

Zygmunt POPCZYK

Politechnika Wrocławska

OCENA DOKŁADNOŚCI METODY PUNKTÓW OSOBLIWYCH
W ZASTOSOWANIU DO OBLICZANIA OPŁYWU PŁATÓW NOŚNYCH

Streszczenie. W referacie podano podstawowe zależności z zakresu odwzorowania konforemnego opływu okręgu na opływ profili teoretycznych Żukowskiego, Karmana-Trefftza oraz Carafolego. Dokonano porównania wyników obliczeń opływu płatów nośnych metodami: odwzorowania konforemnego oraz punktów osobliwych, na przykładzie współczynnika siły nośnej i rozkładu ciśnienia na konturze wybranych profili.

Zestawienie oznaczeń

- a - promień okręgu,
- c - liczba rzeczywista (odcięta bieguna odwzorowania w płaszczyźnie pomocniczej),
- e - podstawa logarytmu naturalnego,
- g - przyspieszenie ziemskie,
- i - jednostka urojona,
- l_0 - długość cięciwy profilu,
- n - wykładnik potęgowy rzeczywisty,
- p - ciśnienie statyczne,
- v - prędkość zespolona,
- w - potencjał zespolony,
- x_0, y_0 - współrzędne średniej linii profilu,
- y_t - współrzędna grubości profilu,
- $z = x+iy$ - współrzędne punktu na płaszczyźnie zespolonej,
- C_p - współczynnik ciśnienia,
- C_z - współczynnik siły nośnej,
- R - reakcja wypadkowa,
- S - powierzchnia odniesienia,
- V - moduł prędkości,
- X, Y - składowe reakcji wypadkowej,
- α - kąt natarcia,
- δ - kąt ostrza profilu, kąt napływu cieczy,
- ζ - współrzędne punktów okręgu w płaszczyźnie pomocniczej,
- ζ_0 - wektor przesunięcia środka odwzorowywanego okręgu względem początku układu współrzędnych,

- ϱ - gęstość płynu,
 q - stała rzeczywista,
 q_n - stała zespolona,
 Γ - cyrkulacja,
 Θ - kąt bieżący ($\Theta = 0 - 2\pi$),
 Λ - stała zespolona.

Indeksy

- ∞ - przepływ niezakłócony,
 p - na powierzchni profilu,
 $-$ - wartość sprzężona.

1. Wstęp

Metoda punktów osobliwych znajduje coraz szersze zastosowanie w obliczeniach elementów przepływowych pomp wirowych. W zastosowaniu do pomp śmigłowych rozwijany jest [3, 6] ten wariant metody, którego podstawy teoretyczne opracował E. Martensen [2]. Dokładność wyników obliczeń opływu profili tą metodą zależy od liczby punktów obliczeniowych oraz zastosowanej metody numerycznego obliczania całki osobliwej, występującej w równaniu przepływu. Dla potrzeb praktycznego wykorzystania metody punktów osobliwych w projektowaniu pomp śmigłowych został opracowany program komputerowy opisany w [6], który realizuje obliczenia opływu profili i palisad profili płatów nośnych.

Celem niniejszego opracowania jest dokonanie oceny dokładności wyników uzyskiwanych za pomocą tego programu, a szczególnie rozkładów prędkości i ciśnienia na konturze profilu oraz współczynnika siły nośnej.

Dane do oceny uzyskano za pomocą metody odwzorowania konforemnego, która umożliwia wyznaczenie dokładnych (analitycznych) wyników obliczeń opływu tzw. profili teoretycznych. Na podstawie wzorów podanych w [4, 5] wprowadzono zależności na: współrzędne, prędkość i ciśnienie na konturze oraz współczynnik siły nośnej dla charakterystycznych typów profili teoretycznych (Żukowskiego, Karmana-Trefflta oraz Carafolego). Następnie wykonano odpowiedni program na m.o. i zrealizowano obliczenia opływu wymienionych profili, uwzględniając szeroki zakres parametrów geometrycznych profilu oraz kąta natarcia. Odwzorowane profile obliczono powtórnie metodą punktów osobliwych, a wyniki obliczeń opływu wybranych profili uzyskane obu metodami zestawiono na wykresach.

