

Ryszard ROHATYŃSKI

Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn  
Politechnika Wrocławska

### UŚCISLENIĘ OBLICZANIA PROFILU ZA POMOCĄ KRZYWEJ NOŚNEJ PUNKTÓW OSOBLIWYCH

**Streszczenie:** Przy projektowaniu profili lotniczych i łopatek maszyn przepływowych często wykorzystuje się tzw. krzywą nośną punktów osobliwych. W pracy podano wyprowadzenie nowych zależności wiążących prędkości na krzywej nośnej z grubością profilu i z prędkością na jego konturze. Zależności te są ogólniejsze i dokładniejsze od podawanych w literaturze.

#### Oznaczenia

$l$	-	współrzędna krzywoliniowa (długości linii $L$ )
$n$	-	współrzędna prostoliniowa prostopadła do $L$
$s$	-	współrzędna krzywoliniowa (długości linii $S$ )
$w$	-	prędkość
$L$	-	krzywa podstawowa (krzywa nośna punktów osobliwych)
$S$	-	kontur profilu
$f$	-	wir związany z krzywą $L$
$g$	-	źródło związane z krzywą $L$
$\Gamma$	-	cyrkulacja
$Q$	-	objętościowe natężenie przepływu

#### Indeksy

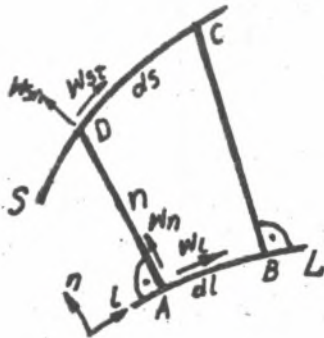
$l$	-	styczny do $L$
$n$	-	normalny do $L$ lub $S$
$t$	-	styczny do $S$
$S$	-	na krzywej $S$

#### 1. Wstęp

Przy projektowaniu profili lotniczych i łopatek maszyn przepływowych często wykorzystuje się tzw. krzywą nośną punktów osobliwych, na której rozmieszcza się wiry i źródła o odpowiednio dobranej intensywności. Po obliczeniu prędkości na krzywej nośnej oblicza się współrzędne konturu profilu i prędkości opływu konturu; możliwe jest również postępowanie odwrotne. Metoda obliczeń opiera się na złożeniu przepływu niezakłóconego, jednorodnego w nieskończoności, z przepływem indukowanym przez źródła i wiry związane z krzywą nośną. Kontur profilu jest zamkniętą linią prądu, która eddziela pole prądu na zewnątrz profilu od przepływu wewnętrznego. Charakterystyczne dla tego ujęcia jest, że przepływ istnieje również wewnątrz profilu, a na konturze nie występuje nieciągłość pola prędkości. W ogólnym przypadku przepływ wewnątrz konturu może być wirowy i źródłowy;

w ten sposób modeluje się wpływ zmienny promienia i szerokości wirnika częściowego [1,2].

Zakres zastosowanie podawanych w literaturze równań wyrażających grubość łopatki i prędkość na jej konturze przez prędkości na krzywej nośnej punktów esobliwych jest ograniczony, ponieważ opierają się one na dość ostrych założeniach. W celu wyprowadzenia ogólniejszych zależności, ważnych dla dowolnego dwuwymiarowego przepływu cieczy doskonałej, zosta-



Rys.1. Elementarny wycinek profilu

nie rozważony przepływ między dwiema krzywymi "L" i "S" (rys.1). Dla ogólności rozważań przyjmuje się, że nie muszą one być liniami prądu. Prędkości na krzywej "L" są znane, prędkości na "S" należy wyznaczyć. Prosta "n" są prostopadłe do krzywej "L". W ten sposób otrzymuje się zależności, które, po odpowiednich przekształceniach, przechodzą w równania określające współrzędną konturu profilu  $n_D$  i prędkość jego opływu  $w_{St}$ .

