ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: ELEKTRYKA z. 167 Nr kol. 1422

Edward WILCZYŃSKI

PRĄD I NAPIĘCIE UKŁADU ELEKTRYCZNEGO : NIELINIOWY REZYSTOR — NIELINIOWA CEWKA W SKOŃCZONYM PRZEDZIALE CZASU

Streszczenie. W pracy udowadnia się istnienie rozwiązania przebiegu prądu i napięcia dwójnika elektrycznego, składającego się z szeregowego lub równoległego połączenia nieliniowego rezystora i nieliniowego induktora. Dwójnik zasilany jest ze źródła napięcia lub prądu w skończonym przedziale czasu. Wyprowadza się rozwiązanie postawionego problemu oraz oblicza wybrany przypadek.

CURRENT AND VOLTAGE OF AN ELECTRIC CIRCUIT: NONLINEAR RESISTOR — NONLINEAR COIL IN A FINITE TIME PERIOD

Summary. In this paper there is proved a possible solution of the panage of current and voltage of the electric two-terminal network which consists of a serial or parallel connection of a nonlinear resistor and nonlinear inductor. The two terminal network is supplied from a voltage source or current generator in a finite time period. The solution of the given problem is derived and a selected case is calculated.

1. STOSOWANE POJĘCIA

Dwójnik elektryczny wykonano jako równoległe lub szeregowe połączenie nieliniowej rezystancji R_N i nieliniowej indukcyjności L_N. Napięcie u, prąd i, czas t, strumień skojarzony ψ należą do zbiorów ograniczonych odpowiednio U, I, T, Ψ: $\square u_0 < U < u_0$, $\square i_0 < I < i_0$,

$$t_0 < T < t_1,\ \square\psi_0 < \Psi < \psi_0,\ u_0, i_0, t_0, t_1, \psi_0 < \infty.$$

Rezystor R_N jest zdefiniowany funkcją: $F_R : U \ni u \to F_R(u) = i \in I$, która jest odwzorowaniem bijektywnym [2], tzn. istnieje odwzorowanie odwrotne $F_R^{-1} : I \ni i \to F_R^{-1}(i) \in U$ (funkcje F_R i F_R^{-1} są monotoniczne). Analogicznie zakłada się, że induktor L_N jest zdefiniowany za pomocą odwzorowania bijektywnego $F_L : I \ni I \to F_L(i) = \psi \in \Psi$. Zakłada się, że krzywe $i=F_R(u)$, $\psi=F_L(i)$, leżące w 1 i 3 ćwiartce układu współrzędnych, są nieparzyste:

$$F_R(u) = -F_R(-u),\ F_L(i)=-F_L(-i)$$

oraz należą do klasy C^∞, $F_R, F_L \in C^\infty$.

Zakłada się, że funkcje wymuszające (napięcie $u \in U$ lub prąd $i \in I$ lub strumień $\psi \in \Psi$) są funkcjami czasu u(t), i(t), ψ(t) klasy C^∞. Innymi słowy funkcje te są analityczne, tzn. są rozwijalne w szeregi potęgowe, czyli że są klasy C^∞. Natomiast o regularności funkcji będących rozwiązaniami stawianych problemów (np. o regularności prądu, napięcia lub

strumienia) będą orzekać odpowiednie twierdzenia. Jeżeli np. w układzie szeregowym $R_N L_N$ jest wymuszony prąd $i \in C^{\infty}$, $i \in I$, to napięcie na zaciskach tego dwójnika $e \in U$ wynosi:

$$e = F_R^{-1}(i) + \frac{d\psi}{dt}, \quad u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} F_L(i) = \frac{dF_L}{di} \cdot \frac{di}{dt}, \tag{1}$$

$$L_d(i) = \frac{dF_L}{di} \text{ - indukcyjność własna dynamiczna induktora,} \tag{2}$$

$$e \in C^{\infty} \text{ - ze względu na poczynione wcześniej założenia.} \tag{3}$$

Proponowana w pracy metoda wyznaczania prądu i napięcia nieliniowych dwójników opiera się na twierdzeniu Cauchy'ego i Kowalewskiej [1], [3] rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu i wymaga mocnych założeń regularnościowych badanych funkcji (klasy C^{∞}). Rozwiązanie problemu konstruuje się w postaci szeregu potęgowego.

