh\mu_{m1}\beta_2 + F_{m1} \sinh\mu_{u1}\beta_2) U_1(\mu_{m1}\alpha) + \right. \tag{53}$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cosh\mu_{mo}\beta_2 + H_{mn} \sinh\mu_{mo}\beta_2) U_1 (\mu_{m1}\alpha) \right\}$$

Stałe D_{m1}, E_{m1}, F_{m1}, G_{mn}, H_{mn} dane są formułami:

$$D_{m1} = \frac{1}{\sinh\mu_{m1} (\beta_{10} + 2\beta_{20})} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \cosh\mu_{no}\beta_{20} \left[\cosh\mu_{m1} 2\beta_{20} + \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}} \operatorname{tgh}\mu_{no}\beta_{20} \sinh\mu_{m1} 2\beta_{20} - 1\right] - \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sinh\mu_{no}\beta_{20} \quad x$$

(54)

$$\times\left[\cosh\mu_{m1}\,2\beta_{20}-\frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}}\,\mathrm{ctgh}\,\mu_{no}\beta_{20}\,\sinh\mu_{m1}\,2\beta_{20}+1\right]+$$

$$+\,1/Z_{m1}\mu_{m1}\;I_{nm}\,\sinh\mu_{m1}\,2\,\beta_{20}\Big\}\tag{54}$$

$$E_{m1}=\frac{1}{\sinh\mu_{m1}(\beta_{10}+2\beta_{20})}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}\,\cosh\mu_{no}\beta_{20}$$

$$\left[\sinh\mu_{m1}\beta_{20}\,\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\times\left(\frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}}-\mathrm{ctgh}\,\mu_{m1}\beta_{10}\right)-\sinh\mu_{m1}(\beta_{10}+\beta_{20})\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}\,\sinh\mu_{no}\beta_{20}\Big[\sinh\mu_{m1}\beta_{20}\,\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\left(\frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}}+\mathrm{ctgh}\,\mu_{m1}\beta_{20}\right)+$$

$$-\sinh\mu_{m1}(\beta_{10}+\beta_{20})\Big]+1/Z_{m1}\mu_{m1}\;I_{nm}\,\sinh\mu_{m1}\beta_{20}\,\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\Big\}\tag{55}$$

$$F_{m1}=-\frac{1}{\sinh\mu_{m1}(\beta_{10}+2\beta_{20})}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}\,\cosh\mu_{no}\beta_{20}$$

$$\left[\cosh\mu_{m1}\beta_{20}\,\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\times\left(\frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}}-\mathrm{ctgh}\,\mu_{m1}\beta_{10}\right)+\cosh\mu_{m1}(\beta_{20}-\beta_{10})\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}\,\sinh\mu_{no}\beta_{20}\Big[\cosh\mu_{m1}\beta_{20}\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\left(\frac{\mu_{no}}{\mu_{m1}}+\mathrm{ctgh}\,\mu_{m1}\beta_{10}\right)+$$

$$+\cosh\mu_{m1}\,(\beta_{20}-\beta_{10})\Big[+1/Z_{m1}\mu_{m1}\;I_{nm}\cosh\mu_{m1}\beta_{20}\sinh\mu_{m1}\beta_{10}\Big\}\tag{56}$$

$$G_{mn} = \frac{-2\,A''_{n2}\,L_1 - A''_{n2}\,L_2}{(\mu_{no}^2 - \mu_{m1}^2)\;Z_{m1}} \tag{57}$$

$$H_{mn} = \frac{-2\,B'_{n2}\,L_1 - B''_{n2}\,L_2}{(\mu_{no}^2 - \mu_{m1}^2)\;Z_{m1}} \tag{58}$$

gdzie:

μ_{m1} są pierwiastkami równań (50) dla $n = 1$.

Wartości Z_{m1} określone są przez związek (49) dla $n = 1$,

$$B'_{n2} = \frac{\mu_{no}^2\;B_{n2}}{Z_{no}}, \qquad B''_{n2} = \frac{\mu_{no}\;B_{n2}}{Z_{no}},$$

$$I_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B''_{n2}\cosh\mu_{no}\beta_{20} - A''_{n2}\sin\mu_{no}\beta_{20}\right) \times$$

$$\times \int_0^1 \alpha^2\,U_o\,(\mu_{no}\alpha)\,U_1\,(\mu_{m1}\alpha)\,d\alpha,$$

wyrażenie A'_{n2}, A''_{n2}, L_1, L_2 są określone odpowiednio przez związki: (26), (32) dla obowiązujących w tym przykładzie wartości μ_{mn}.

5. Uwagi końcowe

Jak już podkreślano, w pracy zajęto się poszukiwaniem jedynie rozwiązania podstawowego i pierwszego przybliżenia. Można więc otrzymane rezultaty stosować do stosunkowo niewielkich zakrzywień rury ($\varepsilon < 0{,}2$). Poszukiwanie rozwiązań dla drugiego przybliżenia jest oczywiście możliwe, jednak otrzymywane wyniki są mocno skomplikowane i praktyczne ich stosowanie jest bardzo utrudnione. W przypadkach gdy rozwiązanie podstawowe jest trywialne trudność otrzymania drugiego przybliżenia jest analogiczną do trudności otrzymania rozpatrywanego w niniejszej pracy pierwszego przybliżenia. W tym przypadku rozwiązania można stosować z dużą dokładnością dla ε nieco większych niż 0,2.

Stosując tą samą metodę można bez większych trudności podać podobne rozwiązania dla innych geometrycznie elementów i innych warunków brzegowych. Metodę zaburzeń może również służyć do określenia wpływu na pola temperatur innego rodzaju zaburzeń kształtu elementu. Problemy te będą rozpatrywane w następnych pracach.

LITERATURA

[1] LEBIEDIEW N.M.: Funkcje specjalne i ich zastosowania, PWN, Warszawa 1957.

[2] ŁYKOW A.B.: Teoria tiepłoprowodnosti, Wyższaja Szkoła, Moskwa, 1967.

[3] POŁOŻY G.N. i inni: Metody przybliżonych obliczeń, WNT Warszawa, 1966.

[4] VAN DYKE M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Acad Press., London, New York, 1964.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБАХ ЛЕГКО ЗАГНУТЫХ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено задачу об определении температур в толстостенных легко загнутых. Для решения этой проблемы использовано метод возмущений. Приводится расспределения температур для двух разных геометрических конфигураций и для разных граничных условий.

STATIONARY TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A THICK-WALLED NO MUCH CURVED TUBES

S u m m a r y

In this paper a solution of stationary temperature distribution in a thick-walled no much curved tubes have been given. The perturbation method has been employed. The temperature are determined for the different geometrical configurations and different boundary conditions.