

Eugeniusz TOCZYŁOWSKI  
Politechnika Warszawska

## OPTIMALIZACJA OBROTU WIELOTOWAROWEGO NA POJEDYNCZYM NOŚNIKU<sup>1</sup>

**Streszczenie.** W pracy zaproponowano model obrotu wielotowarowego przy ograniczeniach zasobowych, posiadający wszystkie dobre właściwości modelu klasycznego dotyczącego obrotu pojedynczego towaru w warunkach bez ograniczeń. Model przybiera postać zadania programowania liniowego, w którym można uwzględnić różnorodne warunki opisujące występujące w danym systemie ograniczenia.

## OPTIMISATION OF TURNOVER OF MANY COMMODITIES LINKED BY A LIMITED RESOURCE

**Summary.** A new market model for trading many commodities linked by limited resource constraints is presented. The model is in the LP form and has all positive features of the classical single-commodity market model, yet it allows us to handle more realistic constraints if they are available in the system.

### Wprowadzenie

Projektowanie wieloagentowych rozproszonych systemów sterowania i zarządzania (patrz np. [2]) wymaga stworzenia modeli i narzędzi umożliwiających emulację procesów konkurencji analogicznych do tych, które istnieją w systemach rynkowych. W systemach tych wybór realizowanych zadań oraz efektywne zarządzanie posiadanymi zasobami prowadzi do procesów negocjacji i konkurencji pomiędzy uczestnikami gry rynkowej. Umożliwia to uzyskiwanie rozwiązań satysfakcjonujących poszczególnych uczestników, a zarazem efektywnych z globalnego punktu widzenia i spełniających ograniczenia zasobowe.

Zgodnie z klasyczną teorią obrotu towarowego [3], dobrze rozwinięty, w pełni konkurencyjny i efektywny rynek towarowy powinien być bliski ideału rynku doskonałego i

<sup>1</sup>Praca finansowana w ramach projektu KBN 8T11A00913.

powinien zapewniać warunki obrotu towarowego umożliwiające podążanie do optymalnego stanu równowagi ekonomicznej. Siły podaży i popytu działające na rynku powodują ukształtowanie się punktu równowagi podaży i popytu, czyli równowagi rynkowej, w którym cena rynkowa oraz wielkość obrotu są ustalane w taki sposób, że ilość dobra, którą kupujący chcą kupić po danej cenie lub wyższej, jest równa wielkości, którą sprzedający chcą sprzedać po tej cenie lub taniej. Zatem w punkcie równowagi każda oferta kupna z ceną ofertową wyższą od ceny równowagi musi być zrealizowana, podobnie jak każda oferta sprzedaży z ceną ofertową niższą od ceny równowagi.

W punkcie równowagi są optymalizowane globalne korzyści ekonomiczne (tzw. dobrobyt ekonomiczny), czyli nadwyżka pomiędzy korzyściami z zakupu towaru na rynku przez nabywców a kosztami uwidocznionymi w ofertach sprzedawców. Dobrobyt ten jest zyskiem, który może być alokowany pomiędzy najbardziej efektywnych wytwórców, sprzedających najtaniej, oraz najbardziej efektywnych odbiorców, skłonnych do kupowania najdrożej. W rezultacie transakcje rynkowe umożliwiają optymalną alokację zasobów (towarów) pomiędzy podmioty charakteryzujące się maksymalną efektywnością ekonomiczną. Ponadto odchylenia od punktu równowagi ekonomicznej stwarzają bodźce ekonomiczne, zachęcające do podążania w kierunku stanu równowagi. Cena wyższa od ceny równowagi prowadzi do nadwyżki podaży, natomiast cena niższa od ceny równowagi prowadzi do nadwyżki popytu. Z perspektywy pojedynczego uczestnika ceny kształtowane na rynku wyznaczają jasne i proste zasady selekcji efektywnych ofert - wygrywającym jest zawsze ten, kto oferuje lepszą cenę na dany towar. Warunki obrotu zbliżone do wymagań rynku doskonałego są oferowane na giełdach towarowych.

Niestety, powyżej opisane teoretyczne właściwości klasycznego modelu obrotu rynkowego są osiąmane w warunkach idealnego rynku, w którym nie występują ograniczenia zasobowe. Nie mogą one być zatem wystarczająco silnym narzędziem do wykorzystywania w wieloagentowych systemach zarządzania w sytuacjach, gdy poszczególne podmioty - agenci konkurują pomiędzy sobą o dostęp do wielu ograniczonych zasobów.