Istnieje alternatywna metoda rozwiązywania takich układów, oparta na twierdzeniu Picarda [1], [3], która sprowadza się do rozwiązywania odpowiedniego równania całkowego. Badane funkcje muszą być w tej metodzie co najwyżej ciągłe (klasy C^0). Metoda ta nie jest przedmiotem rozważań w tym artykule.

2. UKŁAD SZEREGOWY $R_N L_N$

Zakłada się, że w przedziale czasu $0 < t < \tau$ na zaciskach dwójnika $R_N L_N$ wymuszono napięcie $e(t) \in U$, $e \in C^{\infty}$. Dwójnik składa się z szeregowego połączenia nieliniowego rezystora R_N i nieliniowego induktora L_N zdefiniowanych odpowiednimi charakterystykami w poprzednim punkcie. W chwili $t = 0$ zakłada się, że przez dwójnik płynie prąd i_0. Prąd w funkcji czasu $i(t)$ oblicza się z równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu (1) niejednorodnego. Równanie to można zapisać w postaci normalnej (rozwiązanej względem pochodnej obliczanej funkcji):

$$\frac{di}{dt} = F(i,t), \quad F(i,t) = \frac{e}{L_d(i)} - \frac{F_R^{-1}}{L_d(i)}, \quad L_d(i) = \frac{dF_L}{di}. \tag{4}$$

O istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego (4) orzeka twierdzenie Cauchy'ego i Kowalewskiej [1], [3]. Dla funkcji F określonej wzorem (4):

$$F : (i,t) \in I \times T \to F(i,t) \in \Omega,$$

analitycznej w otoczeniu punktu $(i_0, 0)$, $t = 0$, istnieje rozwiązanie $i(t)$ problemu Cauchy'ego :

$$\frac{di}{dt} = F(i,t) \tag{5}$$

$$i(0) = i_0 \tag{6}$$

określone jednoznacznie i analityczne w pewnym otoczeniu Δ punktu $t = 0$. Funkcja $i(t)$ ma postać szeregu Maclaurina:

$$i(t) = i(0) + \frac{t}{1!} i'(0) + \frac{t^2}{2!} i''(0) + \frac{t^3}{3!} i'''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!} i^{(n)}(0) + \ldots, \tag{7}$$

gdzie $i'(0) = \frac{di}{dt}(t=0)$, $i''(0) = \frac{d^2 i}{dt^2}(t=0)$, itd.

Udowadnia się [1], [3], że szereg (7) posiada niezerowy promień zbieżności $\rho \in \Delta$, $t \le \rho$, w którym istnieje suma (7). Oszacowanie promienia zbieżności nie jest łatwe i stanowi oddzielny problem nie rozpatrywany w tej pracy.

Współczynniki szeregu oblicza się z równania (5):
$i(0) = i_0$ - założona wartość prądu dwójnika w chwili t = 0, określona wzorem (6),
$i'(0) = F(i_0,0)$ - wartość funkcji określona wzorami (5), (4), (8)

$$i''(0) = \frac{dF}{dt}(i_0,0) = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{L_d}\left(e - F_R^{-1}\right) = -\frac{1}{L_d^2}\left(e - F_R^{-1}\right)\frac{dL_d}{di}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{L_d}\left(\frac{de}{dt} - \frac{dF_R^{-1}}{di}\cdot\frac{di}{dt}\right)$$

□ wartość pierwszej pochodnej względem czasu funkcji F określonej wzorami (4), (5) (9)
(we wzorze (9) występują pochodne $\frac{di}{dt}(t=0)$, w miejsce których podstawia się funkcje (8)),

$$i'''(0) = \frac{d^2F}{dt^2}(i_0,0), \text{ itd.} \tag{10}$$

(we wzorze (10) będą występować pochodne $\frac{di}{dt}$ oraz $\frac{d^2i}{dt^2}$, liczone w punkcie t = 0, w miejsce których wstawia się funkcje (8), (9)).

W wyniku zasilania układu szeregowego R_NL_N źródłem prądowym uzyskuje się wprost ze wzoru (1) przebieg napięcia e na zaciskach dwójnika R_NL_N.

3. UKŁAD RÓWNOLEGŁY R_NL_N

Zakłada się, że w układzie równoległego połączenia nieliniowego rezystora i induktora wymuszono prąd i(t), $i \in C^\infty$, $i \in I$. Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa :

$$i(t) = F_R(e) + i_L(t), \qquad 0 < t < \tau. \tag{11}$$

Zależność między prądem a napięciem induktora określa równanie różniczkowe (1):

$$e = \frac{d\psi}{dt} = u_L = \frac{d}{dt}F_L(i_L) = \frac{dF_L}{di_L}\cdot\frac{di_L}{dt} = L_d\frac{di_L}{dt}, \quad L_d = \frac{dF_L}{di_L} = L_d(i_L), \tag{12}$$

gdzie i_L – prąd cewki.

