

Stanisław Jerzy GDULA

Politechnika Łódzka

Filia w Bieleku-Białej

## O POLITROPIE GAZU RZECZYWISTEGO

**Streszczenie.** Przyjmując definicję politropy (1) rozpatrzono związki pomiędzy parametrami  $p$ - $T$  i  $p$ - $v$ , wprowadzając dwa dodatkowe wykładniki politropy (17) i (23) umożliwiające optymalne wykorzystanie równań gazu doskonałego (19) i (25) do obliczeń przybliżonych dla gazu rzeczywistego. Wyprowadzono równanie (34) na ciepło właściwe politropy gazu rzeczywistego oraz równanie (35) na stosunek ciepła do pracy. W równaniach tych posłużono się bezwymiarowymi wielkościami  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{v}_T$  (równania (8), (9), (10)).

### 1. Wstęp

Politropę definiuje się zwykle jako przemianę pseudoodwracalną przebiegającą zgodnie z równaniem [1]

$$pv^{\gamma} = \text{idem}, \quad \gamma = \text{idem}, \quad (1)$$

lub w zapisie różniczkowym

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0. \quad (2)$$

W przypadku gazu doskonałego lub półdoskonałego skutkiem tej definicji jest następująca zależność dla ciepła właściwego gazu podczas przemiany politropowej, zwanego krótko ciepłem właściwym politropy<sup>1)</sup>

$$c^* = c_v^* \frac{\gamma - \alpha^*}{\gamma - 1}. \quad (3)$$

Definiowanie politropy jako przemiany o stałym ciepłe właściwym (por. np. [2]) jest więc równoważne jedynie dla gazu doskonałego, dla którego  $c_v^* = \text{idem}$  i  $\alpha^* = \text{idem}$ . Definicja ta jest nieprzydatna już dla gazu półdoskonałego, a tym bardziej dla gazu rzeczywistego i w niniejszej pracy nie będzie wykorzystywana.

<sup>1)</sup> Gwiazdka na poziomie wykładnika potęgowego oznacza wielkości dotyczące gazu półdoskonałego.

Skojarzenie równań (1) i (2) z równaniem Clapeyrona daje, jak wiadomo, związki pomiędzy parametrami p-T i v-T, słuszne dla politropy gazu doskonałego i półdoskonałego

$$\frac{T}{p^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \text{idem}, \quad (4)$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0, \quad (5)$$

$$T v^{\gamma-1} = \text{idem}, \quad (6)$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dv}{v} = 0. \quad (7)$$

Przy kojarzeniu równania różniczkowego przemiany (2) z termicznym równaniem stanu gazu rzeczywistego będziemy korzystali z jego różniczek zupełnych zawierających pochodne cząstkowe. Pochodne te można przedstawić w postaci bezwymiarowej:

- bezwymiarowy odpowiednik współczynnika rozszerzalności objętościowej

$$\bar{\alpha} = \frac{T}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \quad (8)$$

- bezwymiarowa postać współczynnika prężności

$$\bar{\beta} = \frac{T}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \quad (9)$$

- wykładnik izotermny

$$\gamma_T = - \frac{v}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T. \quad (10)$$

Istnieje pomiędzy nimi następujący związek

$$\frac{\bar{\alpha} \gamma_T}{\bar{\beta}} = 1. \quad (11)$$

Dla gazu doskonałego i półdoskonałego wielkości te przybierają wartość

$$\bar{\alpha}^* = \bar{\beta}^* = \gamma_T^* = 1,$$

a dla gazu rzeczywistego są funkcjami etanu tego gazu.

## 2. Związki pomiędzy parametrami czynnika podczas przemiany

Z równania (1) definiującego politropę można wprost wyznaczyć związek pomiędzy ciśnieniem i objętością właściwą

$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma \quad (12)$$

Dla znalezienia związku pomiędzy temperaturą i ciśnieniem należy równanie politropy uzupełnić termicznym równaniem stanu  $F(T, p, v) = 0$ . Rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned} p_2 v_2^\gamma &= p_1 v_1^\gamma \\ F(T_2, p_2, v_2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

umożliwia wyznaczenie końcowej temperatury gazu  $T_2$ , gdy znane jest końcowe ciśnienie  $p_2$  i na odwrót. W obu przypadkach mamy do czynienia z układem równań nieliniowych, wymagającym stosowania metod przybliżonych. Stosowanie metod standardowych, będących z reguły metodami iteracyjnymi, wymaga określenia pierwszego przybliżenia rozwiązania. Przy trafnie dobranej metodzie określania tego pierwszego przybliżenia można uzyskać rozwiązanie dostatecznie dokładne do celów obliczeń technicznych. Narzuca się w sposób oczywisty określenie pierwszego przybliżenia ze związku (4) dla politropy gazu doskonałego. Jednakże użycie tego związku wprost, przy wykorzystaniu wykładnika  $\gamma$  nie daje najlepszego przybliżenia.