## 2. Równanie cyrkulacji

Cyrkulacja po obwodzie czworokąta ABCD jest równa:

$$d\Gamma = w_L \cdot dl - w_{St} \cdot ds - \int_0^{n_D} w_n(l_A, n) dn + \int_0^{n_C} w_n(l_B, n) dn \quad (1)$$

Rozkładając prędkości  $w_n$  w szereg Taylora i pomijając nieliniowe wyrazy szeregu, otrzymuje się:

$$d\Gamma = w_L dl - w_{St} ds + \left\{ n_D \left[ \frac{\partial w_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial n^2} n_D + \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{dn}{dt} \right] + w_n \frac{dn}{dt} \right\} dl \quad (2)$$

Na podstawie twierdzenia Stokesa można wyrazić cyrkulację  $d\Gamma$  przez rotację wewnątrz elementu ABCD:

$$d\Gamma = dl \int_0^{n_D} \text{rot} w dn = dl \int_0^{n_D} \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} - \frac{\partial w_L}{\partial n} \right) dn \quad (3)$$

Biorąc pierwsze dwa wyrazy szeregu Taylora dla pochodnych cząstkowych w równaniu (3) otrzymuje się:

$$d\Gamma = n_D \left[ \frac{\partial w_n}{\partial t} - \frac{\partial w_L}{\partial n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 w_L}{\partial n^2} \right) n_D \right] dl \quad (4)$$

Podstawiając w równaniu (2)  $d\Gamma$  z równania (4) otrzymuje się, po uporządkowaniu:

$$w_{St} = \left( w_L + n_D \frac{\partial w_L}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} + \frac{1}{2} n_D^2 \frac{\partial^2 w_L}{\partial n^2} \frac{dl}{ds} + \left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds} \quad (5)$$

Jeżeli wyraz z  $n^2$  można pominąć, to:

$$w_{St} = \left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} + \left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds} \quad (6)$$

Równanie (6) wyraża składową styczną prędkości  $w_S$  na krzywej "S" za pomocą pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia prędkości  $w_l$  i  $w_n$  w szereg Taylora. Równanie jest ważne dla dowolnego przepływu cieczy doskonałej między krzywymi "L" i "S", a więc także dla przepływu wirowego i źródłowego. Dla bezwirowego ruchu cieczy  $\frac{\partial w_l}{\partial l} = \frac{\partial w_l}{\partial n}$ . Jeśli przepływ jest solenoidalny (bezwirowy), to  $\frac{\partial w_n}{\partial n} = -\frac{\partial w_l}{\partial l}$ . Jeżeli krzywa "L" jest linią prądu, to  $w_n = 0$  i  $\frac{\partial w_n}{\partial l} = 0$ . Równania określające prędkość styczną do krzywej "S" w odpowiednich przypadkach ruchu cieczy zestawiono w tabeli 1. Zauważmy, że z równań tych nie wynika brak normalnej składowej  $w_{Sn}$  prędkości  $w_S$  na krzywej "S". Dla sprawdzenia, czy "S" jest linią prądu, należy wykorzystać równanie ciągłości.

Tabela 1. Równania określające prędkość styczną  $w_{St}$  na konturze "S" dla różnych rodzajów przepływu

Rodzaj przepływu	Krzywa "L" nie jest linią prądu; $w_{St} =$	Krzywa "L" jest linią prądu; $w_{St} =$
Dowolny	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} + \left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{dn}{ds}$
Bezwirowy	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial l} \right) \frac{dl}{ds} + \left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$	$w_l \frac{dl}{ds} + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{dn}{ds}$
Solenoidalny	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} + \left( w_n - n_D \frac{\partial w_l}{\partial l} \right) \frac{dn}{ds}$	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_l}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} - n_D \frac{\partial w_l}{\partial l} \frac{dn}{ds}$
Bezwirowy i solenoidalny	$\left( w_l + n_D \frac{\partial w_n}{\partial l} \right) \frac{dl}{ds} + \left( w_n - n_D \frac{\partial w_l}{\partial l} \right) \frac{dn}{ds}$	$w_l \frac{dl}{ds} - n_D \frac{\partial w_l}{\partial l} \frac{dn}{ds}$

### 3. Równanie ciągłości

Przyjmując dodatni znak natężenia przepływu dla cieczy wypływającej z elementu ABCD, otrzymuje się, zakładając jednostkową grubość elementu:

$$dQ = w_{Sn} ds - w_n dl - \int_0^{n_D} w_l(l_A, n) dn + \int_0^{n_D} w_l(l_B, n) dn \quad (7)$$

Po rozłożeniu prędkości  $w_l$  w szereg Taylora i pozostawieniu tylko dwóch pierwszych wyrazów szeregu, otrzymuje się:

$$dQ = w_{Sn} ds - w_n dl - \left[ n_D \left( \frac{\partial w_l}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_l}{\partial n^2} n_D + \frac{\partial w_l}{\partial n} \frac{dn}{dl} \right) + w_l \frac{dn}{dl} \right] dl \quad (8)$$

