

Gerard KOSMAN  
Andrzej MISIEWICZ  
Andrzej RUSIN

Institut Maszyn i Urzędzeń Energetycznych  
Politechniki Śląskiej

Krzysztof GRAJEK

OBR Urzędzeń Mechanicznych - Gliwice

ANALIZA NAPRĘŻEŃ W ŁOPATCE WENTYLATORA OSIOWEGO,  
KONFRONTACJA MODELU POWŁOKOWEGO I PRĘTOWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń wytrzymałościowych łopatkki wentylatora osiowego. Porównano dwa modele wytrzymałościowe łopatkki, model powłokowy i prętowy. W pierwszym przypadku obliczenia wykonano metodą elementów skończonych, wykorzystując do tego celu system obliczeniowy PAMES [1]. W drugim przypadku zastosowano elementarną teorię prętów zwiniętych. Korzystano z algorytmów opracowanych w [2].

1. Wstęp

Łopatkki wentylatorów osiowych wykonuje się jako zbieżne i zwinięte. Zbieżność wynika ze zmiany przekroju wzdłuż długości łopatkki, zwinięcie związane jest ze zmianą kątów łopatkowych. Pod względem wytrzymałościowym łopatkę należy traktować jako ciało sprężyste lub sprężysto-plastyczne obciążone siłami zewnętrznymi zmiennymi w trakcie odkształcenia łopatkki.

Powyższy model trójwymiarowy może ulec uproszczeniu wykorzystując fakt, że grubość profilu w stosunku do długości łopatkki i jej cięciwy jest wielokrotnie mniejsza. Prowadzi to do modelu powłokowego. Najlepsze rezultaty uzyskano tutaj stosując metodę elementów skończonych [3, 4].

Model dwuwymiarowy ulega uproszczeniu, jeżeli przyjęć założenie o nieodkształcalności konturu profilu, pozostawiając mu jedynie możliwość deplancji. Spowoduje to, że model łopatkki będzie modelem jednowymiarowym, czyli prętowym.

W niniejszym opracowaniu porównano model dwuwymiarowy (powłokowy) oraz model jednowymiarowy (prętowy). W obu przypadkach wyznaczono naprężenia i odkształcenia wywołane w łopatkce siłami odśrodkowymi własnych mas oraz siłami aerodynamicznymi przepływającego czynnika. Dla określenia obciążeń aerodynamicznych musimy znać rozkład ciśnienia na powierzchni łopatkki. Rozkład ciśnienia wyznaczono w wybranych przekrojach łopatkki metodą funkcji prądu.

## 2. Cechy konstrukcyjne łopatek

Analizujemy łopatkę wirnikową wentylatora osiowego dla następujących danych:

- liczba obrotów  $n = 980 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$ ,
- średnica zewnętrzna  $D_2 = 3,35 \text{ m}$ ,
- średnica wewnętrzna  $D_1 = 2 \text{ m}$ ,
- długość łopatki  $l = 0,675 \text{ m}$ ,
- liczba łopatek  $z = 22$ .

Część profilowa łopatki jest zwinięta i zbieżna. Geometryczny model łopatki przyjęty do dalszych rozważań przedstawiono na rys. 1. Łopatkę wentylatorów osiowych wykonuje się głównie ze stopów lekkich, których głównym składnikiem jest aluminium. W związku z tym przyjęto, że łopatkę jest wykonana ze stopu aluminium o następujących własnościach:

- gęstość  $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ ,
- granica plastyczności  $R_e = 200 \text{ MPa}$ ,
- granica wytrzymałości  $R_m = 240-280 \text{ MPa}$ .

