ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 132 Nr kol 1477

Ewa ŁOBOS

O ZADANIU OPTYMALIZACJI DLA SYSTEMÓW SZEREGOWO-RÓWNOLEGŁYCH

Streszczenie. Tematem pracy jest zadanie minimalizacji wariancji czasu pracy układu szeregowo-równoległego przy ograniczeniach na średni czas jego pracy i funkcję kosztu. Rozważone zostały dwa przypadki, gdy intensywność awarii elementów jest stała oraz gdy jest ona losowa. W obu przypadkach do obliczeń numerycznych zastosowano dokładne wzory na momenty czasu pracy układu. Wyniki porównano z rozwiązaniami przybliżonymi (metoda opisana w [3], [4]), które okazują się rozwiązaniami suboptymalnymi.

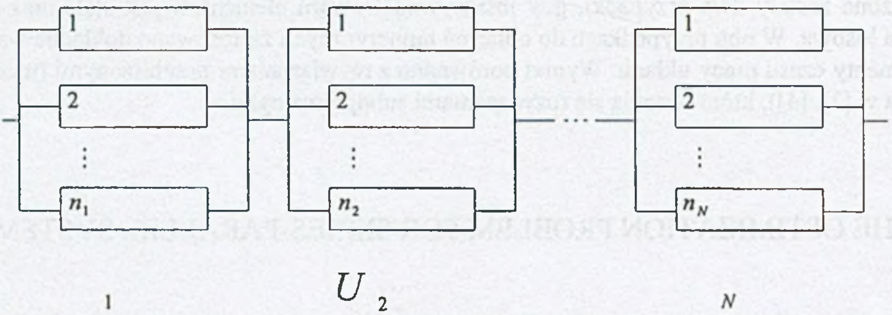
ON THE OPTIMIZATION PROBLEM FOR SERIES-PARALLEL SYSTEMS

Summary. This paper presents the solution of minimizing the variance on series-parallel system lifetime within expected life and economic constraints. Two cases are considered - where constituent units have constant failure rates and where failure rates are random variables. In numerical examples exact expressions for the first and second moment of system lifetime are employed. The solutions are compared with solutions given in [3], which were obtained using simplifying method and they appear suboptimal ones.

1. Wprowadzenie

W praktyce często spotykanym problemem jest takie dobranie pewnych parametrów układu, aby uzyskać ustalony średni czas jego pracy. Ważne jest jednoczesne zminimalizowanie wariancji - im mniejsza wariancja, tym lepszym oszacowaniem rzeczywistego czasu pracy jest pierwszy moment. Zadanie to jest trudne ze względu na skomplikowaną postać wzorów na momenty czasu pracy, dlatego (np. w [3], [4]) stosuje się metody przybliżone. Celem tej pracy jest rozwiązanie dokładne zadania optymalizacji dla najprostszych systemów - takich, które składają się z szeregowo połączonych bloków. Ważną informację niesie porównanie tego rozwiązania z rozwiązaniami otrzymanymi przy zastosowaniu metod przybliżonych. Jeżeli rozwiązanie optymalne będzie porównywalne z rozwiązaniem suboptymalnym, to w praktyce warto stosować metody przybliżone, które z reguły charakteryzują się mniejszą złożonością obliczeniową.

Wyprowadzone zostaną dokładne wzory na pierwsze dwa momenty czasu pracy takich układów w dwóch przypadkach, a mianowicie: gdy elementy, z których zbudowane są bloki, mają stałą intensywność awarii oraz gdy jest ona losowa. Następnie porównane zostaną rozwiązania oparte na tych wzorach ze znanymi rozwiązaniami, w których aproksymuje się momenty czasu pracy całego układu przez odpowiednie momenty czasu pracy poszczególnych bloków.