W kontekście zastosowań w pewnej klasie wieloagentowych, rozproszonych systemów zarządzania w niniejszej pracy zaproponowano oryginalny model obrotu wielotowarowego wykorzystujący właściwości programowania liniowego [1], w którym przedmiotem obrotu na rynku jest pewien produkt zagregowany, zawierający wiele cech i atrybutów użytko-

wych, będących przedmiotem zainteresowania wielu uczestników gry rynkowej. Produkt ten jest zatem nośnikiem *wielu* wyspecyfikowanych zasobów/towarów składowych, np. charakteryzujących parametry jakościowe nośnika lub zużycie pewnego ograniczonego zasobu. Zaproponowany model jest uogólnieniem klasycznego modelu obrotu i może być wykorzystany przy projektowaniu rozproszonych systemów zarządzania dla pewnych nowych, powstających obecnie klas systemów ograniczonych zasobowo i funkcjonujących w warunkach rynkowych. Przykłady możliwych zastosowań obejmują takie dziedziny, jak zarządzanie ograniczonymi zasobami systemu teleinformatycznego, np. efektywne wykorzystywanie kanału przesyłu informacji o ograniczonej przepustowości dzielonego pomiędzy różnorodne klasy usług (przesyłanie pakietów informacji, rozmowy, video na żądanie, itp.) świadczonych klientom konkurującym pomiędzy sobą o dostęp i jakość usług przesyłowych poprzez różnicowanie ofert zakupu.

W pracy pokazano, że dla zaproponowanego modelu rynku pojedynczego dobra będącego niejednorodnym towarem, czyli nośnikiem wielu innych towarów składowych, rozwiązanie optymalne, maksymalizujące globalny efekt ekonomiczny, jest jednocześnie punktem równowagi rynkowej, w którym ustala się wektor cen równowagi w taki sposób, aby ilość nośnika oraz składowych towarów, którą przy danych cenach wszyscy kupujący chcą kupić, była równa ilości, którą wszyscy sprzedający chcą sprzedać. Zasady wyboru ofert są sprawiedliwe z punktu widzenia indywidualnych uczestników rynku, gdyż każda oferta kupna z ceną ofertową wyższą od sumarycznej ceny rynkowej oferowanych towarów jest realizowana, podobnie jak każda oferta sprzedaży z ceną ofertową niższą od ceny rynkowej.

### Model obrotu wielotowarowego na nośniku

Rozważamy model obrotu wielotowarowego, w którym przedmiotem obrotu jest pojedynczy produkt (dobro), będący *nośnikiem wielu* wyspecyfikowanych zasobów/towarów składowych  $T_i, i = 1, \dots, m$ , będących obiektami konkurencji i charakteryzujących w szczególności parametry jakościowe nośnika, wymagania zasobowe, itp.

Oznaczmy:

$D_j$  - wielkość zakupionego nośnika według  $j$ -tej oferty kupna,

$P_j$  - wielkość sprzedanego nośnika według  $j$ -tej oferty sprzedaży,

$c_j$  - cena ofertowa zakupu wg  $j$ -tej oferty kupna,

$a_{ij}$  - pożądana jednostkowa zawartość  $i$ -tego towaru w jednostce nośnika w  $j$ -tej ofercie zakupu,

$d_j$  - cena ofertowa sprzedaży wg  $j$ -tej oferty zakupu,

$\alpha_{ij}$  - jednostkowa zawartość  $i$ -tego towaru w jednostce nośnika w  $j$ -tej ofercie sprzedaży.

Poniżej sformulujemy podstawowy wariant Problemu ONWT (Obrotu Nośnika Wielu Towarów), czyli zadanie optymalizacji obrotu rynku pojedynczego dobra będącego nośnikiem wielu towarów:

**Problem ONWT**

$$\hat{Q} = \max_{D, P} \left[ Q = \sum_{j \in N} c_j D_j - \sum_{j \in S} d_j P_j \right] \quad (1)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} a_{ij} D_j &\leq \sum_{j \in S} \alpha_{ij} P_j \quad i = 1, \dots, m \\ 0 \leq D_j &\leq D_j^{\max} \quad j \in N \\ 0 \leq P_j &\leq P_j^{\max} \quad j \in S \end{aligned}$$

Aby istniały niezerowe rozwiązania optymalne powyższego zadania, najdroższa oferta kupna nie może być niższa niż najtańsza oferta sprzedaży, czyli  $\max_{j \in N} c_j \geq \min_{j \in S} d_j$ .