## 3. Wyznaczenie rozkładu ciśnienia na powierzchni łopatki metoda funkcji prądu

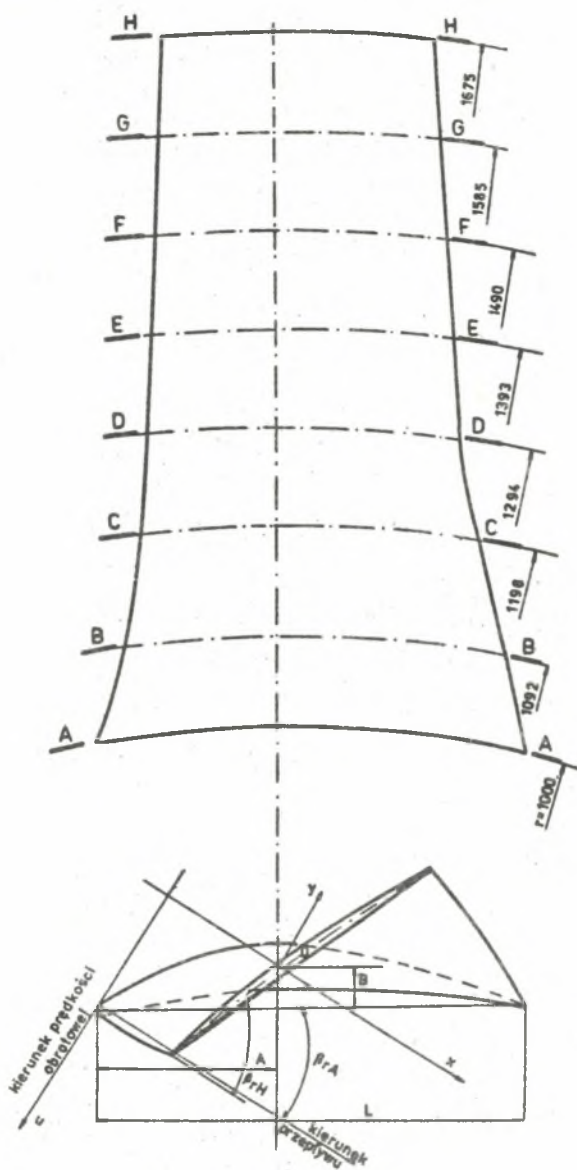
Z analizy stanu obciążenia łopatki wynika, że dla określenia sił aerodynamicznych, wywoływanych przepływającym czynnikiem należy wyznaczyć rozkład ciśnienia na powierzchni łopatki w wybranych przekrojach. Rozkład ten uzyskuje się w rezultacie rozwiązania opływu palisady profili.

W pracy [5] dokonano porównania trzech metod (metody odwzorowań konforemnych, metody funkcji prądu zrealizowanej na bazie siatki prostokątnej i krzywoliniowej) stosowanych w Zakładzie Ciepłych Maszyn Wirnikowych Instytutu Maszyn i Urządzeń Energetycznych do rozwiązywania opływu palisady profili.

W niniejszej pracy do wyznaczenia rozkładu ciśnienia na powierzchni badanej łopatki wykorzystano metodę funkcji prądu na bazie siatki prostokątnej [6, 7].

Rozpatrując bezźródłowy przepływ płynu w strudze o zmiennej grubości  $b = b(m)$  w układzie współrzędnych  $(\varphi, m)$  określonych na powierzchni obrotowej, gdzie  $\varphi$  - współrzędna obwodowa,  $m$  - współrzędna wzdłuż merydionalnej linii prądu, można zdefiniować funkcję prądu  $\psi = \psi(m, \varphi)$  następującymi związkami:

$$\frac{\partial \psi}{\partial m} = b \rho w_u \quad (1)$$



Rys. 1. Łopatkę wentylatora osiowego

$$\frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} = -b \rho w_m \quad (2)$$

Uwzględniając powyższe zależności w dalszych przekształceniach dwóch podstawowych równań opisujących opływ palisady profili, a mianowicie równanie ciągłości

$$\frac{\partial (b \rho w_u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (b \rho w_m)}{\partial m} = 0 \quad (3)$$

oraz warunku bezwirowego przepływu bezwzględnego

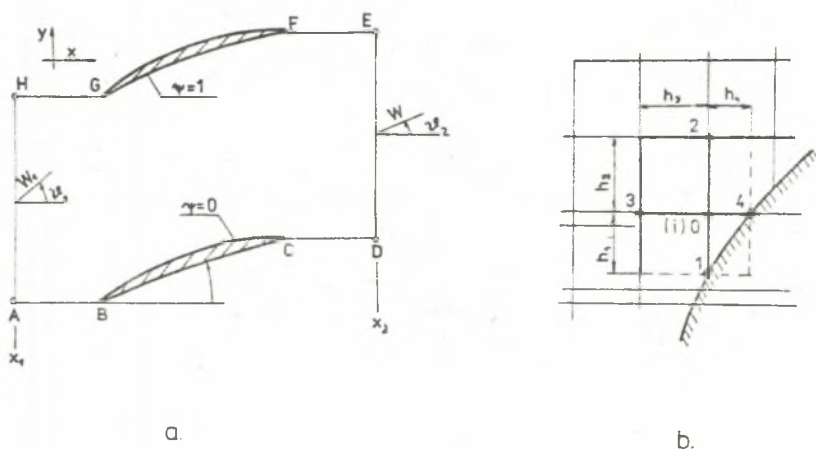
$$\frac{\partial (w_u + u)}{\partial m} = \frac{\partial w_m}{r \partial \varphi} \quad (4)$$

uzyskuje się ostatecznie równanie

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \ln r}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \ln r}{\partial m} - \frac{\partial \ln b \rho}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b \rho w_m \sin \alpha \quad (5)$$

