

Janusz SKOREK

Instytut Techniki Ciepłej

ROŻNICOWY MODEL POLA TEMPERATURY W PROCESIE
CIĄGŁEGO ODLEWANIA WLEWKÓW PŁASKICH

Streszczenie. Przedstawiono różnicowy model matematyczny pola temperatury we wlewkach płaskich w procesie ciągłego odlewania metali. Równania różnicowe wyprowadzono w oparciu o metodę elementarnego bilansu energii. Rozpatrzono trójwymiarowe pole temperatury wlewka. Uwzględniono złożony przebieg wymiany ciepła pomiędzy wlewkiem i krystalizatorem.

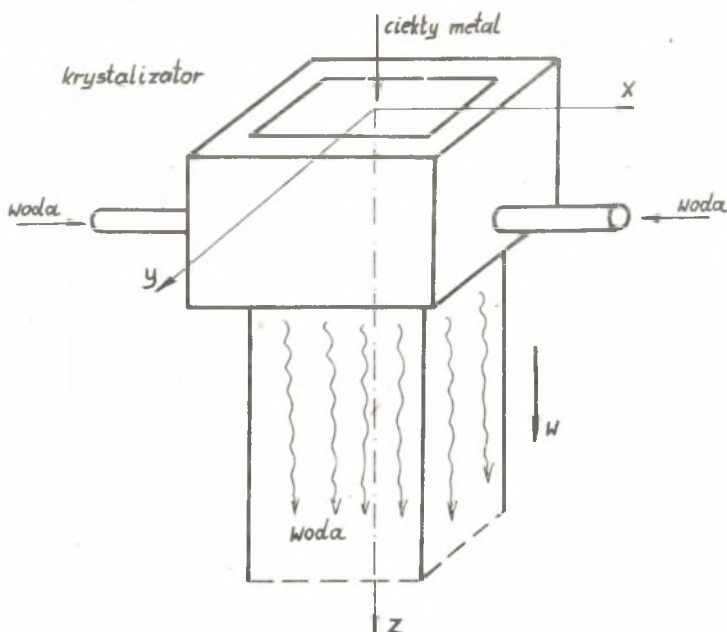
1. Wstęp

Model matematyczny pola temperatury wlewka i krystalizatora w procesie ciągłego odlewania powinien uwzględniać trójwymiarową geometrię układu, występowania dwóch faz we wlewkach oraz zróżnicowane (nieliniowe i niejednorodne) warunki brzegowe. Przedstawiony model matematyczny opracowano w oparciu o metodę różnicową. Do wyprowadzenia równań różnicowych zastosowano metodę elementarnego bilansu energii [3].

2. Charakterystyka procesu

Schemat urządzenia do ciągłego odlewania wlewków płaskich przedstawiono na rys.1. Proces krzepnięcia rozpoczyna się w krystalizatorze. Ścianki krystalizatora są chłodzone wodą. Na skutek skurczu termicznego metalu, pomiędzy powierzchnią wlewka a ścianką krystalizatora powstaje szczelina gazowa, która zmniejsza wydatnie intensywność przepływu ciepła od wlewka do krystalizatora.

Z krystalizatora woda wypływa wprost na powierzchnię wlewka i powoduje ostateczne chłodzenie metalu do temperatury otoczenia. Ruch wlewka ze stałą prędkością zapewnia urządzenie ciągnące.



Rys. 1. Schemat urządzenia do ciągłego odlewania wlewków płaskich

3. Założenia modelu różnicowego

Do rozważań przyjęto wlewek płaski (prostokątny). Z uwagi na to, że warunki brzegowe na przeciwległych powierzchniach bocznych wlewka są jednakowe, analizie wystarczy poddać ćwiartkę wlewka. Płaszczyzny $x = 0$ oraz $y = 0$ są więc płaszczyznami adiabatycznymi.