Po zróżniczkowaniu równania (11) względem czasu i podstawieniu za pochodną di_L/dt funkcję $e/L_d(i_L)$, wyliczoną ze wzoru (12), otrzymuje się:

$$\frac{di}{dt} = \frac{dF_R}{de}\cdot\frac{de}{dt} + \frac{e}{L_d(i_L)}. \tag{13}$$

Pochodna $\frac{di}{dt}$ jest daną funkcją czasu, pochodna $\frac{dF_R}{de}$ jest daną funkcją niewiadomego napięcia e, indukcyjność L_d jest daną funkcją nieznanego prądu induktora i_L (wzór (12)). Wynika z tego, że równanie (13) jest skomplikowanym równaniem całkowo-różniczkowym , którego nie da się rozwiązać.

Tylko w przypadku induktora liniowego dla L_d=const równanie (13) da się przekształcić do postaci podobnej do równań (5) (21) (poprzez wyliczenie pochodnej de/dt) :

$$\frac{de}{dt} = F_2(e,t), \quad F_2(e,t) = \frac{1}{\frac{dF_R}{de}}\left(\frac{di}{dt} - \frac{e}{L_d}\right). \tag{14}$$

Założono, że w chwili t = 0 napięcie na dwójniku układu równoległego R_NL wynosi:

$$e(0) = e_0. \tag{15}$$

Równania (14), (15) są postawieniem identycznego problemu Cauchy'ego jak w przypadku równań (5), (6). Rozwiązaniem równania (14) jest szereg Maclaurina (7):

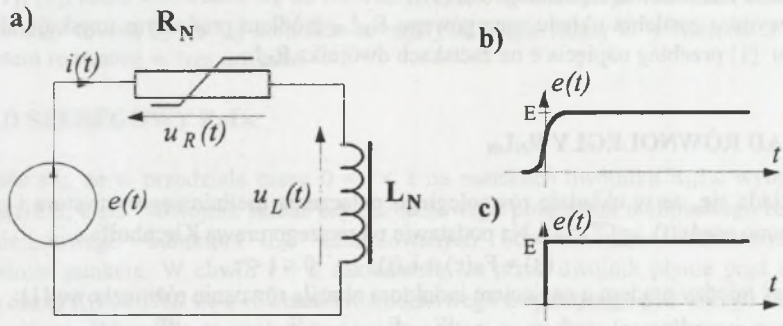
$$e(t) = e_0 + te'(0) + \frac{t^2}{2}e''(0) + \frac{t^3}{6}e'''(0) + \ldots, \tag{16}$$

liczony w pewnym otoczeniu Δ punktu $t = 0$ wewnątrz promienia zbieżności ρ, $0 \le t \le \rho$, $\rho \in \Delta$. Pochodne $e'(0)$, $e''(0)$, $e'''(0)$ itd. są liczone podobnie jak we wzorach (8), (9), (10).

W wyniku zasilania układu równoległego $R_N L_N$ źródłem napięciowym przebieg prądu, jaki pobiera dwójnik, uzyskuje się wprost.

4. PRZYKŁAD – UKŁAD $R_N L_N$ SZEREGOWY ZASILANY NAPIĘCIEM STAŁYM

Dwójnik elektryczny $R_N L_N$ przedstawiono na rys. 1.a .



Rys.1. Układ elektryczny $R_N L_N$
Fig.1. The $R_N L_N$ electrical system

Dwójnik jest zasilany napięciem e(t) (rys.1.b), które ma postać funkcji gładkiej ($e \in C^\infty$), bardzo zbliżonej do skoku jednostkowego. Szereg funkcji dokonujący gładkiej aproksymacji skoku jednostkowego można zrealizować na wiele sposobów. W szczególnym przypadku obliczeń równania różniczkowego (4), w którym da się je scałkować i nie ma potrzeby stosowania twierdzenia Cauchy'ego i Kowalewskiej , przyjmuje się za napięcie wymuszające funkcję skoku jednostkowego (rys. 1.c).