Dla przepływów poddźwiękowych równanie to jest typu eliptycznego. Występująca tu nieliniowość zagadnienia uwarunkowana jest ściśliwością płynu.

Zagadnienie opływu palisady profili rozwiązuje się w wyszczególnionym obszarze palisady (wyznaczonym przez punkty A-B-C-D-E-F-G-H) (rys. 2e).



Rys. 2

a. Obszar analizy przepływu. b. Gwiazda węzłów obliczeniowych siatki prostokątnej

Rozwiązanie przedstawionego wyżej zagadnienie analizy przepływu przez palisadę profili na drodze obliczeń numerycznych stanowi temat szeregu prac Katsanisa. Między innymi w pracy [6] został podany program obliczeń w języku FORTRAN wraz z opisem. Program ten został zaadaptowany i przystosowany do realizacji na maszynie ODRA-1305. W procedurze obliczeniowej wykorzystano metodę różnic skończonych [7].

Zastosowana prostokątna siatka obliczeniowa pozwoliła stworzyć prosty algorytm obliczeniowy wewnątrz obszaru kanału, natomiast znaczne niedogodności pojawiają się przy rozpatrywaniu węzłów leżących w bezpośrednim sąsiedztwie brzegu profilu (rys. 2b).

W punktach tych niezbędne jest indywidualne wyznaczenie wartości  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ . Stąd też wynika konieczność opisanie profilu funkcją aproksymującą, umożliwiającą określenie położenia punktu na profilu i wartości pochodnych. W programie obliczeniowym jako funkcję interpolacyjną obrano funkcję sklejaną, tzw. "cu'ic spline fit".

Na podstawie charakterystyk modelowych badanego wentylatora do obliczeń przyjęto

$$\dot{V} = 500 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\beta_p = 26,5^\circ$$

Za względu na mały przyrost ciśnienia w obliczeniach nie uwzględniono ściśliwości czynnika.

Obliczenia rozkładu ciśnienia przeprowadzono w wybranych przekrojach (rys. 1). Uzyskane rezultaty przedstawiono na rys. 3 do 6.

#### 4. Zastosowanie modelu prętowego do analizy naprężeń w łopatkę

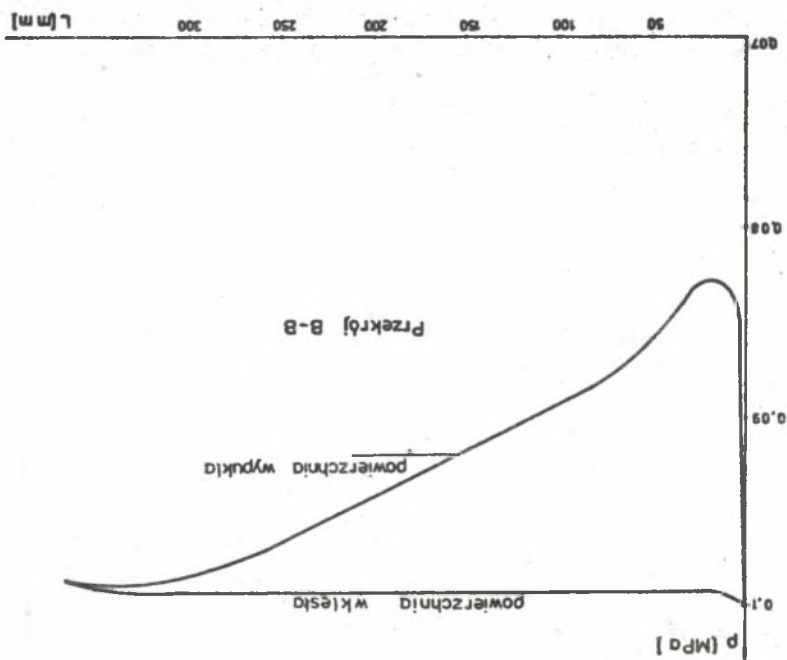
Pręt modeluje łopatkę przy szeregu założeniach upraszczających, jednakże powinien on uwzględniać dwie podstawowe cechy charakterystyczne łopatek [3]:

- duże zmiany kształtu i wymiarów profili wzdłuż długości łopatkę,
- nierównoległe usytuowanie względem siebie głównych centralnych osi bezwładności profili łopatkę, tzn. zwinienie łopatkę.