2. Odzworowanie opływu okręgu na opływ profilu za pomocą funkcji Karmana-Treffftza

Funkcja odzworowująca (1) lub po przekształceniu (2), nazywana jest w aerodynamice funkcją Żukowskiego

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \quad (1)$$

$$\frac{z - 2c}{z + 2c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^2 \quad (2)$$

Funkcja ta odzworowuje opływ okręgu w płaszczyźnie pomocniczej ζ na opływ profilu lotniczego w płaszczyźnie przepływu z , a linię prądu będącą okręgiem odzworowuje na sam profil. W wyniku odzworowania okręgu przechodzącego przez punkt $F^*(c, 0)$ (biegun odzworowania) i zawierającego we wnętrzu początek układu za pomocą funkcji (1) otrzymuje się profil Żukowskiego charakteryzujący się zerowym kątem ostrza opływu.

Karman i Trefftz podali funkcję odzworowującą podobną do funkcji Żukowskiego, ale transformującą okrąg przechodzący przez punkt $F^*(c, 0)$ płaszczyzny pomocniczej na profil z ostrzem o dwu stycznych.

$$\frac{z - mc}{z + mc} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^m \quad (3)$$

gdzie:

$$m = \frac{2\pi - \delta}{\pi} \quad (4)$$

W przypadku zerowego kąta ostrza profilu ($\delta = 0$), wzór (3) przyjmuje postać wzoru Żukowskiego (2). Wyprowadzone w dalszej części niniejszego rozdziału zależności dla profilu Karmana-Treffftza będą zatem słuszne również dla profilu Żukowskiego.

2.1. Wyznaczenie współrzędnych profilu

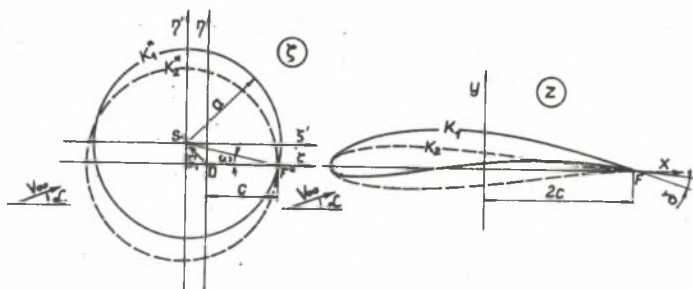
W zależności od położenia okręgu w płaszczyźnie pomocniczej otrzymuje się różne kształty odzworowywanego profilu w płaszczyźnie przepływu (rys. 1).

Równanie odzworowywanego okręgu ma następującą postać

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta' \quad (5)$$

przy czym

$$\zeta' = ae^{i\theta} = a(\cos\theta + i \sin\theta) \quad (6)$$



Rys. 1. Odzworowanie okręgu na profil z ostrą krawędzią spływową

Przesunięcie ζ_0 dobiera się tak, aby okrąg po przesunięciu przechodził przez punkt $F^*(c, 0)$ płaszczyzny ζ .

$$\zeta_0 = -(a \cos \theta - c) + i a \sin \theta \quad (7)$$

Ostatecznie równanie odzworowywanego okręgu przyjmie postać

$$\zeta = a(\cos \Theta - \cos \theta) + c + i a(\sin \Theta + \sin \theta) \quad (8)$$

Podstawiając współrzędne okręgu do wzoru (3), otrzymuje się współrzędne profilu w postaci zespolonej

$$z = mc \frac{(\zeta + c)^m + (\zeta - c)^m}{(\zeta + c)^m - (\zeta - c)^m} \quad (9)$$

Współrzędne profilu wyznacza się odpowiednio jako część rzeczywistą i część urojoną liczby z .

$$x = \operatorname{Re} z \quad (10)$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