Ponadto przyjęto następujące założenia:

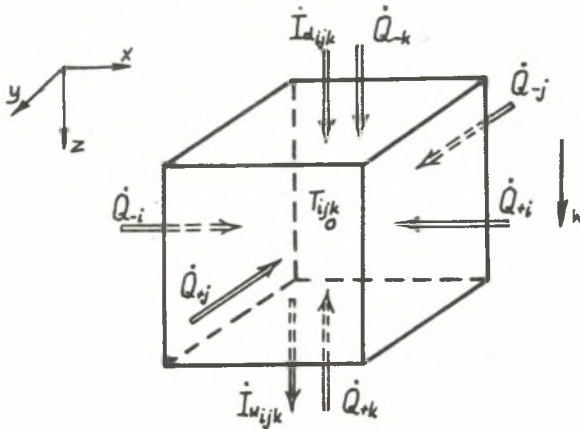
1. W układzie współrzędnych nieruchomym względem krystalizatora proces wymiany ciepła jest ustalony.
2. Proces krzepnięcia przebiega przy jednej wartości temperatury.
3. Pomija się wpływ ruchu ciekłego metalu w nieskrzepniętej części wlewka.
4. Ciepło jest przekazywane w szczelinie pomiędzy wlewkiem i krystalizatorem przez przewodzenie i promieniowanie.
5. Parametry termofizyczne metalu zależą od temperatury.

Elementom różnicowym przyporządkowano indeksy i, j, k wynikające z pozycji odpowiednio w kierunku osi x, y, z układu współrzędnych.

4. Równania różnicowe pola temperatury we wlewk

Metoda elementarnego bilansu energii polega na sporządzeniu bilansu energii dla przyjętego elementu różnicowego. Zakłada się, że pojemność cieplna elementu różnicowego jest skupiona w jego punkcie centralnym (tzw. węzle), opory cieplne zaś są skupione na odcinkach łączących węzły.

Równanie bilansu energii dla elementu ijk wynika ze schematu na rysunku 2.



Rys. 2. Bilans energii dla poruszającego się elementu różnicowego

$$\dot{Q}_{+i} + \dot{Q}_{-i} + \dot{Q}_{+j} + \dot{Q}_{-j} + \dot{Q}_{+k} + \dot{Q}_{-k} + \dot{I}_{d,ijk} - \dot{I}_{w,ijk} + \dot{B}_{ijk} = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- \dot{Q} - strumień ciepła dopływający do elementu różnicowego przez jego powierzchnię boczną,
- \dot{I}_d, \dot{I}_w - strumień entalpii dopływającej do elementu i wypływającej z elementu ze strumieniem substancji,
- \dot{B}_{ijk} - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła.

Strumienie ciepła wynikają ze wzoru

$$\dot{Q} = \frac{T_{ijk}^s - T_{ijk}}{R} \quad (2)$$

gdzie:

- T_{ijk}^s - temperatura w węzle sąsiadującym z węzłem ijk ,
- R - opór przewodzenia ciepła pomiędzy rozpatrywanymi węzłami.

Strumienie entalpii oblicza się z następujących wzorów:

$$\dot{I}_d \text{ }_{ijk} = \dot{W}_{ijk} \left[(1-p) T_{i,j,k-1} + p T_{ijk} \right], \quad (3)$$

$$\dot{I}_w \text{ }_{ijk} = \dot{W}_{ijk} \left[(1-p) T_{ijk} + p T_{i,j,k+1} \right], \quad (4)$$

gdzie:

\dot{W}_{ijk} - pojemność cieplna metalu przemieszczającego się przez rozpatrywany element różnicowy,

p - parametr metody różnicowej ($p \in [0;1]$).

Dla elementu ijk , który wraz z elementami sąsiednimi znajduje się w obszarze jednofazowym równanie różnicowe ma postać:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_{-1}} T_{i-1,j,k} + \frac{1}{R_{+1}} T_{i+1,j,k} + \frac{1}{R_{-j}} T_{i,j-1,k} + \frac{1}{R_{+j}} T_{i,j+1,k} + \\ & + \left[\frac{1}{R_{-k}} + (1-p) \dot{W}_{ijk} \right] T_{i,j,k-1} + \left(\frac{1}{R_{+k}} - p \dot{W}_{ijk} \right) T_{i,j,k+1} = \\ & = \left[\frac{1}{R_{-1}} + \frac{1}{R_{+1}} + \frac{1}{R_{-j}} + \frac{1}{R_{+j}} + \frac{1}{R_{-k}} + \frac{1}{R_{+k}} + (1-2p) \dot{W}_{ijk} \right] T_{ijk} \end{aligned} \quad (5)$$

Równanie (5) jest poprawne pod względem fizycznym tylko wtedy, gdy współczynniki przy temperaturach są nieujemne [3]. Prowadzi to do ograniczenia rozmiaru Δ z elementu różnicowego.

$$\Delta z < \frac{a}{wp}, \quad (6)$$

gdzie:

a - współczynnik wyrównywania temperatury,

w - prędkość odlewania.