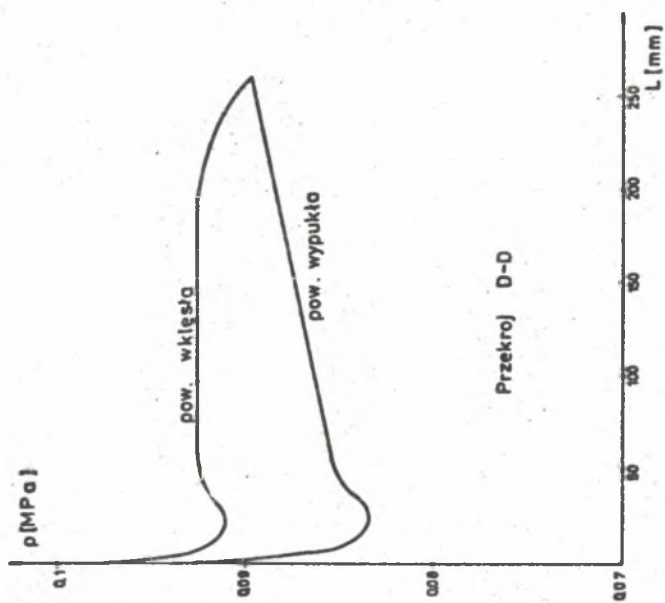
Model prętowy jest powszechnie stosowany w obliczeniach wytrzymałościowych łopatek stopni osiowych. W najprostszym ujęciu pomija się zależność obciążeń zewnętrznych od odkształceń łopatkę. W algorytmach bardziej dokładnych uwzględnia się zmienność sił zewnętrznych w trakcie odkształcenia łopatkę.

W czasie pracy łopatkę jest zginana w dwóch płaszczyznach. Na podstawie hipotezy płaskich przekrojów pełne odkształcenie w kierunku osi łopatkę w dowolnym punkcie przekroju

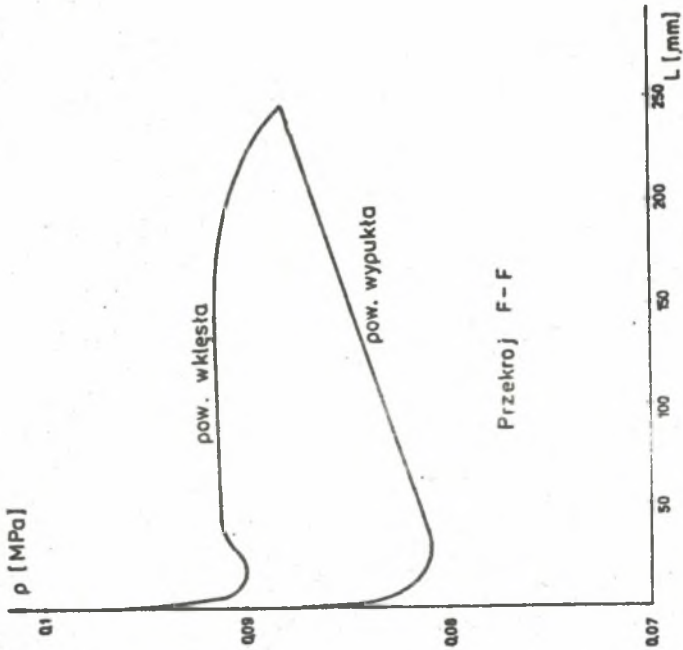
$$\varepsilon(x_0, y_0) = \varepsilon_0 - \alpha_x y_0 + \alpha_y x_0 \quad (6)$$