Charakterystyka napięciowo-prądowa $F_R^{-1}(i) = u$ rezystora ma postać:

$$u(i) = \left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right) U_N , \tag{17}$$

gdzie: i_n – stały prąd „nasycenia", powyżej którego napięcie już niewiele rośnie,
U_N – stałe napięcie (maksymalna wartość napięcia jaka występuje na rezystorze dla prądu $i = \infty$).

Charakterystyka u(i) opisana za pomocą funkcji wykładniczej (17) i 2 stałych jest zbliżona do charakterystyki wyładowania łukowego przed efektem jej opadania ($R_d = \frac{dU}{di} \ge 0$).

Induktor opisany jest funkcją $F_L(i)=\psi$ wynikającą z nieliniowej charakterystyki magnesowania przy zaniedbaniu histerezy (ośrodek bez pamięci). Dla induktora przyjęto podobną funkcję jak dla rezystora:

$$\psi(i) = \left(1 - e^{-\frac{i}{i_L}}\right)\psi_L \,, \tag{18}$$

gdzie: i_L, ψ_L - stałe (prąd, strumień skojarzony) nasycenia.
Szukany jest przebieg prądu i(t) w układzie rys.1.a, w otoczeniu chwili t = 0. Równanie (1) przyjmuje postać:

$$e(t) = u_R + u_L \,, \tag{19}$$

gdzie:

$$u_R(t) = U_N\left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right), \quad u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = L_d\frac{di}{dt}, \quad L_d = \frac{\psi_L}{i_L}e^{-\frac{i}{i_L}}.$$

Równanie (5) przyjmuje postać:

$$\frac{di}{dt} = \left[e(t) - U_N\left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right)\right]\frac{i_L}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}}. \tag{20}$$

Przyjęto zerowy warunek początkowy $i(0) = 0 = i_0$ Funkcja F opisana wzorem (5) ma postać:

$$\frac{di}{dt} = F(i,t), \qquad F(i,t) = (e(t) - U_N)\frac{i_L}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}} + \frac{U_N i_L}{\psi_L}e^{\left(\frac{1}{i_L} - \frac{1}{i_n}\right)i}. \tag{21}$$

Funkcje (8), (9), (10) przyjmują wartości:

$$i'(0) = F(i_0) = F(0) = \frac{e(0)\,i_L}{\psi_L} = a\,, \tag{22}$$

$$i''(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial i}\cdot\frac{di}{dt}\right)(i_0 = 0, t = 0) =$$

$$= \left\{\left[(e(t) - U_N)\frac{1}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}} + \frac{U_N i_L}{\psi_L}\left(\frac{1}{i_L} - \frac{1}{i_n}\right)e^{\left(\frac{1}{i_L} - \frac{1}{i_n}\right)i}\right]\cdot\left[(e(t) - U_N)\frac{i_L}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}} + \frac{U_N i_L}{\psi_L}e^{\left(\frac{1}{i_L} - \frac{1}{i_n}\right)i}\right] +\right.$$

$$\left. + e'(t)\frac{i_L}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}}\right\}(i = 0, t = 0) = \frac{d^2 i}{dt^2}(t = 0) = \left(\frac{e(0)}{\psi_L} - \frac{U_N}{\psi_L}\cdot\frac{i_L}{i_n}\right)\frac{e(0)\,i_L}{\psi_L} + e'(0)\frac{i_L}{\psi_L} = 2b\,, \tag{23}$$

$$i'''(0)=\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+2\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{di}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\left(\frac{di}{dt}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial i}\cdot\frac{d^2 i}{dt^2}=e''(0)\frac{i_L}{\psi_L}+2e^2(0)\frac{i_L}{\psi_L^2}+$$

$$+\left(\frac{e(0)}{\psi_L i_L}-\frac{2U_N}{\psi_L i_n}+\frac{U_N i_L}{\psi_L i_n^2}\right)\left(\frac{e(0)i_L}{\psi_L}\right)^2+\left(e(0)-U_N\frac{i_L}{i_n}\right)^2\frac{e(0)i_L}{\psi_L^3}+ \tag{24}$$

$$+\left(e(0)-U_N\frac{i_L}{i_n}\right)\frac{e'(0)i_L}{\psi_L^2}=6c.$$

Funkcja i(t) w pobliżu punktu t = 0 przyjmuje postać (7) (obliczoną do 3 potęgi czasu t):

$$i(t)=a\,t+b\,t^2+c\,t^2 \tag{25}$$

(dla stałych a, b, c opisanych wzorami (22), (23), (24)).