Zastosowanie zależności (3) i (4) pozwala dowolnie zmieniać graniczną wartość Δ z poprzez zmianę wartości parametru p . W wielu przypadkach uніка się stosowania zbyt gęstego podziału różnicowego, a co za tym idzie można wyraźnie skrócić czas obliczeń na e.m.c.

Nieciągłość pola strumieni ciepła wymaga odmiennego sposobu bilansowania elementów różnicowych przez które przechodzi powierzchnia rozdziału faz. Strumienie ciepła oblicza się za pomocą różnicy temperatury i oporów cieplnych pomiędzy węzłem elementu, a powierzchnią rozdziału faz. Strumień

entalpii wynika ze średniej ważonej temperatury węzła elementu i temperatury T_1 powierzchni rozdziału faz. Waga jest parametr p .

5. Wyznaczenie położenia granicy faz i określenie wydajności wewnętrznych źródeł ciepła

Powierzchnię rozdziału faz określa się dyskretnym układem punktów L_{ij} . Punkty te wyznacza się na prostych łączących węzły w każdej z kolumn elementów różnicowych (kolumnę elementów różnicowych tworzy zbiór elementów, których wskaźniki $i = \text{idem}$ oraz $j = \text{idem}$).

Jeżeli w danej kolumnie elementów różnicowych temperatury dwóch sąsiadujących elementów spełniają warunek

$$T_{ijk} \geq T_1 \quad \text{oraz} \quad T_{i,j,k+1} < T_1 \quad (7)$$

to punkty L_{ij} leżą na prostej łączącej te dwa węzły.

Współrzedną punktu L_{ij} wyznacza się z warunku brzegowego na granicy faz.

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - r Q \bar{w} \cdot \bar{n}, \quad (8)$$

gdzie:

\bar{n} - wektor jednostkowy prostej normalnej do powierzchni rozdziału faz,

\bar{w} - wektor prędkości przemieszczania się wlewka,

r - entalpia krzepnięcia,

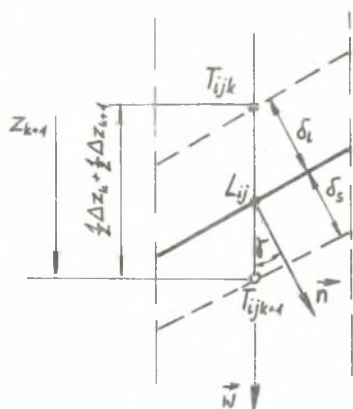
Q - gęstość skrzepniętego metalu.

Jeżeli założyć, że powierzchnię rozdziału faz w obrębie kolumny elementów różnicowych aproksymuje się płaszczyzną, to współrzedną z_{ij} punktu L_{ij} wyznacza się z następujących równań

$$\Delta F_{ij} \lambda_1 \frac{T_{ijk} - T_1}{\delta_1} + \dot{G}_{ijk} r = \Delta F_{ij} \lambda_s \frac{T_1 - T_{i,j,k+1}}{\delta_s} \quad (9)$$

$$\delta_1 + \delta_s = \frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2} \cos \vartheta \quad (10)$$

$$z_{ij} = z_{k+1} - \frac{\delta_s}{\cos \vartheta}, \quad (11)$$



Rys. 3. Określenie współrzędnych punktów powierzchni rozdziału faz

gdzie:

ΔF_{ij} - pole wycinka powierzchni rozdziału faz w danej kolumnie elementów różnicowych,

γ - kąt pomiędzy wektorem normalnym do płaszczyzny rozdziału faz \vec{n} , a wektorem \vec{w} .

Pozostałe wielkości występujące w równaniach (9)-(11) przedstawiono na rys. 3. Kąt γ wynika ze wzoru:

$$\gamma = \arccos \frac{\cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta}}{\sin^2 \bar{\alpha} \cos^2 \bar{\beta} + \cos^2 \bar{\alpha} \sin^2 \bar{\beta} + \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta}} \quad (12)$$

gdzie:

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - średnie kąty nachylenia prostych będących przecięciem płaszczyzny rozdziału faz z płaszczyznami przechodzącymi przez oś kolumny elementów różnicowych i spełniającymi warunek $x = \text{idem}$, $y = \text{idem}$.

W elementach różnicowych, przez które przechodzi powierzchnia rozdziału faz występują źródła ciepła związane z wydzielaniem entalpii przemiany fazowej. Wydajność źródła ciepła działającego w elemencie ijk określa wzór (13).