Ilość cieczy  $dQ$  generowana wewnątrz elementu ABCD o jednostkowej grubości i wynosi:

$$dQ = dl \int_0^{n_D} dv W dn = dl \int_0^{n_D} \left( \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) dn \quad (9)$$

Biorąc pierwsze dwa wyrazy szeregu Taylora dla pochodnych cząstkowych w równaniu (9) otrzymuje się:

$$dQ = n_D \left[ \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] n_D \quad (10)$$

Podstawiając w równaniu (8)  $dQ$  z równania (10) otrzymuje się, po uporządkowaniu:

$$w_{Sn} = \left( w_n + \frac{\partial w_n}{\partial n} n_D \right) \frac{dl}{ds} + \frac{1}{2} n_D^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial n^2} \frac{dl}{ds} - \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds} \quad (11)$$

Jeżeli wyraz  $\frac{n_D^2}{2}$  można pominać, to:

$$w_{Sn} = \left( w_n + \frac{\partial w_n}{\partial n} n_D \right) \frac{dl}{ds} - \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds} \quad (12)$$

Równanie (12) wyraża składową normalną do krzywej "S" prędkości  $w_S$  za pomocą dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia prędkości  $w_L$  i  $w_n$  w szereg Taylora. Równanie jest ważne dla dowolnego przepływu cieczy doskonałej między krzywymi "L" i "S", a więc również dla przepływu wirowego i źródłowego. Analogicznie, jak to zrobiono w rozdziale 2 dla prędkości  $w_{St}$ , można sporządzić zestawienie różnych postaci równań określających prędkość  $w_{Sn}$  (tabela 2).

Tabela 2. Równania określające prędkość normalną  $w_{Sn}$  do konturu "S" dla różnych rodzajów przepływu

Rodzaj przepływu	Krzywa "L" nie jest linią prądu; $w_{Sn} =$	Krzywa "L" jest linią prądu; $w_{Sn} =$
Dowolny	$\left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$	$n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$
Bezwirowy	$\left( w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \right) \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \right) \frac{dn}{ds}$	$n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{dl}{ds} - w_t \frac{dn}{ds}$
Solenoidalny	$\left( w_n - n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \right) \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$	$- n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \right) \frac{dn}{ds}$
Bezwirowy i solenoidalny	$\left( w_n - n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \right) \frac{dl}{ds} +$ $- \left( w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \right) \frac{dn}{ds}$	$- n_D \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{dl}{ds} - w_t \frac{dn}{ds}$

#### 4. Interpretacja równania ciągłości i równania cyrkulacji dla profilu lotniczego

W dotychczasowych rozważaniach nie sformułowano żadnych szczególnych interpretacji krzywych "L" i "S". Podano tylko sposób obliczania prędkości na krzywej "S", niezbyt oddalonej od krzywej "L", jeśli rozkład prędkości na krzywej "L" jest znany.

Niech "S" będzie konturem profilu. Wtedy  $w_{Sn} = 0$  i z równania (12) wynika:

$$(w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n}) \frac{dl}{ds} = (w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n}) \frac{dn}{ds} \quad (13)$$

Biorąc pod uwagę równanie (6), można napisać:

$$w_{st} \frac{dn}{ds} = w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n} \quad (14)$$

$$w_{st} \frac{dl}{ds} = w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n} \quad (15)$$

Biorąc pod uwagę, że prawe strony równań (14) i (15) są składowymi prędkościami na konturze w kierunkach osi współrzędnych (l, n), równania te reprezentują zależności kinematyczne między prędkościami na linii prądu.

Równanie ciągłości przepływu umożliwia obliczenie współrzędnych konturu, jeśli dane są prędkości i ich pochodne na krzywej "L".

Na podstawie równania (13) można napisać:

$$\int_0^{l_A} (w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n}) dl - \int_0^{n_D} (w_t + n_D \frac{\partial w_t}{\partial n}) dn = 0 \quad (16)$$

albo

$$n_D (w_t + \frac{1}{2} n_D \frac{\partial w_t}{\partial n}) = \int_0^{l_A} (w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n}) dl \quad (17)$$

Wprowadzając do równania (17)  $\text{rot} W$  i  $\text{div} W$  otrzymuje się:

$$[w_t + \frac{1}{2} n_D (\frac{\partial w_t}{\partial l} - \text{rot} W)] n_D = \int_0^{l_A} n_D (\text{div} W - \frac{\partial w_t}{\partial l}) dl + \int_0^{n_D} w_n dl \quad (18)$$