Rys.1. Układ szeregowo-równoległy
Fig.1. A series-parallel system

1.1. Opis systemu

Rozważmy układ U złożony z bloków $U_1, U_2, \dots, U_N$ połączonych szeregowo, przy czym każdy blok U_i jest zbudowany z n_i elementów połączonych równolegle ($i = 1, 2, \dots, N$). Układ ten jest przedstawiony na rys.1. Dodatkowo załóżmy, że wszystkie elementy pracują niezależnie od siebie i mają wykładniczy rozkład czasu pracy. Niech zmienne losowe T_i oznaczają czas pracy bloku U_i, a zmienna T - czas pracy układu U. Wówczas $T = \min_i T_i$ i niezawodność układu U wyraża się wzorem

$$R(t) = \Pr\{T \geq t\} = \prod_{i=1}^{N} R_i(t), \qquad (1)$$

gdzie $R_i(t)$ jest niezawodnością bloku U_i. Jeżeli przez T_{ij} oznaczymy czas pracy j-tego elementu z bloku U_i, to $T_i = \max_j T_{ij}$ i niezawodność bloku U_i wynosi

$$R_i(t) = 1 - \Pr\{T < t\} = 1 - \prod_{j=1}^{n_i}(1 - R_{ij}(t)). \qquad (2)$$

Ponieważ zmienna losowa T jest nieujemna, jej momenty można liczyć ze wzorów:

$$E\{T\} = \int_0^\infty R(t)\, dt,$$
$$E\{T^2\} = \int_0^\infty 2tR(t)\, dt. \qquad (3)$$

Wprowadźmy teraz funkcję kosztu elementu jako $C_i(\theta_i) = \dfrac{A_i}{B_i - \theta_i}$, gdzie θ_i oznacza średni czas pracy pojedynczych elementów z bloku U_i. Całkowity koszt układu jest sumą kosztów wszystkich elementów, czyli $C_{calk} = \sum_{i=1}^{N} n_i C_i(\theta_i)$. Widać, że koszt jest tym większy, im więcej jest elementów i im większy jest średni czas ich pracy.

1.2. Sformułowanie problemu

Podstawowe zadanie optymalizacji jest sformułowane następująco:

Zadanie A

1A) Zminimalizować wariancję czasu pracy układu U: $V = Var\{T\} \to \min$

przy ograniczeniach,

2A) na wartość oczekiwaną czasu pracy układu : $E\{T\} \geq E_0$

oraz

3A) na koszt : $C_{calk} \leq C_0$.

Jest to zadanie mieszanego programowania nieliniowego, w którym mamy dwa rodzaje zmiennych decyzyjnych: n_i i θ_i (i=1,2, ... ,N), przy czym zmienne n_i są całkowite, a zmienne θ_i są rzeczywiste. Dodatkową trudność powoduje fakt, że (jak się dalej okaże) zmienne n_i są górnymi granicami sumowania występującymi zarówno w funkcji celu $Var\{T\}$, jak i w ograniczeniu $E\{T\}$. Dlatego autorzy pracy [3] proponują zamiast zadania A jego uproszczoną wersję.

Zadanie B

1B) Zamiast minimalizować wariancję całego układu, zminimalizować sumę wariancji bloków:

$$J = \sum_{i=1}^{N} Var\{T_i\} \to \min,$$

2B) zamiast realizować ograniczenie na średni czas pracy całego układu, ograniczyć średni czas pracy każdego z bloków: $E\{T_i\} \geq E_1$,

3B) ograniczenia na koszt pozostają bez zmian: $C_{całk} \leq C_0$.

Zadanie B jest znacznie łatwiejsze i można je szybko rozwiązać przy wykorzystaniu standardowych procedur, np. programu Matlab. Sposoby rozwiązania zadań A i B zostaną przedstawione na przykładach numerycznych.