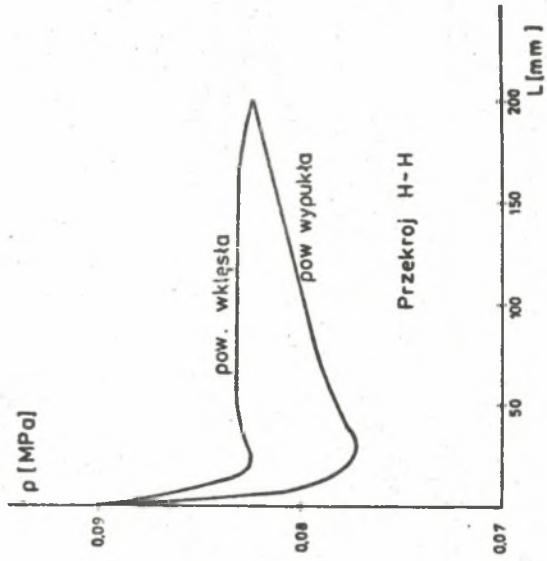
Rys. 3. Rozkład ciśnienia na powierzchni żopetki (przekrój B-B)



Rys. 4. Rozkład ciśnienia na powierzchni żopetki (przekrój D-D)



Rys. 5. Rozkład ciśnienia na powierzchni łopatki (przekrój F-F)



Rys. 6. Rozkład ciśnienia na powierzchni łopatki (przekrój H-H)

gdzie:

$\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y$  - składowe krzywizny osi łopatki,

$x_0, y_0$  - współrzędne punktu względem umownych głównych osi bezwładności.

Przy sprężystych odkształceniach łopatki obowiązuje prawo Hooke'a. Stąd

$$\zeta = E(\epsilon_0 - \mathcal{K}_x y_0 + \mathcal{K}_y x_0) \quad (7)$$

Odkształcenie  $\epsilon_0$  oraz krzywizny  $\mathcal{K}_x$  i  $\mathcal{K}_y$  wyznaczamy z równań równowagi

$$\begin{aligned} \iint_F dF &= P \\ \iint_F \delta y_0 dF &= -M_{x_0} \quad \iint_F x_0 dF = M_{y_0} \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$P$  - siła odśrodkowa,

$$P = \rho \omega^2 \int_{r_w}^r Fr dr \quad (9)$$

$M_{x_0}, M_{y_0}$  - momenty gnące wywołane siłą odśrodkową i obciążeniem powierzchniowym.

Po podstawieniu (7) do (8) i rozwiązaniu otrzymanego układu równań mamy

$$\epsilon_0 = \frac{P}{E}, \quad \mathcal{K}_x = \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}}, \quad \mathcal{K}_y = \frac{M_{y_0}}{I_{y_0}}$$

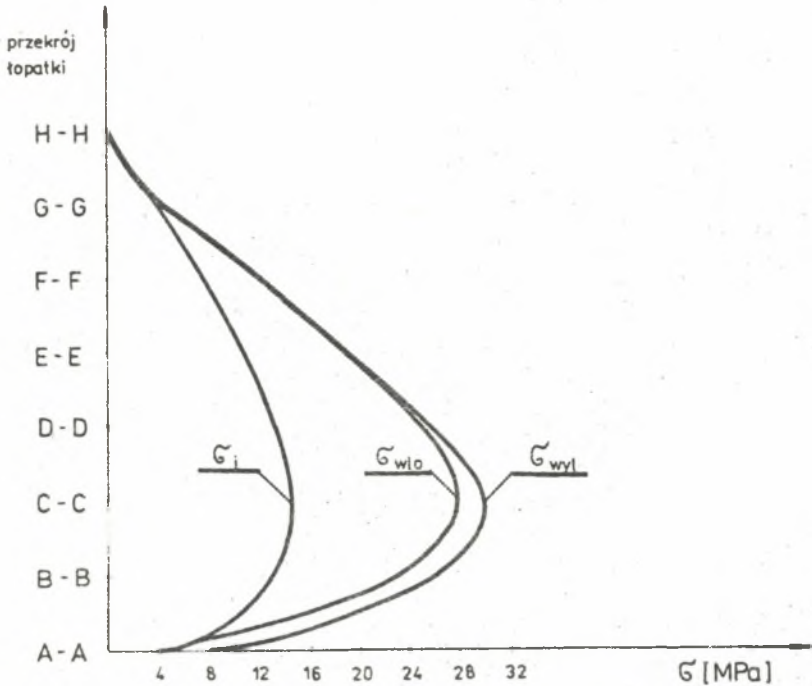
oraz

$$\zeta = \frac{P}{E} + \frac{M_{y_0}}{I_{y_0}} x_0 - \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}} y_0 \quad (10)$$

W zakresie przedstawionego modelu wytrzymałościowego łopatki oraz omówionego stanu obciążenia opracowano zestaw procedur obliczeniowych w języku FORTRAN IV na minikomputer MERA 60, realizujących poszczególne człoony tego modelu.

