ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 39 Nr kol. 310

JULIAN MARSZAŁ
Instytut Matematyki

BOHDAN MOCHNACKI
Instytut Matematyki

O PEWNEJ METODZIE OBLICZANIA STACJONARNEGO POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono nowy sposób numerycznego rozwiązania problemu przewodzenia ciepła w ciałach stałych. Metodę rozwiązania, nazwaną przez autorów metodą doboru współczynników wzorów interpolacyjnych dla przekrojów pola temperatur, zilustrowano przykładem liczbowym.

1. Wstęp

Problem ustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych o przewodności λ sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatur w postaci funkcji $t(P)$, $P \in \Omega$ spełniającej równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 t = 0 \tag{1}$$

w obszarze Ω oraz warunki brzegowe na brzegu Γ obszaru Ω. W dalszej części artykułu rozpatrywać będziemy zagadnienie dwuwymiarowe w obszarze zorientowanym przy pomocy układu prostokątnego, czyli równanie Laplace'a w postaci:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

przy następujących warunkach brzegowych:

1: Określony rozkład temperatur na brzegu

$$t(x, y) = t_\Gamma(x, y) \tag{3}$$

gdzie:

t_Γ – temperaturą na brzegu obszaru.

2: Określony rozkład strumienia cieplnego na brzegu

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = q(x, y) \tag{4}$$

3: Określony związek między temperaturą i jej gradientem na powierzchni

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha \left[t_{\Gamma}(x, y) - t_{o}(x, y) \right] = 0 \tag{5}$$

gdzie:

α - współczynnik wnikania ciepła,

t_o - temperatura ośrodka otaczającego ciało stałe.

Dopuszczamy również możliwość wystąpienia tych warunków równocześnie na różnych odcinkach brzegu obszaru. Do rozwiązania tego typu zadań [1] stosuje się najczęściej metody numeryczne oparte na znanym schemacie różnic skończonych. Istotą tych metod jest zastąpienie funkcji rzeczywistych funkcjami typu "schodkowego", które przy odpowiednio gęstym podziale różnicowym obszaru stanowią dostateczną aproksymację zmienności funkcji rzeczywistych.

Przedstawioną w niniejszym artykule nową metodę obliczeń stacjonarnego pola temperatur opisanego równaniem (2) i warunkami (3), (4), (5) można nazwać metodą doboru współczynników wzorów interpolacyjnych dla przekrojów pola temperatur.

2. Metoda obliczeniowa

Rozpatrywać będziemy płaski obszar Ω, ograniczony konturem Γ, na który została naniesiona siatka prostokątna o dowolnym skoku (rys. 1):

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{6}$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \tag{7}$$

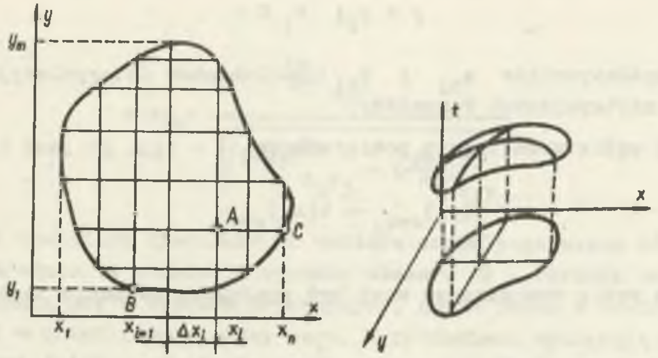
gdzie:

$i = 1,2,\ldots,n$

$j = 1,2,\ldots,m$

Przyjęty podział siatkowy determinuje jednoznacznie położenie w płaszczyźnie xy węzłów wewnętrznych (punkt A na rys. 1), brzegowych B oraz tzw. węzłów brzegowych specjalnych C. Węzłami specjalnymi nazwano te punkty, w których na brzegu obszaru przecinają się dwie linie podziału siatkowego.

Przy ustalaniu siatki dla rozpatrywanego obszaru należy dążyć do tego, aby węzły brzegowe specjalne znalazły się przede wszystkim w punktach, gdzie kierunek wektora normalnego do konturu ograniczającego obszar, znacznie odbiega od kierunku osi współrzędnych. Na tych wycinkach konturu, gdzie wektor normalny jest w przybliżeniu prostopadły do jednej z osi rodzaju węzła nie odgrywa większej roli.



Rys. 1. Podział siatkowy obszaru Ω. Przekrój powierzchni $t = t(x, y)$

Linie podziałowe x_i = idem oraz y_j = idem traktujemy jako bazę dwóch rodzin płaszczyzn wzajemnie prostopadłych (i prostopadłych do płaszczyzny obszaru Ω), których zadaniem jest wyróżnienie wybranych przekrojów powierzchni $t = t(x, y)$.
Linie przenikania o równaniach:

$$t = t(y)_{x=x_i} \tag{8}$$

oraz

$$t = t(x)_{y=y_j} \tag{9}$$

są funkcjami tylko jednej zmiennej.