2. Przypadek I: elementy mają stałą intensywność awarii

Zakładamy, że wszystkie elementy mają wykładniczy rozkład czasu pracy ze stałymi parametrami λ_i wewnątrz bloku U_i. Parametr θ_i występujący w funkcji kosztu jest równy $\frac{1}{\lambda_i}$. Na podstawie (2) niezawodność pojedynczego bloku wynosi

$$R_i(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)^{n_i} = \sum_{k=1}^{n_i} (-1)^{k+1} \binom{n_i}{k} e^{-\lambda_i k t},$$

co w porównaniu ze wzorami (3) daje (zob. [1], [2])

$$E\{T_i\} = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{k}, \tag{4}$$

$$Var\{T_i\} = \frac{1}{\lambda_i^2} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{k^2}. \tag{5}$$

Natomiast dla całego układu, z (1) i (3), otrzymujemy:

$$E\{T\} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{n_N} (-1)^{k_1+\ldots+k_N+N} \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_N}{k_N}}{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_N k_N}, \tag{6}$$

$$E\{T^2\} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{n_N} (-1)^{k_1+\ldots+k_N+N} \frac{2\binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_N}{k_N}}{(\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_N k_N)^2}. \tag{7}$$

Jak widać, wzory opisujące momenty rozkładu czasu pracy systemów szeregowo-równoległych mają złożoną postać. Wzory te nie występują w [3], gdyż autorzy tej pracy analizowali tylko zadanie uproszczone (B).

2.1. Przykład numeryczny

Niech układ U składa się z N=3 bloków. Przyjmujemy następujące parametry funkcji kosztu:

$A_1 = A_2 = 10, \ A_3 = 15,$

$B_1 = 30, \ B_2 = B_3 = 25$

oraz $C_0 = 6, \ E_1 = 20.$

Najpierw rozwiązujemy zadanie B. W tym celu zauważmy, że jeżeli ustalimy zmienne n_1, n_2, n_3, to wartości optymalnych funkcji J należy szukać na brzegu (ze wzoru (5) funkcja J jest sumą trzech funkcji malejących). Zadanie B można więc rozwiązać według następującej procedury przeszukiwania:

1) z ograniczenia na koszt wyznaczamy wszystkie dopuszczalne trójki parametrów (n_1, n_2, n_3), tzn.: $\frac{n_1 A_1}{B_1} + \frac{n_2 A_2}{B_2} + \frac{n_3 A_3}{B_3} \langle C_0;$

2) dla każdej trójki (n_1, n_2, n_3) dobieramy takie parametry $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, aby $E\{T_i\} = E_1$, czyli $\lambda_i = \frac{1}{E_1} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{k};$

3) dla tak dobranych parametrów obliczamy wartości funkcji J i funkcji kosztu; wybieramy te rozwiązania, dla których wartość funkcji J jest najmniejsza i spełnione jest ograniczenie na koszt.

Okazuje się, że najlepsze rozwiązania podanego przykładu, uzyskane w tej procedurze, charakteryzują się również najmniejszą wariancją czasu pracy całego układu. Wyniki obliczeń przedstawia tabl.1 - takie same uzyskano również w [3].

Tablica 1

Rozwiązanie zadania B dla przypadku I

n_1	n_2	n_3	λ_1	λ_2	λ_3	$C_{cał}$	$E\{T\}$	$Var\{T\}$
2	2	3	0,0750	0,0750	0,0917	6,12	9,75	36,22
2	3	2	0,0750	0,0917	0,0750	5,90	9,75	36,22
3	2	2	0,0917	0,0750	0,0750	5,86	9,75	36,22

Przechodzimy do analizy zadania A. Ponieważ w pracy [3] nie rozwiązywano zadania A i w związku z tym nie podano wartości E_0, przyjęto $E_0 = 9,75$. Zadanie A rozwiązano następująco:

1) podobnie jak poprzednio wyznaczono dopuszczalne wartości (n_1, n_2, n_3);

2) przy ustalonych (n_1, n_2, n_3) wybrano parametry $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(\eta)})$, takie że $\lambda_1^{(i)} = \frac{1}{B_1} + i\Delta\lambda$, $\lambda_2^{(j)} = \frac{1}{B_2} + j\Delta\lambda$, natomiast $\lambda_3^{(\eta)}$ zostało tak dobrane, aby $C_{calk} = C_0$; długość kroku $\Delta\lambda = 0{,}0001$;

3) dopóki $E\{T\} \geq E_0$, od wektora $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(\eta)})$ należy odjąć gradient wariancji wyliczony z (7) - powoduje to zmniejszenie wariancji, wartości oczekiwanej i kosztu.