Rozwiązanie powyższego zadania prowadzi do przyjęcia najlepszych ofert i odrzucenia pozostałych w taki sposób, że maksymalizowany jest globalny dobrobyt ekonomiczny  $Q$  wynikający z pokrycia najdroższych ofert popytu na poszczególne towary składowe za pomocą najtańszych ofert podaży. Wielkość dobrobytu jest dochodem będącym różnicą pomiędzy przychodem związanym z realizacją najlepszych ofert kupna oraz kosztami realizacji najlepszych ofert sprzedaży, przy założeniu rozliczeń według cen ofertowych.

Analogicznie do klasycznego modelu obrotu towarowego, dla uogólnionego modelu obrotu rynkowego pojedynczego dobra będącego niejednorodnym towarem, czyli nośnikiem wielu innych towarów składowych, jesteśmy zainteresowani tym, aby rozwiązanie optymalne, maksymalizujące globalny efekt ekonomiczny, było jednocześnie punktem równowagi

rynkowej, w którym ustala się wektor cen równowagi w taki sposób, że ilość dobra, będącego nośnikiem składowych towarów, którą kupujący chcą kupić po danej cenie ofertowej lub wyższej, jest równa wielkości, którą sprzedający chcą sprzedać po tej cenie lub taniej. Poniżej pokażemy, że model ONWT rynku nośnika wielu towarów posiada taką właściwość.

Rozwiązanie zadania optymalizacji ONWT umożliwia w szczególności wyznaczenie dla poszczególnych towarów  $T_i, i = 1, \dots, m$  ich cen rynkowych  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_m)^T$  umożliwiających wycenę i porównanie wszystkich ofert kupna i sprzedaży. Ceny te pozwalają na uszeregowanie wszystkich ofert kupna i sprzedaży w następujący sposób.

Dla oferty kupna  $j \in N$  wielkość  $\pi^T a_j$  oznacza jednostkową wartość rynkową towarów zamawianych w ramach oferty (przypadających na jednostkę kupowanego nośnika). Wielkość  $c_j - \pi^T a_j$  oznacza nadwyżkę wartości ceny ofertowej ponad wartość jednostkową kupowanych towarów, czyli jest miarą korzyści ekonomicznych związanych z przyjęciem  $j$ -tej oferty do realizacji. Jeżeli zatem  $c_j > \pi^T a_j$ , to w warunkach rynkowych  $j$ -ta oferta kupna powinna być zrealizowana w całości, natomiast jeżeli  $c_j < \pi^T a_j$ , to oferta nie powinna być realizowana.

Analogicznie, dla oferty sprzedaży  $j \in S$  wielkość  $\pi^T \alpha_j$  oznacza jednostkową wartość rynkową towarów oferowanych w ramach oferty przypadających na jednostkę sprzedawanego nośnika. Wielkość  $\pi^T \alpha_j - d_j$  oznacza jednostkową nadwyżkę wartości rynkowej oferowanych towarów ponad wartość ceny ofertowej, czyli jest miarą korzyści ekonomicznych związanych z przyjęciem  $j$ -tej oferty sprzedaży do realizacji. Jeżeli zatem  $\pi^T \alpha_j > d_j$ , to  $j$ -ta oferta sprzedaży jest realizowana w całości, natomiast jeżeli  $\pi^T \alpha_j < d_j$ , to jest odrzucana.

Reasumując, rozwiązaniem optymalnym zadania ONWT jest wektor wybranych do realizacji ofert kupna  $\hat{D} = (\hat{D}_j)_{j \in N}$ , wektor ofert sprzedaży  $\hat{P} = (\hat{P}_j)_{j \in S}$  oraz wektor cen dualnych  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_m)^T$ , będących rozwiązaniem zadania dualnego, o następujących właściwościach:

- oferty kupna takie, że  $\pi^T a_j < c_j$ , są realizowane w całości, tzn.  $\hat{D}_j = D_j^{\max}$ ,
- oferty kupna takie, że  $\pi^T a_j = c_j$ , są realizowane częściowo, tzn.  $0 \leq \hat{D}_j \leq D_j^{\max}$ ,
- oferty kupna takie, że  $\pi^T a_j > c_j$ , są odrzucane w całości, tzn.  $\hat{D}_j = 0$ ,

- oferty sprzedaży takie, że  $\pi^T \alpha_j > d_j$ , są realizowane w całości, tzn.  $\hat{P}_j = P_j^{\max}$ ,
- oferty kupna takie, że  $\pi^T \alpha_j = d_j$ , są realizowane częściowo, tzn.  $0 \leq \hat{P}_j \leq P_j^{\max}$ ,
- oferty kupna takie, że  $\pi^T \alpha_j < d_j$ , są odrzucane w całości, tzn.  $\hat{P}_j = 0$ .