Jeżeli z równania różniczkowego politropy (2), które jest równaniem ścisłym, wyrugujemy różniczkę  $dv$  z równie ścisłej zależności

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp,$$

którą po uwzględnieniu (8), (10) i (11) można zapisać następująco

$$dv = \frac{v}{T} \frac{\beta}{\gamma} dT - \frac{v}{p} \frac{1}{\gamma} dp, \quad (14)$$

to uzyskamy następujące równanie różniczkowe politropy gazu rzeczywistego we współrzędnych  $p$ - $T$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - \gamma T}{\gamma \beta} \frac{dp}{p} = 0. \quad (15)$$

Jest ono również równaniem ścisłym. Chcąc nagiąć je do równania (5) politropy gazu doskonałego, należy użyć innego od  $\gamma$  wykładnika politropy. Oznaczmy ten wykładnik symbolem  $\gamma_{pT}$ , jako że będzie służył do określenia związku pomiędzy parametrami  $p$ - $T$

$$\frac{dT}{T} - \frac{\gamma_{pT} - 1}{\gamma_{pT}} \frac{dp}{p} = 0. \quad (16)$$

Porównując równania (15) i (16), otrzymujemy

$$\gamma_{pT} = \frac{\gamma \beta}{\sqrt{\beta-1} + \gamma_T}. \quad (17)$$

Wykładnik  $\gamma$  jest stały z definicji politropy, natomiast wykładnik  $\gamma_{pT}$  jest zmienny i zależy od parametrów stanu. Możliwe jest zatem lokalne, w otoczeniu punktu o parametrach  $p_1, T_1$ , scałkowanie przybliżone równania (16), przy przyjęciu wartości wykładnika dla parametrów tego punktu  $\gamma_{pT} = \gamma_{pT}(p_1, T_1)$

$$\frac{\frac{T}{\gamma_{pT} - 1}}{p \frac{\gamma_{pT}}{\gamma_{pT}}} \approx \frac{\frac{T_1}{\gamma_{pT} - 1}}{p_1 \frac{\gamma_{pT}}{\gamma_{pT}}}. \quad (18)$$

Równanie (18) jest równaniem linii ściśle stycznej do linii obrazującej rzeczywisty przebieg politropy w układzie  $p$ - $T$ . W szczególności z równania tego wynika sposób przybliżonego określenia temperatury końcowej  $T_2$

$$T_2 \approx T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma_{pT} - 1}{\gamma_{pT}}}. \quad (19)$$

Jak już wyżej wspomniano, przybliżenie to, w zależności od żądanej dokładności obliczeń, może stanowić samodzielne rozwiązanie lub być pierwszym przybliżeniem dla metod standardowych.

Podobnie można uzyskać trzeci wykładnik politropy, przydatny do wyznaczania związku pomiędzy temperaturą i objętością właściwą. W tym celu różniczkę termicznego równania stanu

$$dp = \frac{p}{T} \beta dT - \frac{p}{v} \gamma_T dv \quad (20)$$

podstawiamy do równania (2) i otrzymujemy równanie

$$\frac{dT}{T} + \frac{\nu - \nu_T}{\beta} \frac{dv}{v} = 0, \quad (21)$$

porównujemy z równaniem (7)

$$\frac{dT}{T} + (\nu_{TV} - 1) \frac{dv}{v} = 0. \quad (22)$$

Z porównania otrzymujemy wartość wykładnika

$$\nu_{TV} = 1 + \frac{\nu - \nu_T}{\beta}. \quad (23)$$

I w tym przypadku równanie (22) można lokalnie scałkować w sposób przybliżony, posługując się ustaloną wartością wykładnika  $\nu_{TV}$ , wziętą dla parametrów początkowych

$$T \nu_{TV}^{\nu_{TV}-1} \approx T_1 \nu_1^{\nu_{TV}-1}, \quad (24)$$

z której w szczególności wynika przybliżona wartość końcowej temperatury

$$T_2 \approx T_1 \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{\nu_{TV}-1}. \quad (25)$$

Obliczenie temperatury  $T_2$  z dowolnie dużą dokładnością wymaga rozwiązania układu równań nieliniowych (13).