W pewnych przypadkach wartości stałych w równaniu (21) istnieje możliwość jego scałkowania, o ile dodatkowo zastąpi się funkcję gładką e(t) (rys.1.b) skokiem jednostkowym (rys.1.c). Jest to możliwe, bowiem nie trzeba korzystać z rozwiązania wg twierdzenia Cauchy'ego i Kowalewskiej :

$$\int\frac{di}{F(i)}=\int dt,\qquad F(i)=(E-U_N)\frac{i_L}{\psi_L}e^{\frac{i}{i_L}}+\frac{U_N i_L}{\psi_L}e^{\left(\frac{1}{i_L}-\frac{1}{i_n}\right)i}. \tag{26}$$

Przykładowo, narzucając na elementy R_N, L_N warunek $i_n = i_L$ można scałkować analitycznie równanie (26). Po wykonaniu całkowania otrzymuje się funkcję t(i):

$$t(i)=C_0+\left(\frac{i}{i_n}-\ln\left|1+\frac{E-U_N}{U_N}e^{\frac{i}{i_n}}\right|\right)\tau,\qquad \tau=\frac{\psi_L i_n}{U_N i_L}=\frac{\psi_L}{U_N} \tag{27}$$

lub funkcję odwrotną i(t):

$$i=-i_n\ln\left|1+\frac{E}{U_N}e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{E}{U_N}\right|. \tag{28}$$

Stałą C_0(27) oblicza się z warunku początkowego t(0) = 0. Całkowanie przedstawione wzorem (26) jest elementarne ale dosyć żmudne, dlatego podano tylko wynik całkowania w postaci wzoru (27). Funkcja (28) określona jest w nieskończonym przedziale czasu w odróżnieniu od rozwiązania (25), które jest określone dla niewielkiego promienia t<ρ. Prąd i określony wzorem (28) dla czasu t = □ ma postać :

$$i(\infty)=-i_n\ln\left|1-\frac{E}{U_N}\right|,\qquad \frac{E}{U_N}<1, \tag{29}$$

a wzór (28) ma sens, o ile zachodzi nierówność $E < U_N$ (prąd i określony wzorem (28) jest funkcją ograniczoną). Nierówność ta oznacza, że napięcie wymuszające dwójnika E musi być mniejsze od napięcia U_N rezystora określonego wzorem (17).

Kształt prądu i (wzór (28)) jest podobny do przypadku prądu i_{RL} załączania napięcia stałego E w gałęzi szeregowej RL elementów liniowych:

$$i_{RL}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{30}$$

gdzie $\tau=\frac{L}{R}$.

Prąd i_{RL} w przedziale czasu $0 < t < \infty$ narasta od wartości zero (tak jak prąd i z wzoru (28)) do wartości $i_{RL}(\infty) = \frac{E}{R}$. Dla $t = \infty$ prąd ograniczony jest przez wartość rezystancji liniowej (wzór (30)) lub przez nachylenie charakterystyki zewnętrznej rezystancji nieliniowej (wzór (28)).

5. PODSUMOWANIE

W artykule udowadnia się, że w wybranym punkcie pracy układu nieliniowego R_N L_N określa się niezerowe otoczenie Δ punktu czasu t_0, w pobliżu którego istnieje jednoznaczne rozwiązanie przebiegu prądu i napięcia takiego układu. Poprzez sklejanie takich rozwiązań można uzyskać rozwiązanie dla ograniczonego przedziału czasu.

LITERATURA

1. Gutowski R.:Równania różniczkowe zwyczajne. WNT, Warszawa 1971.
2. Maurin K.: Analiza, cz.I. PWN, Warszawa 1971.
3. Pelczer A., Szarski J.: Wstęp do teorii równań różniczkowych. cz.I, PWN, Warszawa 1987.

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 maja 1999 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Janusz Walczak
Profesor Politechniki Śląskiej

Abstract

In this paper there is proved a possible solution of the panage of current and voltage of the electric two-terminal network, which consists of a serial or parallel connection of a nonlinear resistor and a nonlinear inductor. The suggested method of the solution of electric circuits is based on Cauchy and Kowalska theorem. The solution of the current i(t) is derived for a serial connection of the nonlinear resister R_N and nonlinear coil L_N at the voltage input, whereas the solution of the voltage u(t) is derived for a parallel connection of the nonlinear resistor R_N andf linear coil L at the current input. In a selected case after, introducing certain simplifications we obtain a solution of the current i(t) of the serial circuit R_N L_N for the input voltage step function. The solution has been obtained by the integration of the differential equation.