Punktem wyjście do obliczeń są cechy konstrukcyjne części profilowej łopatki podane w pkt. 2. W pierwszym etapie obliczeń analizuje się rozciąganie łopatki siłami odśrodkowymi. Funkcję  $F(r)$  występującą w zależności (9) określono numerycznie w 8 przekrojach wzdłuż wysokości łopatki (rys. 1).





Rys. 7. Rozkład naprężeń wzdłuż długości łopatki

$\sigma_i$  - naprężenia od siły odśrodkowej.  $\sigma_{włó}$ ,  $\sigma_{wył}$  - naprężenia całkowite na krawędzi wlotowej i wylotowej

Dalsze obliczenia dotyczą wyznaczenia momentów gnących wywołanych siłami odśrodkowymi oraz przepływającym czynnikiem. Momenty te liczone według zależności podanych w [2]. Współrzędne środka ciężkości profilu i pozostałe jego charakterystyki geometryczne (momenty bezwładności, położenie głównych osi bezwładności, główne momenty bezwładności) wyznaczono w oparciu o algorytmy podane w [8].

Etapem końcowym obliczeń jest wyznaczenie naprężeń. Maksymalne naprężenia występują na krawędzi wlotowej i wylotowej łopatki. Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 7.

##### 5. Obliczenie naprężeń i odkształceń za pomocą metody elementów skończonych

Znane w teorii sprężystości twierdzenie o minimum energii potencjalnej głosi, że spośród wszystkich geometrycznie możliwych położów równowagi w rzeczywistości wystąpi to, dla którego całkowita energia potencjalna

$$\Phi = \Phi_E - \Phi_P = \iiint_V \bar{\sigma}_1 dV - \iint_S (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) dS + \\ - \iiint_V (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) dV \quad (11)$$

osiąga minimum.

W zależności (11) stosowano następujące oznaczenia:  $\Phi$  - energia potencjalna odkształceń,  $\Phi_P$  - energia potencjalne sił zewnętrznych,  $V, S$  - objętość i powierzchnia ciała,  $x_1, \bar{x}_1$  - składowe sił masowych i powierzchniowych,  $u_1$  - składowe przemieszczeń.

Znalezienie minimum funkcjonału (11) jest równoznaczne z rozwiązaniem równania przemieszczeniowego wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Rozwiązanie zadania - znalezienie przemieszczeń  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , a następnie odkształceń  $\epsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) wymaga podziału całego obszaru na elementy, wewnątrz których przemieszczenia  $u_1$  będą funkcją przemieszczeń  $q_1$  w węzłach

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [N] \{q\} \quad (12)$$

gdzie:

$[N]$  - macierz funkcji kształtu. Elementy tej macierzy zależą wyłącznie od współrzędnych geometrycznych,

$\{q\}$  - wektor przemieszczeń węzłowych.

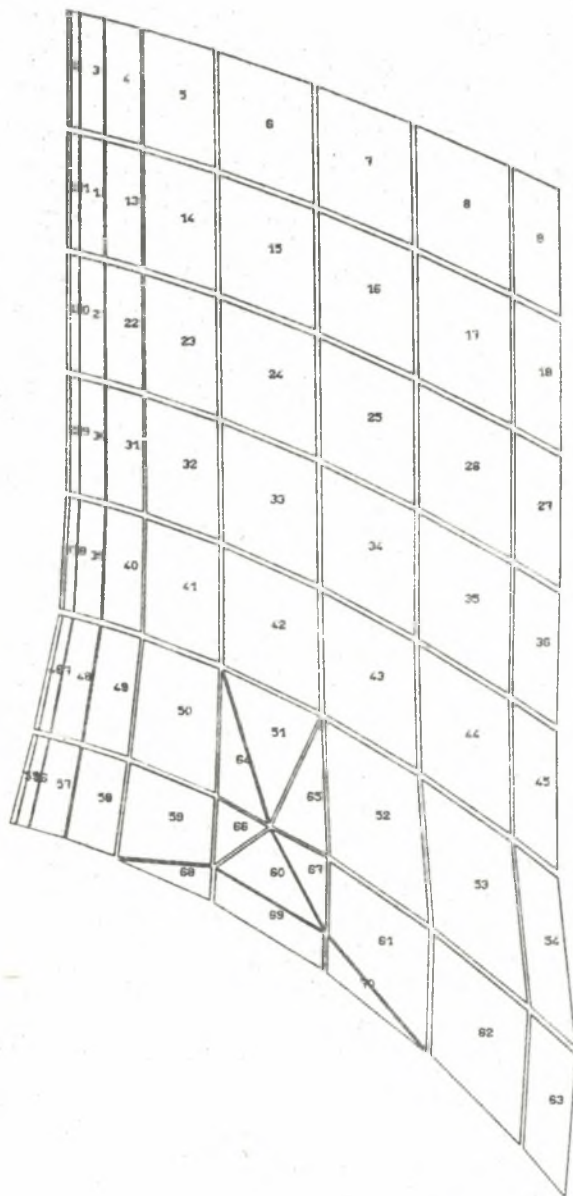
Aby zminimalizować funkcjonał  $\Phi$  względem składowych wektora przemieszczeń węzłowych należy rozwiązać układ równań