Wykorzystując warunek interpolacji (zerowe odchyłki od wartości funkcji w wybranych punktach), równania przekrojów można zapisać w postaci:

$$t(y)_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\, y^{j-1} \tag{10}$$

$$t(x)_{y=y_j} = \sum_{i=1}^{k_j} b_{ij}\, x^{i-1} \tag{11}$$

gdzie:

k_i - ilość węzłów wewnętrznych i brzegowych w przekroju

$$x = x_i; \quad k_i \leqslant m$$

k_j - ilość węzłów wewnętrznych i brzegowych w przekroju

$$y = y_j; \quad k_j \leqslant n$$

Wartości współczynników a_{ij} i b_{ij} wielomianów interpolacyjnych można obliczyć z następujących warunków:

1° w każdym węźle wewnętrznym powierzchnia $t = t(x, y)$ jest ciągła, czyli

$$t(y_j)_{x=x_i} = t(x_i)_{y=y_j} \tag{12}$$

2° w każdym węźle wewnętrznym musi być spełnione równanie Laplace'a, czyli

$$\frac{d^2 t(y_j)_{x=x_i}}{dy^2} + \frac{d^2 t(x_i)_{y=y_j}}{dx^2} = 0 \tag{13}$$

3° w każdym węźle brzegowym musi być spełniony jeden z warunków (3), (4), (5)

$$t(y_j)_{x=x_i} = t_\Gamma(x_i y_j) \tag{14}$$

$$t(x_i)_{y=y_j} = t_\Gamma(x_i y_j) \tag{15}$$

lub

$$\frac{\partial t(x_i y_j)}{\partial n} = \frac{dt(x_i)_{y=y_j}}{dx} \cos\alpha_1 + \frac{dt(y_j)_{x=x_i}}{dy} \cos\alpha_2 = f(x_i y_j) \tag{16}$$

gdzie:

$\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ - cosinusy kierunkowe wektora normalnego do konturu ograniczającego obszar Ω w punkcie $P(x_i y_j)$.

Jeżeli rozpatrywany wycinek konturu określony jest równaniem $\varphi(x,y) = 0$, to:

$$\cos_1 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x_i y_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2_{x_i y_j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2_{x_i y_j}}} \tag{17}$$

oraz

$$\cos\alpha_2 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x_i y_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2_{x_i y_j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2_{x_i y_j}}} \tag{18}$$

Wartości cosinusów kierunkowych wektora normalnego można również określić bezpośrednio na podstawie rysunku obszaru Ω. Warunki brzegowe znacznie upraszczają się w węzłach zwyczajnych, gdzie jeden z cosinusów kierunkowych jest w przybliżeniu równy zero. W równaniach występują wówczas pochodne odpowiednich wielomianów interpolacyjnych (por. str. 71).

Warunek brzegowy 3 rodzaju:

$$\lambda \frac{\partial t(x_i y_j)}{\partial n} = \alpha\left[t_o(x_i y_j) - t(x_i y_j)\right] \tag{19}$$

gdzie:

$t(x_i y_j)$ – jest temperaturą na brzegu obszaru, modelujemy analogicznie jak równanie (16).

Dla węzłów brzegowych w narożach wewnętrznych (węzły brzegowe specjalne) muszą być spełnione dwa równania. Pierwsze z nich wynika z odpowiedniego warunku brzegowego, drugie zaś z równości temperatur w punkcie styku dwóch wielomianów interpolacyjnych (12)).

Zbiór wszystkich warunków, jakie muszą spełniać wielomiany interpolacyjne w węzłach obszaru siatkowego, tworzy układ r równań liniowych:

$$r = 2(r_1 + r_3) + r_2 \tag{20}$$

gdzie:

r_1 – ilość węzłów wewnętrznych,

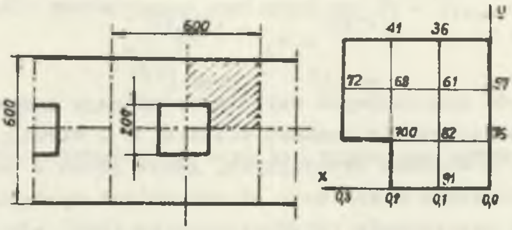
r_2 – ilość węzłów brzegowych,

r_3 – ilość węzłów brzegowych specjalnych.

Po obliczeniu wartości współczynników a_{ij} i b_{ij} wzorów interpolacyjnych, z zależności (10) i (11) można obliczyć wartości temperatur w węzłach siatki.