Ze względu na to, że strumienie entalpii oblicza się jako iloczyn ciepła właściwego i temperatury bezwzględnej w równaniu (1) powinien wystąpić dodatkowy składnik uwzględniający zmianę ciepła właściwego metalu przy zmianie fazy. Składnik ten włączono do wzoru na wydajność wewnętrznych źródeł ciepła.

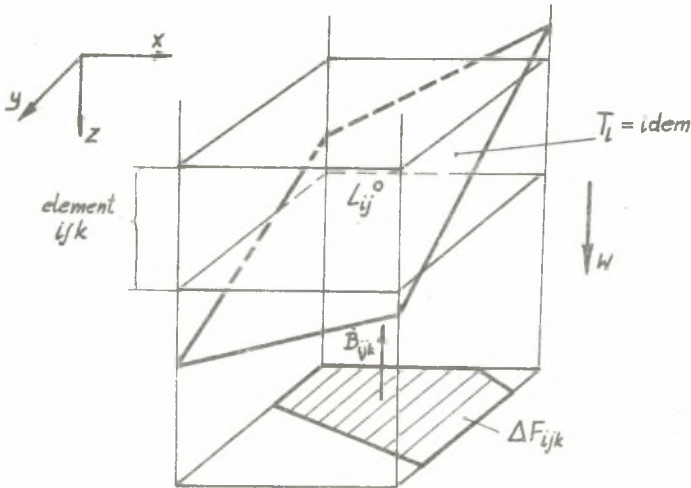
$$\dot{B}_{ijk} = \Delta F_{ijk} Q_w [r + (c_s - c_l) T_1], \quad (13)$$

gdzie:

ΔF_{ijk} - rzut wycinka powierzchni rozdziału faz zawartego wewnątrz rozpatrywanego elementu na płaszczyznę $z = \text{idem}$,

c_s, c_l - ciepło właściwe w fazie stałej i ciekłej.

W każdej kolumnie elementów różnicowych należy wyznaczyć analityczne równanie płaszczyzny rozdziału faz. Linie przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyznami ograniczającymi rozpatrywany element różnicowy jednoznacznie określają wartość ΔF_{ijk} (rys. 4).



Rys. 4. Określenie wydajności wewnętrznych źródeł ciepła

6. Warunki brzegowe

Na górnej powierzchni wlewka przyjmuje się warunek brzegowy pierwszego rodzaju. Temperatura ciekłego metalu wynika z pomiarów. Na dolnej powierzchni wlewka przyjmuje się również warunek brzegowy pierwszego rodzaju. Na bocznej powierzchni wlewka poniżej krystalizatora oraz na zewnętrznej ścianie krystalizatora przyjmuje się warunek brzegowy trzeciego rodzaju. Przekazywanie ciepła charakteryzują liczby Biota Bi_p i Bi_w . W szczelinie pomiędzy wlewkiem i krystalizatorem przekazywanie ciepła odbywa się przez promieniowanie i przewodzenie.

Układ równań różnicowych dla wszystkich elementów różnicowych wlewka i krystalizatora zawiera niewiadome temperatury w węzłach elementów. Do rozwiązania tego układu równań zastosowano metodę iteracyjną Gaussa-Seidela [1]. Po każdej iteracji koryguje się kształt powierzchni rozdziału faz.

LITERATURA

- [1] Demidowicz B.P., Maron I.A.: Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1965.
- [2] Skorek J.: Model matematyczny pola temperatury w procesie ciągłego odlewania miedzi. Praca doktorska. Gliwice 1976.
- [3] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Śląsk, Katowice 1977.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРОЦЕССЕ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКИ ПЛОСКИХ СЛИТКОВ

Р е з ю м е

В работе представлена разностная модель температурного поля в плоских слитках в процессе непрерывной разливки металлов.

Разностные уравнения выведены методом элементарных балансов энергии. Рассмотрено трёхразмерное температурное поле слитка и сложный теплообмен между слитком и кристаллизатором.

A FINITE DIFFERENCE MODEL OF THE TEMPERATURE FIELD IN THE PROCESS OF SLAB INGOTS CONTINUOUS CASTING

S u m m a r y

A finite difference mathematical model of the temperature field in slab ingots in continuous casting of metals is presented. The difference equations are derived by means of the elementary energy balances method. A three - dimensional temperature field in an ingot is considered. The model takes into account a complex heat transfer between the ingot and the crystallizer.