Wyniki przedstawia tabl.2.

Tablica 2

Rozwiązanie zadania A dla przypadku I

n_1	n_2	n_3	λ_1	λ_2	λ_3	C_{calk}	$E\{T\}$	$Var\{T\}$
2	3	2	0,0568	0,1066	0,0779	5,45	9,82	35,79
3	2	2	0,0963	0,0706	0,0752	5,94	9,77	35,98
3	3	2	0,0846	0,0938	0,0868	5,97	9,83	32,84

Rozwiązania przedstawione w tabl.2 są lepsze niż rozwiązania z tabl.1 - charakteryzują się mniejszą wariancją i większą wartością oczekiwaną.

3. Przypadek II: elementy mają losową intensywność awarii

Rozważmy układ jak w poprzedniej sekcji, ale załóżmy, że parametry λ_i rozkładu wykładniczego mają rozkład gamma z parametrami α_i, β_i (tzw. podwójna losowość). Wówczas średni czas pracy pojedynczego elementu wynosi $\theta_i = \frac{1}{\alpha_i(\beta_i - 1)}$, natomiast jego niezawodność jest równa $(\alpha_i t + 1)^{-\beta_i}$. Niezawodność bloku U_i wyraża się wzorem

$$R_i(t) = 1 - \left(1 - (\alpha_i t + 1)^{-\beta_i}\right)^{n_i} = \sum_{k=1}^{n_i} (-1)^{k+1} \binom{n_i}{k} (\alpha_i t + 1)^{-k\beta_i},$$

skąd na podstawie wzorów (3) mamy, że

$$E\{T_i\}=\sum_{k=1}^{n_i}\frac{(-1)^{k+1}\binom{n_i}{k}}{\alpha_i(\beta_i k-1)}, \tag{8}$$

$$E\{T_i^2\}=\sum_{k=1}^{n_i}\frac{2(-1)^{k+1}\binom{n_i}{k}}{\alpha_i^2(\beta_i k-1)(\beta_i k-2)}. \tag{9}$$

Dla uproszczenia załóżmy, że $\alpha_i=\alpha$, $\beta_i=\beta$, (i=1,2, ... N). Wówczas wzory na momenty zmiennej T wyrażają się następująco:

$$E\{T\}=\sum_{k_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{k_N=1}^{n_N}\frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_N+N}\binom{n_1}{k_1}\ldots\binom{n_N}{k_N}}{\alpha(\beta(k_1+\ldots+k_N)-1)} \tag{10}$$

$$E\{T^2\}=\sum_{k_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{k_N=1}^{n_N}\frac{2(-1)^{k_1+\ldots+k_N+N}\binom{n_1}{k_1}\ldots\binom{n_N}{k_N}}{\alpha^2(\beta(k_1+\ldots+k_N)-1)(\beta(k_1+\ldots+k_N)-2)} \tag{11}$$

W przypadku gdy wartości parametrów α_i, β_i są związane z numerem bloku i, wzory na momenty zmiennej T mają postać całkową.

3.1. Przykład numeryczny

W przykładzie numerycznym przyjmujemy te same wartości stałych jak poprzednio. Dla ułatwienia ustalamy parametry $\beta_i=\beta$ (podobnie jak w [3] przyjęto $\beta=11$).

Zadanie uproszczone (B) rozwiązujemy analogicznie do przypadku I. Wyniki obliczeń przedstawia tabl.3. Najlepsze rozwiązanie jest przedstawione w ostatnim wierszu - takie samo podano w pracy [3].