3. Przykład obliczeniowy

Opisaną wyżej metodę zastosujemy do wyznaczenia rozkładu temperatur w betonowej płycie grzejnej pokazanej na rys. 2. Temperatura czynnika grzejnego wynosi t_g, temperatura otoczenia t_o. Założono, że temperatura płynu grzejnego jest równa temperaturze na granicy obszaru płyty (I warunek brzegowy). Przepływ ciepła do otoczenia określony jest III warunkiem brzegowym, zaś w płaszczyznach symetrii płyty mamy szczególny przypadek warunku brzegowego II rodzaju $\dot{q} = 0$.



Rys. 2. Rozkład temperatur w płycie grzejnej

Współczynnik wnikania ciepła $\alpha = 11,6$ W/m^{2}deg, współczynnik przewodzenia $\lambda = 0,8$ W/m deg, $t_g = 100^oC$, $t_o = 20^oC$.
Wielomiany interpolacyjne dla przyjętych przekrojów pola temperatur:

$$
\begin{aligned}
t(x)_{y=0,1} &= a_{11} + a_{12}\,x + a_{13}\,x^2 \\
t(x)_{y=0,2} &= a_{21} + a_{22}\,x + a_{23}x^2 + a_{24}x^3 \\
t(y)_{x=0,1} &= b_{11} + b_{12}\,y + b_{13}y^2 + b_{14}y^3 \\
t(y)_{x=0,2} &= b_{21} + b_{22}\,y + b_{23}y^2
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Równania wynikające z równości pola temperatur w węzłach siatki:

$x = 0,1$
$y = 0,1$

$b_{11} + 0,1\, b_{12} + 0,01\, b_{13} + 0,001\, b_{14} - a_{11} - 0,1\, a_{12} - 0,01\, a_{13} = 0$

....
....

Warunki wynikające z równania Laplace'a:

$x = 0,1$
$y = 0,1$

$$2\, b_{13} + 0,6\, b_{14} + 2\, a_{13} = 0$$

....

....

Izolacja na brzegu (II warunek brzegowy):

$x = 0{,}0$

$y = 0{,}1$

$$a_{12} = 0$$

....

....

III warunek brzegowy:

$x = 0{,}1$

$y = 0{,}3$

$$11{,}6\ b_{11} + 4{,}28\ b_{12} + 1{,}524\ b_{13} + 0{,}5292\ b_{14} = 232$$

....

....

I warunek brzegowy:

$x = 0{,}2$

$y = 0{,}1$

$$b_{21} + 0{,}1\ b_{22} + 0{,}01\ b_{23} = 100^{x)} \qquad (22)$$

....

....

Rozwiązanie układu równań (22):

$a_{11} = 75{,}7$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = 608$	
$a_{21} = 56{,}6$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 498$	$a_{24} = -1107$
$b_{11} = 90{,}8$	$b_{12} = 0$	$b_{13} = -1051$	$b_{14} = 1474$
$b_{21} = 135{,}5$	$b_{22} = -372$	$b_{23} = 166$	

Wartości temperatur w węzłach obliczone z równań (21) przedstawiono na rys. 2.

4. Wnioski końcowe

Zasadniczą różnicą między metodą doboru współczynników wzorów interpolacyjnych przekrojów a klasycznymi metodami różnicowymi jest wprowadzenie w miejsce powierzchni typu schodkowego powierzchni ciągłej, będącej lepszą aproksymacją rzeczywistego pola temperatur. Lepszy "model" powierzch-

x) W punkcie $x = 0{,}2$, $y = 0{,}1$ mamy w zasadzie 3 równania warunkowe, dwa wynikające z zadanej temperatury na brzegu i jedno wynikające z równości temperatur, ale tylko dwa z nich są liniowo niezależne.

ni $t = t(x, y)$ wiąże się jednak z bardziej złożoną postacią układu równań warunkowych. W przypadku realizacji obliczeń na elektronicznych maszynach cyfrowych komplikacja nie ma większego znaczenia.

Istotną zaletą przedstawionej w niniejszym artykule metody jest możliwość rozwiązywania zadań przy zachowaniu rzeczywistych warunków geometrycznych. Dzięki zastosowaniu w warunkach brzegowych pochodnej kierunkowej nie ma potrzeby zastępowania rzeczywistego ograniczenia obszaru linią łamaną. Na możliwość takiego uogólnienia metody wskazał autorom w recenzji artykułu Prof. dr inż. Jan Szargut.

LITERATURA

[1] Staniszewski Bogumił - Wymiana ciepła T.I PWN W-wa 1964.

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Р е з ю м е

Представлен новый способ численного решения проблемы теплопроводности в твёрдых телах, названный методом выбора коэффициентов интерполяционных формул для сечений поверхности $T = T(x,y)$. Показан также пример использования метода для конкретной задачи.

ABOUT CERTAIN CALCULATION METHOD FOR THE STEADY TEMPERATURE FIELD IN SOLID BODIES

S u m m a r y

The paper presents a new way of the numerical solution of a heat conduction problem in solid bodies. Solution method, called by the authors the method of choice of the interpolation formulae coefficients for temperature field sections, is ilustrated by means of the numerical example.