### 3. Ciepło właściwe przemiany politropowej

Do wyznaczenia ciepła właściwego posłużymy się następującą znaną zależnością

$$c = c_v + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_v, \quad (26)$$

której szczególnym przypadkiem jest wzór

$$c_p - c_v = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (27)$$

Pochodne cząstkowe występujące w powyższym równaniu możemy wyrazić z zależności (8) i (9)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{p}{T} \bar{\beta},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{v}{T} \bar{\alpha},$$

natomiast pochodną  $(\partial v / \partial T)_V$  z równania (21)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_V = -\frac{v}{T} \frac{\bar{\beta}}{v - v_T} \quad (28)$$

uzyskując w miejsce równań (26) i (27), co następuje

$$c = c_V - \frac{pv}{T} \frac{\bar{\beta}^2}{v - v_T} \quad (29)$$

$$c_p - c_V = \frac{pv}{T} \bar{\alpha} \bar{\beta} \quad (30)$$

Z równania (30) obliczamy ułamek  $pv/T$  i podstawiamy do równania (29)

$$c = c_V - (c_p - c_V) \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}(v - v_T)} \quad (31)$$

Wykorzystujemy następnie znaną zależność na wykładnik izentropy gazu rzeczywistego

$$\kappa = -\frac{v}{T} \frac{c_p}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{c_p}{c_V} v_T \quad (32)$$

z której wyznaczamy  $c_p$

$$c_p = \frac{c_V \kappa}{v_T} \quad (33)$$

Po podstawieniu (33) do (31) i uwzględnieniu, że  $\bar{\alpha} v_T = \bar{\beta}$  (równ. (11)), otrzymujemy ostatecznie

$$c = c_V \frac{v - \kappa}{v - v_T} \quad (34)$$

W równaniu tym  $c_v$ ,  $\kappa$ ,  $\nu_T$  są zmienne i zależą od parametrów stanu czynnika termodynamicznego, a więc i ciepło właściwe przemiany politropowej gazu rzeczywistego jest zmienne,  $c = c(T, p)$ .

#### 4. Stosunek ciepła do pracy

Jedną z cech politropy gazu doskonałego jest proporcjonalność ciepła i pracy. Współczynnik proporcjonalności jest stały i zależy jedynie od rodzaju gazu i od wykładnika politropy

$$\left(\frac{dq}{dl}\right)^* = \frac{\kappa^* - \nu^*}{\kappa^* - 1}.$$

Dla gazu rzeczywistego stosunek ten można wyznaczyć z rozwinięcia wyrażenia różniczkowych  $dq$  i  $dl$

$$\frac{dq}{dl} = \frac{c}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\nu}.$$

Po wykorzystaniu równań (28) i (33) otrzymujemy

$$\frac{dq}{dl} = -c_v \frac{T}{pv} \frac{\nu - \kappa}{\beta},$$

a po wylczeniu iloczynu  $c_v T/pv$  z równań (30) i (33)

$$c_v \frac{T}{pv} = \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta}}{\frac{\kappa}{\nu_T} - 1} = \frac{\bar{\beta}^2}{\kappa - \nu_T}$$

mamy ostatecznie

$$\frac{dq}{dl} = \bar{\beta} \frac{\kappa - \nu}{\kappa - \nu_T}. \quad (35)$$

Również i ta wielkość nie jest stała dla gazu rzeczywistego z powodu zmienności w funkcji parametrów stanu wielkości  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  i  $\nu_T$ .

Łatwo sprawdzić, że dla gazu doskonałego, dla którego wielkości  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  i  $\nu_T$  przyjmują wartość równą 1, wszystkie wyprowadzone wyżej wzory dla politropy gazu rzeczywistego przechodzą w klasyczne wzory dla gazu doskonałego.

## LITERATURA

- [1] Ochęduszek St.: Termodynamika stosowana. WNT, Warszawa 1970.  
 [2] Wukałowicz M.P., Nowikow I.I.: Termodynamika. Izd. Maszynostrojenije, Moskwa 1972.

## О ПОЛИТРОПИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

## Р е з ю м е

Принимая уравнение (1) как уравнение, определяющее политропический процесс, рассмотрены зависимости между параметрами  $p-T$  и  $p-v$ . Введены дополнительные показатели политропы (17) и (23), пригодные для оптимального использования уравнений (19) и (25) политропы идеального газа для приближенных расчетов политропы реального газа.

Выведено уравнение (34) на теплоёмкость политропического процесса и уравнение (35), определяющее отношение тепла к работе. В этих уравнениях использованы безразмерные величины  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\nu}_T$  (уравнения (8), (9) и (10)).

## ABOUT POLITROPIC PROCESS OF A REAL GAS

## S u m m a r y

Assuming that definition of politropy is given by equation (1) relationship between parameters  $p-T$  and  $p-v$  has been discussed. Two additional exponents (17), (23) were introduced. This make the ideal-gas model sufficient for real gas approximate calculations.

Equations (34) defining specific heat of real gas politropy, and (35) defining the heat to work ratio, have been given. In this equations dimensionless parameters  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\nu}_T$  were used (equations (8), (9), (10)).