Tablica 3

Rozwiązanie zadania B dla przypadku II

n_1	n_2	n_3	λ_1	λ_2	λ_3	C_{sum}	$E\{T\}$	$Var\{T\}$
2	2	3	0,0076	0,0076	0,0094	6,00	9,14	35,09
2	3	2	0,0076	0,0094	0,0076	5,80	9,14	35,09
3	2	2	0,0094	0,0076	0,0076	5,76	9,14	35,09

Ponieważ w rozwiązaniu zadania uproszczonego (B) najmniejszą wariancję uzyskano, gdy wartość oczekiwana wynosiła 9,14, taką wartość przyjęto jako E_0 w zadaniu A. Korzystając bezpośrednio ze wzorów (10) i (11), otrzymujemy lepsze rozwiązanie (pierwszy wiersz tabl.4), natomiast zastosowanie procedury wykorzystującej gradienty wariancji prowadzi do wyników podanych w dwóch ostatnich wierszach tabl.4.

Tablica 4

Rozwiązanie zadania A dla przypadku II

n_1	n_2	n_3	λ_1	λ_2	λ_1	$C_{\text{całk}}$	$E\{T\}$	$Var\{T\}$
3	3	2	0,0091	0,0091	0,0091	5,86	9,14	31,66
2	2	3	0,0061	0,0075	0,0113	5,97	9,16	34,33
3	3	2	0,0097	0,0097	0,0083	5,90	9,15	30,91

4. Podsumowanie wyników

Przedstawione w pracy dwa podejścia do problemu optymalizacji wariancji czasu pracy na przykładzie układu szeregowo-równoległego prowadzą do różnych wyników. Lepsze wyniki (mniejszą wariancję przy nie mniejszej wartości oczekiwanej) uzyskuje się, korzystając z dokładnych wzorów na momenty czasu pracy układu. Wariancję udało się zmniejszyć o około 10%.

Różnice w rozwiązaniach są spowodowane tym, że ograniczenie na wartość oczekiwaną czasu pracy całego układu jest zastępowane ograniczeniami na wartości oczekiwane czasu pracy poszczególnych bloków. Dla podanego w rozdziale 3 przykładu systemu elementów o losowej intensywności awarii średni czas pracy układu zależy od liczby elementów wewnątrz bloku - jeżeli tak dobierzemy parametry α_i, by $E\{T_i\} = 20$, to wartość oczekiwana czasu pracy układu mieści się w przedziale $\langle 6{,}25; 10{,}99 \rangle$. Prawdopodobnie wpływ na wyniki ma również zmiana funkcji celu; wymaga to jednak dalszych badań.

LITERATURA

1. Barlow R.E., Proschan F.: Mathematical Theory of Reliability. New York, London, Sydney 1965.
2. Kopociński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. Warszawa 1973.

3. Krishnan Iyer R., Downs T.: A Variance Minimization Method of Reliability Design. IEEE Trans. Reliab. R-26, 1977, s.106-110.

4. Krishnan Iyer R., Downs T.: A Moment Approach to Evaluation and Optimization of Complex System Reliability. IEEE Trans. Reliab. R-27, 1978, s.226-229.

Recenzent: Prof. dr hab. Bolesław Kopociński

Wpłynęło do Redakcji 19 maja 2000 r.

Abstract

In the paper a moment approach to optimization of series-parallel system reliability is presented. This approach seeks to minimize the variance on system lifetime, if constraints of expected lifetime and cost function are given. This leads us to a nonlinear mixed integer programming problem in that integer variables appear as limits of sums (see formulae (6),(7)). In [3] the simplification of the optimization problem is described - the variance of the system lifetime is approximated by the sum of the variances of the lifetimes of the individual subsystems, and constraints of expected lifetime of each subsystems in place of a constraint of expected lifetime of whole system are taken. Here we try to solve the optimization problem using exact expressions for the first and second moment of the system lifetime. We consider the case where failure rates of units in system are constant and where they are random variables. Both procedures are illustrated by numerical examples, which show that solution are better if we use exact expressions.