Jeżeli "L" jest linią źródłową, to  $w_n = 1/2 \cdot q(l)$ , a zatem:

$$n_D [w_t + \frac{1}{2} n_D (\frac{1}{2} \frac{dq(l)}{dl} - \text{rot} W)] = \int_0^{l_A} n_D (\text{div} W - \frac{\partial w_t}{\partial l}) dl + \frac{1}{2} \int_0^{l_A} q dl \quad (19)$$

W teorii profilu lotniczego [3,4] krzywa "L" jest także miejscem geometrycznym wirów związanych o intensywności  $q(l)$  i dlatego nazywa się ją krzywą nośną punktów osobliwych. Prędkość  $w_t$  na tej krzywej jest sumą przyczynków od prędkości przepływu niezakłóconego, prędkości indukowanych przez osobliwości związane z krzywą nośną oraz od rotacji i dywergencji pola prędkości w obszarze profilu.

W teorii maszyn przepływowych wykazuje się, że wirowość pola prędkości względnej na osiowo-symetrycznej powierzchni prądu w wirniku maszyny jest jednoznacznie określona przez kształt powierzchni prądu i prędkość kątową wirnika, natomiast zmienna szerokość wirnika częściowego jednoznacznie wyznacza źródłowość w przepływie ozywnika nieściśliwego [1,2,5]. Zatem, jeśli uśrednione okresowo symetryczne pole prędkości w wirniku jest znane, to równania (18) i (19) oferują możliwość wyznaczenia współrzędnej  $n_D$  konturu profilu dla każdej współrzędnej krzywoliniowej  $l_A$ . Szczególnie, prostsze przypadki równania (18) wynikają z tabeli 2. Zauważmy, że jeśli udałoby się uzyskać relacje:

$$\frac{dq(l)}{dl} = 2 \text{rot} W \quad \text{oraz} \quad \text{div} W = \frac{\partial w_t}{\partial l} \quad (20)$$

to kontur profilu wyznacza się prostą zależnością:

$$n_D = \frac{1}{2 w_t} \int_0^{l_A} q dl \quad (21)$$

Obliczenie prędkości  $w_{st}$  na konturze profilu jest łatwiejsze, jakkolwiek i tu można zadanie uprościć.

Wprowadzając do równania (6) rot $W$  i div $W$ , otrzymuje się:

$$w_{St} = [w_l + n_D \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} - \text{rot} w \right)] \frac{dl}{ds} + [w_n + n_D \left( \text{div} w - \frac{\partial w_l}{\partial t} \right)] \frac{dn}{ds} \quad (22)$$

Jeśli linia "L" jest linią źródłową, to  $w_n = 1/2 \cdot q(l)$ , a więc:

$$w_{St} = [w_l + n_D \left( \frac{1}{2} \frac{dq(l)}{dt} - \text{rot} w \right)] \frac{dl}{ds} + \left[ \frac{1}{2} q(l) + n_D \left( \text{div} w - \frac{\partial w_l}{\partial t} \right) \right] \frac{dn}{ds} \quad (23)$$

Jeżeli relacje (20) byłyby spełnione, to zależność (23) znacznie się uprości:

$$w_{St} = w_l \frac{dl}{ds} + \frac{1}{2} q(l) \frac{dn}{ds} \quad (24)$$

Jeśli na krzywej "L" rozmieszczona jest liniowa wirowość  $\Gamma(l)$ , a źródłowość  $q(l) = 0$ , to "L" jest linią prądu i równanie (6) także się upraszcza, przyjmując szczególnie prostą postać dla przepływu bezwirowego (tabela 1).

Równania (6), (22) i ich pochodne postacie mogą być uważane za uogólnienie podanej przez F. Riegelsa zależności:

$$w_{St} = w_l \cdot \kappa = w_l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dn/dl)^2}} = w_l \frac{dl}{ds} \quad (25)$$

gdzie  $\kappa$  jest tzw. współczynnikiem Riegelsa (der Riegelsfaktor) [6].

Ponieważ  $\kappa \rightarrow 0$ , gdy  $dn/dl \rightarrow \infty$ , to współczynnik Riegelsa jest wygodnym sposobem obliczania prędkości  $w_{St}$  na konturze (która zawsze powinna być skończona), za pomocą prędkości  $w_l$  na linii nośnej punktów osobliwych (która to prędkość może być nieskończona na początku linii nośnej) [7].