W szczególnych przypadkach może istnieć wiele rozwiązań optymalnych zadania ONWT spełniających powyższe warunki, gdyż może istnieć pewna niejednoznaczność stopnia realizacji tych ofert, których ceny ofertowe odpowiadają cenom rynkowym. Pamiętając, że podstawowym warunkiem jest wybór wielkości ofertowych umożliwiających osiągnięcie punktu równowagi, w którym jest wymagane spełnienie nierównościowych ograniczeń zadania, w przypadku niejednoznaczności można zastosować dodatkowe kryteria wyboru stopnia realizacji ofert, uwzględniając np. maksymalizację obrotu giełdowego oraz stosując redukcję kupna lub sprzedaży w przypadku występowania nadwyżki po stronie kupna lub sprzedaży.

W zależności od przyjętych mechanizmów aukcyjnych, w tym reguł rozliczania transakcji, przyjmowane do realizacji oferty kupna i sprzedaży mogą być rozliczane na różne sposoby. W szczególności najbardziej są znane dwa podstawowe sposoby rozliczeń:

- według cen ofertowych, czyli cen ( $c_j$ ) dla ofert kupna oraz cen ( $d_j$ ) dla ofert sprzedaży,
- według jednolitych, ustalonych na giełdzie cen  $\pi$  dotyczących wszystkich towarów na nośniku, czyli jednakowych cen obowiązujących na zasadach równości wszystkich uczestników giełdy.

W przypadku rozliczeń według jednolitych cen giełdowych  $j$ -ta oferta kupna jest rozliczana według wartości  $\pi^T a_j$ , a oferta sprzedaży według  $\pi^T \alpha_j$ . Pomiedzy tymi dwoma skrajnymi sposobami rozliczeń można też zdefiniować pośrednie, umożliwiające tylko częściowy podział nadwyżek, np. uogólnioną regułę drugiej ceny, tzn. po uszeregowaniu nierosnąco ofert kupna według wartości nadwyżki  $c_j - \pi^T a_j$  przyjęta oferta z  $k$ -tej pozycji jest rozliczana po cenie ofertowej obniżonej o wartość nadwyżki oferty z pozycji  $k + 1$ .

Zbadamy teraz właściwości wielotowarowego modelu rynku dla dwóch wariantów rozliczeń transakcji: według cen ofertowych oraz według jednolitych cen giełdowych.

Oznaczmy:

$$\lambda_j = \begin{cases} c_j - \pi^T a_j & \text{dla } j \in N, c_j > \pi^T a_j \\ \pi^T \alpha_j - d_j & \text{dla } j \in S, d_j < \pi^T \alpha_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2)$$

**Własność 1.** Jeżeli zadanie ONWT posiada niezerowe rozwiązanie optymalne, to w przypadku rozliczania transakcji według cen ofertowych sumaryczny maksymalizowany globalny wynik ekonomiczny  $Q$  jest równy

$$\hat{Q} = \sum_{j \in N} \lambda_j D_j^{\max} + \sum_{j \in S} \lambda_j P_j^{\max}$$

**Własność 2.** Jeżeli zadanie ONWT posiada niezerowe rozwiązanie optymalne, to sumaryczny maksymalizowany globalny wynik ekonomiczny

$$\hat{Q} = \sum_{j \in N} \lambda_j D_j^{\max} + \sum_{j \in S} \lambda_j P_j^{\max}$$

może być całkowicie podzielony pomiędzy przyjęte do realizacji oferty kupna i sprzedaży, jeżeli rozliczanie transakcji następuje według jednolitych, marginalnych cen giełdowych, czyli:

- cena każdej zrealizowanej transakcji kupna zostanie obniżona z ceny ofertowej  $c_j$  do wartości rynkowej  $\pi^T a_j$ ,
- cena każdej zrealizowanej transakcji sprzedaży zostanie podniesiona z ceny ofertowej  $d_j$  do wartości rynkowej sprzedaży  $\pi^T \alpha_j$ .