2.2. Wyznaczenie prędkości i ciśnienia na konturze profilu

Prędkość zespolona na profilu jest pochodną potencjału zespolonego $w(z)$ w płaszczyźnie przepływu z

$$v_p = \frac{dw(z)}{dz} \quad (11)$$

Aby ją obliczyć należy odwzorować prędkość zespoloną $dW(\zeta')/d\zeta'$ na płaszczyznę opływu okręgu, którego środek nie jest w początku układu współrzędnych $dW(\zeta)/d\zeta$, a następnie na profil $dw(z)/dz$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{dW(\zeta')}{d\zeta'} \frac{d\zeta'}{dz} = \frac{dW(\zeta')}{d\zeta'} \frac{d\zeta'}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1} \quad (12)$$

Prędkość zespoloną $dW(\zeta')/d\zeta'$ wyznacza się na podstawie potencjału zespolonego na okręgu, którego środek znajduje się w początku układu współrzędnych, natomiast pochodne $dz/d\zeta$ i $d\zeta'/d\zeta$ na podstawie zależności (3) i (5).

$$\frac{dW(\zeta')}{d\zeta'} = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta'} - \frac{v_\infty a^2}{(\zeta')^2} \quad (13)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 2 m^2 c \frac{(\zeta + c)^m (\zeta - c)^{m-1} - (\zeta + o)^{m-1} (\zeta - o)^m}{[(\zeta + c)^m - (\zeta - c)^m]^2} \quad (14)$$

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = 1 \quad (15)$$

Cyrkulację Γ wyznacza się z warunku splotu w ostrzu profilu, zakładając zerową prędkość na krawędzi splotu

$$\Gamma = -4\pi a v_\infty \sin(\alpha + \varepsilon) \quad (16)$$

Prędkość na profilu podaje się najczęściej w postaci względnej jako stosunek modułów prędkości na profilu i prędkości przepływu w nieskończoności.

Ostatecznie wzór na prędkość można przedstawić następująco

$$\frac{v_p}{v_\infty} = \left[\frac{e^{i(\Theta - \alpha)} - e^{i(\alpha - \Theta)} + i 2 \sin(\alpha + \varepsilon)}{\frac{dz}{d\zeta}} \right] \quad (17)$$

Ciśnienie statyczne na profilu w danym punkcie oblicza się z równania Bernoulliego i przedstawia się zazwyczaj w postaci bezwymiarowego współczynnika ciśnienia

$$C_p = \frac{p_p - p_\infty}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v_p}{v_\infty}\right)^2 \quad (18)$$

2.3. Wyznaczenie współczynnika siły nośnej

Współczynnik siły nośnej profilu wyznacza się, porównując wyrażenia na moduły reakcji wypadkowej R i siły nośnej Z .

Reakcja wywierana przez ciecz doskonałą na profil izolowany w ruchu ustalonym, zgodnie z tzw. prawem Kuty-Żukowskiego jest proporcjonalna do sumy cyrkulacji wszystkich wirów, objętych konturem profilu, do gęstości cieczy i do modułu prędkości przepływu w nieskończoności, co można zapisać następująco:

$$\bar{R} = X - i Y = i \zeta \bar{v}_{\infty} \Gamma \quad (19)$$

Podstawiając do tego wyrażenia wartość cyrkulacji zgodną z warunkiem spięwu w ostrzu profilu, a następnie obliczając moduł reakcji, otrzymuje się:

$$|\bar{R}| = |R| = 4\pi \rho a v_{\infty}^2 \sin(\alpha + \varepsilon) \quad (20)$$

Moduł siły nośnej w aerodynamice wyraża się wzorem

$$|Z| = C_z \rho \frac{v_{\infty}^2}{2} S \quad (21)$$

gdzie:

$S = l_c \cdot 1$ - powierzchnia odniesienia.

Współczynnik siły nośnej profilu wynosi zatem

$$C_z = \frac{8\pi a \sin(\alpha + \varepsilon)}{l_c} \quad (22)$$

3. Odwzorowanie opływu okręgu na opływ profilu za pomocą funkcji Carafolego

Carafoli [1] podał funkcję odwzorowującą o kształcie

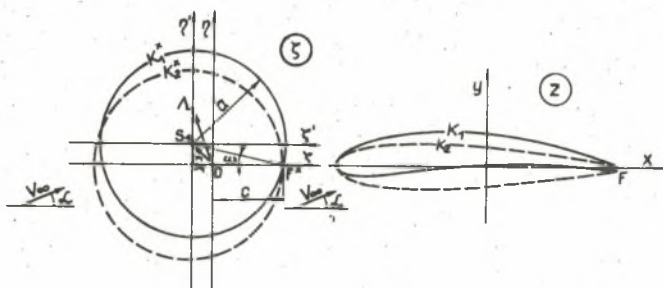
$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{(\zeta - \lambda)^n} \quad (23)$$