$$\frac{d\Phi}{d\{q\}} = 0 \quad (13)$$

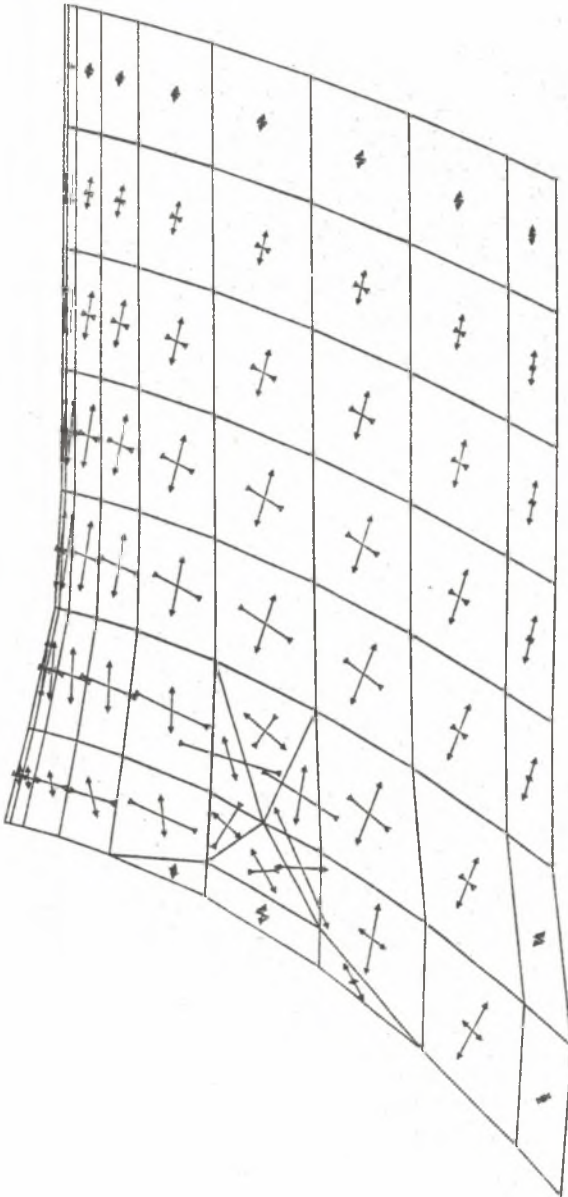
Uzyskujemy w ten sposób wartości przemieszczeń w węzłach a następnie korzystając z (12) w całym elemencie.

W chwili obecnej istnieje szereg systemów komputerowych służących do rozwiązywania zagadnień wytrzymałościowych.