### Realizowalność ofert

Gdy przedmiotem obrotu na giełdzie jest pewne dobro, będące niejednorodnym nośnikiem wielu wyspecyfikowanych zasobów/towarów składowych, pochodzących od wielu sprzedających i pobieranych przez wielu nabywców, należy przeanalizować warunki, przy których otrzymany w wyniku rozwiązania zadania ONWT punkt równowagi może być fizycznie realizowalny w tym znaczeniu, że dla każdej przyjętej oferty kupna istnieje dopuszczalna alokacja przyjętych ofert sprzedawców, spełniająca wymagania nabywców oraz możliwości sprzedawców.

W ogólnym przypadku obrotu pewnego niejednorodnego dobra, będącego nośnikiem wielu towarów, można wyróżnić trzy szczególne sytuacje:

- (A) każda z ofert sprzedaży dotyczy jednorodnego, dowolnie podzielnego dobra, będącego homogenicznym nośnikiem towarów składowych *nieseparowalnych*, w takim znaczeniu, że jest możliwy jedynie rozdział wolumenu homogenicznego nośnika, poprzez dostarczanie do różnych nabywców porcji nośnika o tych samych parametrach  $(\alpha_{ij})$ ,
- (B) oferty sprzedaży mogą dotyczyć sprzedaży niejednorodnego dobra, będąc agregatem ofert rodzaju (A),
- (C) każda z ofert dotyczy jednorodnego, dowolnie podzielnego dobra, będącego nośnikiem towarów składowych *separowalnych*, w takim znaczeniu, że jest możliwy dowolny rozdział składowych towarów poprzez dostarczanie do różnych nabywców porcji nośnika o dowolnych, wymaganych przez nabywcę parametrach  $(a_{ij})$ .

W przypadku (A) skojarzenie ofert sprzedaży i ofert kupna może być zrealizowane w wyniku znalezienia rozwiązania dopuszczalnego  $[x_{jk}]$  spełniającego warunki:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N} x_{jk} &= 1 \quad j \in S \\ \sum_{j \in S} (\alpha_j P_j) x_{jk} &= a_k D_k \quad k \in N \\ 0 \leq x_{jk} &\leq 1 \quad j \in S, k \in N \end{aligned}$$

przy czym  $x_{jk}$  jest porcją  $j$ -tej oferty sprzedaży przeznaczoną do realizacji  $k$ -tej oferty kupna. W szczególnych przypadkach rozwiązanie dopuszczalne może nie istnieć (przy występowaniu zbyt dużej dywersyfikacji ofert kupna w porównaniu z dywersyfikacją ofert sprzedaży). W przypadku (B) problem dezagregacji ofert jest bardziej złożony i nie będzie tutaj omawiany. W przypadku (C) problem fizycznej realizowalności ofert jest nieistotny, gdyż parametry ofert są spełniane w sposób bezpośredni, z natury separowalności wyspecyfikowanych towarów.



## Uwagi końcowe

Opracowany model obrotu wielotowarowego widziany z perspektywy konkurujących między sobą indywidualnych uczestników posiada wszystkie dobre właściwości modelu klasycznego dotyczącego obrotu pojedynczego towaru w warunkach bez ograniczeń. Z punktu widzenia wyznaczania punktu równowagi maksymalizującego wielkość dobrobytu społecznego, opracowany model jest bardziej złożony od klasycznego, ale w dalszym ciągu jest stosunkowo łatwy do rozwiązywania, gdyż przybiera on postać typowego zadania programowania liniowego. Ponieważ w modelu tym łatwo wprowadzać różnorodne warunki opisujące występujące w danym systemie ograniczenia, zaproponowany model obrotu wielotowarowego może stanowić atrakcyjny model rynkowy do projektowania wieloagentowych rozproszonych systemów zarządzania umożliwiającymi rozstrzygnięcie konfliktów pomiędzy wieloma uczestnikami konkurującymi między sobą o dostęp do ograniczonych zasobów.

## LITERATURA

1. Dantzig G. B.: *Linear Programming and Extensions*, Princeton, N. J., 1963.
2. Dobrowolski G., Pawlik A., Wylon M.: Agentowo zorientowane systemy alokacji zasobów, *Elektrotechnika*, Tom 14, Zeszyt 3, 1995.
3. Edgeworth F. Y.: *Mathematical Psychics*, London: Kegan-Paul, 1889.

Recenzent: Dr hab. inż. E. Nowicki

## Abstract

Trading many commodities among various individual participants in the presence of the limited resource constraints demands for a new market model which is more general than the classical one. We proposed a market model which is in the LP form and has all positive features of the classical single-commodity market model, yet it allows us to handle more realistic constraints if they are available in the system. The model may be applied for design of the multi-agent distributed management structures in the systems, where conflicts for limited resource allocation among competing individuals under market rules should be decided.