Funkcja ta odwzorowuje opływ okręgu w płaszczyźnie pomocniczej ζ na opływ profilu lotniczego w płaszczyźnie przepływu z , a linię prądu będącą okręgiem na profil charakteryzujący się zaokrągloną krawędzią spływu.

Stałe q , q_n i n w równaniu (23) wiążą się z geometrycznymi parametrami profilu, co sprawia, że kształt oraz geometryczne parametry profilu

Carafolego mogą być bardzo różnorodne, w zależności od wartości tych stałych oraz współrzędnych odwzorowywanego okręgu. Z uwagi na postać danych geometrycznych profilu w metodzie punktów osobliwych najkorzystniejszy okazał się taki przypadek odwzorowania, kiedy punkty konturu o największej krzywiznie odwzorowanego profilu znajdują się na osi odciętych w płaszczyźnie przepływu z .

Profile Carafolego o takim kształcie uzyskano dla identycznego, jak w przypadku profilu Karmana-Trefftza usytuowania okręgu w płaszczyźnie pomocniczej i następujących założeń: $\Lambda = 0 + i 0$; $q_n = q + i 0$, gdzie $0 < q < c$ (rys. 2).



Rys. 2. Odwzorowanie okręgu na profil z zaokrągloną krawędzią spływową

Przy takich ustaleniach rozważania oraz zależności dotyczące profilu Karmana-Trefftza są słuszne również dla profilu Carafolego, z tym że zmienne zespolone z i $dz/d\zeta$ są wówczas określone odpowiednio przez funkcję Carafolego i jej pochodną.

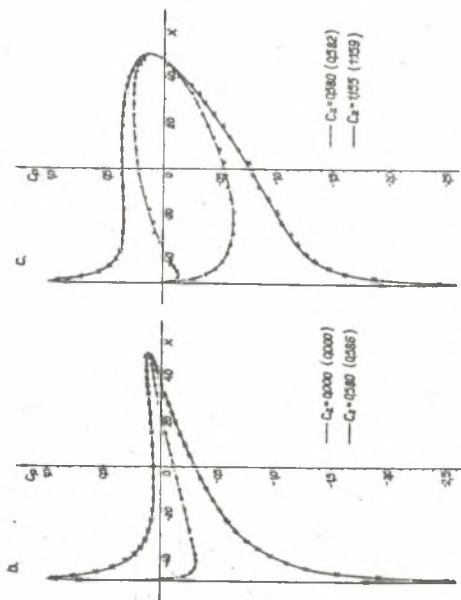
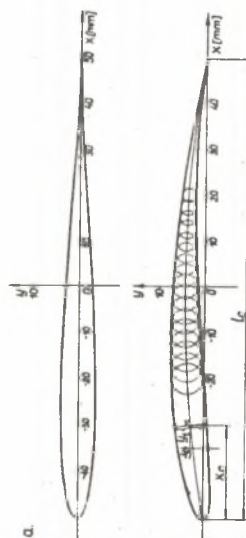
4. Program badań

Program obejmował badanie opływu profili Żukowskiego, Karmana-Trefftza oraz Carafolego dla następujących danych:

- Profil Żukowskiego

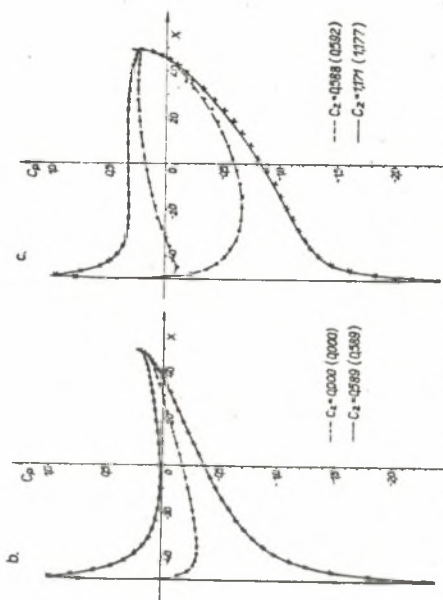
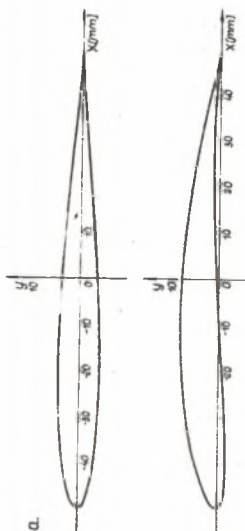
a [mm]	o [mm]	ξ [°]	α [°]	δ [°]
26,55	25	0	0	0
28,32		5	5	

- Profil Karmana-Trefftza - dane jak wyżej, lecz $\delta = 5^\circ$.



Rys. 3. Zestawienie wyników obliczeń profilu Żukowski

a) kształt odwzorowanych profili, b) porównanie wyników obliczeń profilu symetrycznego, c) porównanie wyników obliczeń profilu wygiętego



Rys. 4. Zestawienie wyników obliczeń profilu Karmana-Trefflta

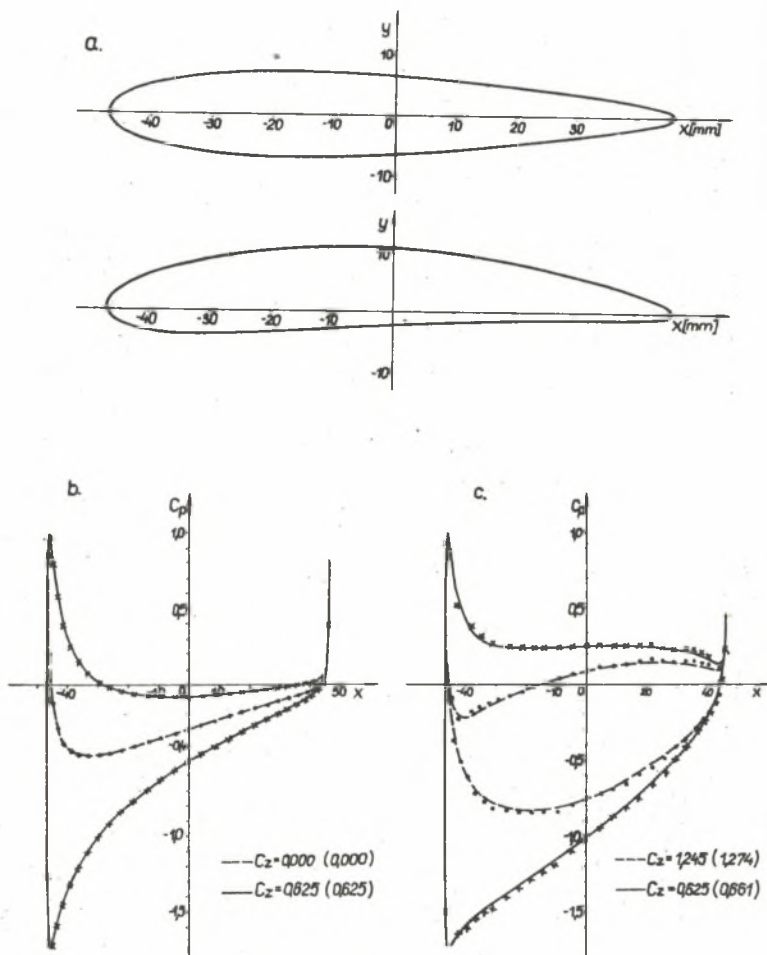
a) kształt odwzorowanych profili, b) porównanie wyników obliczeń profilu symetrycznego, c) porównanie wyników obliczeń profilu wygiętego

- Profil Carafolego

a [mm]	c [mm]	q	ξ [°]	α [°]
26,55	25	23	0	0
28,32			5	5

Ponadto program przewidywał badanie wpływu liczby punktów obliczeniowych na dokładność wyników obliczeń profili metodą punktów osobliwych.