Z porównania równań (6) i (25) wynika jednak, że zależność podana przez Riegelsa jest niedokładna. Może ona być traktowana jako szczególny przypadek równania (6), który zachodzi, gdy:

$$\frac{n_D}{w_l} \frac{\partial w_l}{\partial n} \ll 1 \quad \text{i} \quad (w_n + n_D \frac{\partial w_n}{\partial n}) \frac{dn}{ds} \ll w_l \frac{dl}{ds} \quad (26)$$

Równanie (6) spełnia tę samą rolę, co współczynnik Riegelsa, ale jest dokładniejsze.

Zależności wyprowadzone w rozdziałach 2 i 3. powstały przez pominięcie wyrazów zawierających  $n_D^2$ , ale uwzględniają wpływ grubości profilu. Dla bardzo cienkich profili wyrazy z  $n_D$  można opuścić, co utożsamia wzory z ostatniej kolumny tabeli 1 z formułą Riegelsa. Dla profili o dużej grubości można stosować wzory (5) i (12).

## 5. Podsumowanie

Zagadnienie obliczania prędkości cieczy na konturze profilu i współrzędnych konturu za pomocą krzywej nośnej punktów osobliwych przedstawiono jako szczególny przypadek zagadnienia wyznaczania prędkości na pewnej krzywej "S" na podstawie znanego rozkładu prędkości na innej krzywej "L" niezbyt oddalonej od "S". Zastosowanie twierdzenia Stokesa i równania ciągłości do elementarnych pasków między krzywymi prowadzi do równań różniczkowych, które mogą być wykorzystane do obliczania grubości profilu płata lotniczego lub łopatki maszyny przepływowej oraz do określenia prędkości opływu konturu płata lub łopatki. Równania te, wyprowadzone dla całkiem ogólnych rodzajów przepływów, przyjmują różne postacie szczególne, zestawione w tabelach 1 i 2. Przedstawione w pracy zależności są ogólnie

niejsze i bardziej dokładne od podawanych w literaturze. W szczególności równanie (6), które może być uważane za uogólnienie znanej zależności Riegelsa, umożliwia zwiększenie dokładności obliczenia prędkości opływu konturu, zwłaszcza dla profili o większej grubości względnej. Podobnie równanie (13), wynikające z zasady ciągłości, jest podstawą całkowo-różniczkowych zależności (17) - (19), które umożliwiają wyznaczenie rzędnych konturu profilu z większą dokładnością niż wzory stosowane dotychczas [2, 3].

#### Literatura

- [1] Wiktorow, G.W.: Gidrodinamiczeskaja teoria reszetok. Wysszaja Szkoła, Moskwa 1969.
- [2] Czibere, T.: Über die Berechnung der Schaufelprofile von Strömungsmaschinen mit Halbaxialer Durchströmung. Acta Techn. Hung. 44, 1963.
- [3] Schlichting, H. Truckenbrodt, E.: Aerodynamics of the Airplane. Mc Graw-Hill, 1979.
- [4] Thwaites, B.: Incompressible Aerodynamics. Oxford 1960.
- [5] Scholz, N.: Aerodynamik der Schaufelgitter. G. Braun, Karlsruhe 1965.
- [6] Riegels, F.: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing. Archiv 16, s. 373-376, 1948 i 17 s. 99-106, 1949.
- [7] Weber, J.: The calculation of the pressure distribution over the surface of two-dimensional and swept wings with symmetrical aerofoil sections. ARC R & M 2918, London, 1953.

#### УЛУЧШЕНИЕ РАСЧЁТА ПРОФИЛЕЙ КРЫЛЬЯ МЕТОДОМ РАСПОЛОЖЕННЫХ НА СКЕЛЕТЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

#### Резюме

Расположение особенностей на скелете профиля часто используется основой проектирования крылья или лопастей турбомашин. В статье на основе общих зависимостей между скоростью на скелетной линии, толщиной профиля и скоростью на его контуре выведено новые формулы. По сравнению с описанными в литературе новые формулы имеют ряд преимуществ, состоящих в том, что вид формулы более общий а результаты точнее.

IMPROVEMENT OF AEROFOILS CALCULATION BY MEANS  
OF THE SINGULARITY CARRIER CURVE (SYNOPSIS)

S u m m a r y

The singularity carrier curve has been frequently used in designing of aerofoils and blades of turbomachinery. In the paper some new relations has been derived which relate velocitise on the carrier curve with thickness of the aerofoil and with velocity on its perimeter. The relations are more general and more exact than those published heretofore.