Ze względu na ograniczoną objętość referatu przedstawiono tylko niektóre wyniki.



Rys. 5. Zestawienie wyników obliczeń profilu Carafolego

a) kształt odwzorowanych profili, b) porównanie wyników obliczeń profilu symetrycznego, c) porównanie wyników obliczeń profilu wygiętego

5. Omówienie wyników i wnioski

Wyniki obliczeń zestawiono na rys. 3, 4 i 5. Na rys. 3 przedstawiono wyniki obliczeń profilu Żukowskiego, na rys. 4 - profilu Karmana-Trefftza, na rys. 5 - profilu Carafolego. Każdy rysunek składa się z trzech charakterystycznych części a, b i c, przedstawiających odpowiednio:

- a) odwzorowane profile: symetryczny ($\xi = 0^\circ$) i wygięty ($\xi = 5^\circ$),
- b) porównanie rozkładów ciśnienia na konturze profilu symetrycznego oraz współczynników siły nośnej otrzymanych obu metodami, przy kątach natarcia $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 5^\circ$,
- c) jak b - dla profilu wygiętego.

Na podstawie wyników przeprowadzonych obliczeń opływu profili teoretycznych Żukowskiego, Karmana-Trefftza oraz Carafolego metodą odwzorowania konforemnego a następnie metodą punktów osobliwych stwierdzono:

- dużą zgodność wyników obu metod w zastosowaniu do obliczenia opływu profili symetrycznych bez względu na kształt krawędzi spływowej (wykresy rozkładu współczynnika ciśnienia pokrywają się, a względna różnica współczynników siły nośnej nie przekracza 1%),
- nieco mniejszą zgodność wyników obliczeń opływu profili wygiętych (niektóre wartości współczynnika ciśnienia obliczone metodą dokładnych punktów osobliwych nie leżą na krzywej rozkładu dokładnych wartości tego współczynnika, a względna różnica współczynników siły nośnej przekracza na ogół 1%),
- niewielki wpływ ilości punktów obliczeniowych na dokładność wyników obliczeń profili metodą punktów osobliwych.

Mniejszą dokładność wyników obliczeń opływu profili wygiętych tłumaczy fakt, że współrzędne tych profili x_c , y_c , y_t wyznaczano graficznie (rys. 3a).

LITERATURA

- [1] Carafoli E.: Tragflügeltheorie, Veb Verlag Technik, Berlin 1954.
- [2] Martensen E.: Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholm'schen Integralgleichungen Zweiter Art. Arch. Rat. Mech. Anal. 3/1959.
- [3] Popczyk Z., Rohatyński E.: Zastosowanie metody punktów osobliwych w projektowaniu pomp śmigłowych. Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, nr 34 Konferencja 5, Wrocław 1977.
- [4] Prosnak W.J.: Wykłady aerodynamiki, Zeszyt 2, Warszawa 1962.
- [5] Prosnak W.J.: Mechanika płynów, PWN, Warszawa 1970.
- [6] Rohatyński R.: Application of the Martensen method for the analysis of thick aerofoils in cascade. Proceedings off the Fifth Conference on Fluid Machinery, vol. 2, Budapest 1975.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ОСОБЫХ ТОЧЕК,
ПРИМЕНЁННОГО К РАСЧЁТУ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлены основные зависимости конформных отображений обтекания круга на обтекание теоретических профилей Жуковского, Кармана-Треффца, а также Карафоли. Сравнены результаты расчёта обтекания профилей, полученные методами конформных отображений и особых точек на примере коэффициента подъёмной силы и распределения давления на контуре избранных профилей.

EXACTNESS ASSERTION OF THE SINGULAR POINT METHOD IN APPLICATION
TO CALCULATIONS OF FLOW ABOUT AEROFOILS

S u m m a r y

The paper presents essential relations of conformal transformations of flow about a circle into the flow about of Žukowsky's, Karman-Treffitz and Carafoli's aerofoils. Results of conformal transformations have been compared with those obtained by the singularity method.

The comparison has been given between lift coefficients and pressure distributions on surfaces of several chosen aerofoil types.