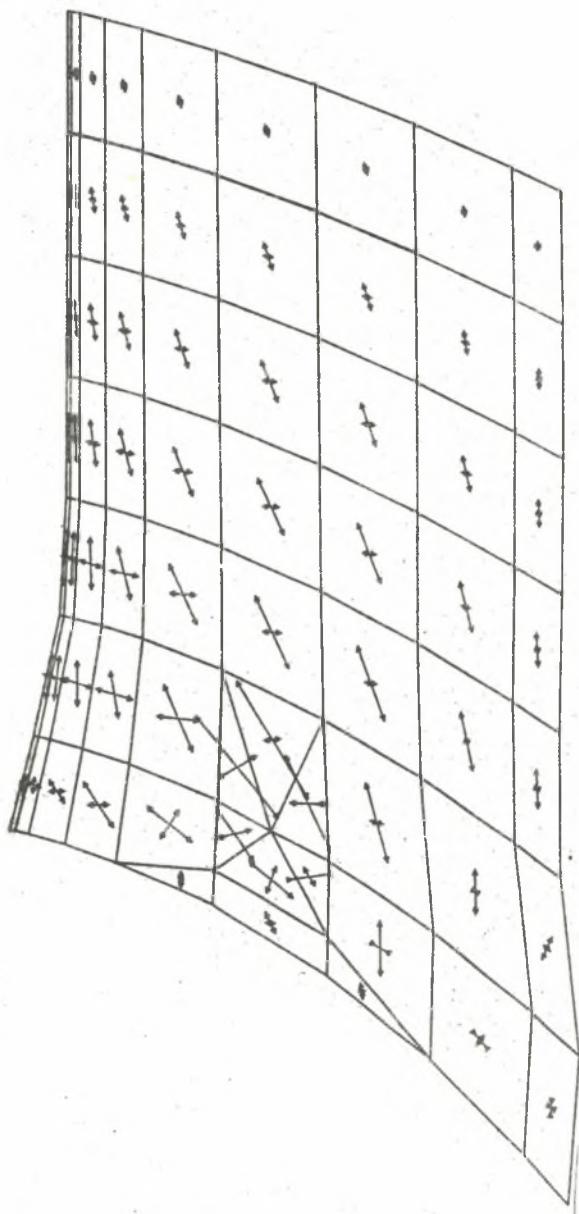
W niniejszej pracy wykorzystano system PAMES [1]. System ten zawiera między innymi programy służące do analizy elementów powłokowych, bazując na elementach czworokątnych lub trójkątnych. System posiada szereg podprogramów kontrolujących poprawność obliczeń. Mimo swej uniwersalności, nie jest on w pełni przystosowany do obliczeń elementu typu łopatkę wentylatora osiowego, ze względu na specyficzny charakter pola obciążeń. A zatem przed przystąpieniem do obliczeń wykonano adaptację programów obliczeniowych poprzez uzupełnienie ich o dodatkowe procedury. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 8 do 13.



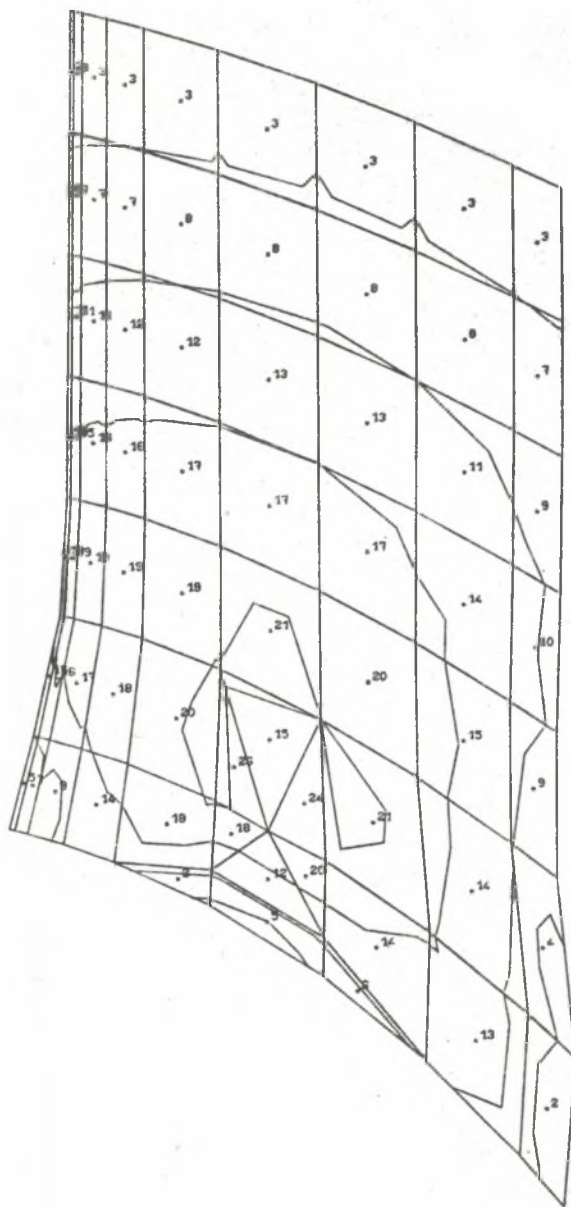
Rys. 8. Podział łopatki na elementy



Rys. 9. Wartości i kierunki główne naprężeń całkowitych na powierzchni wklęsłej żopatki



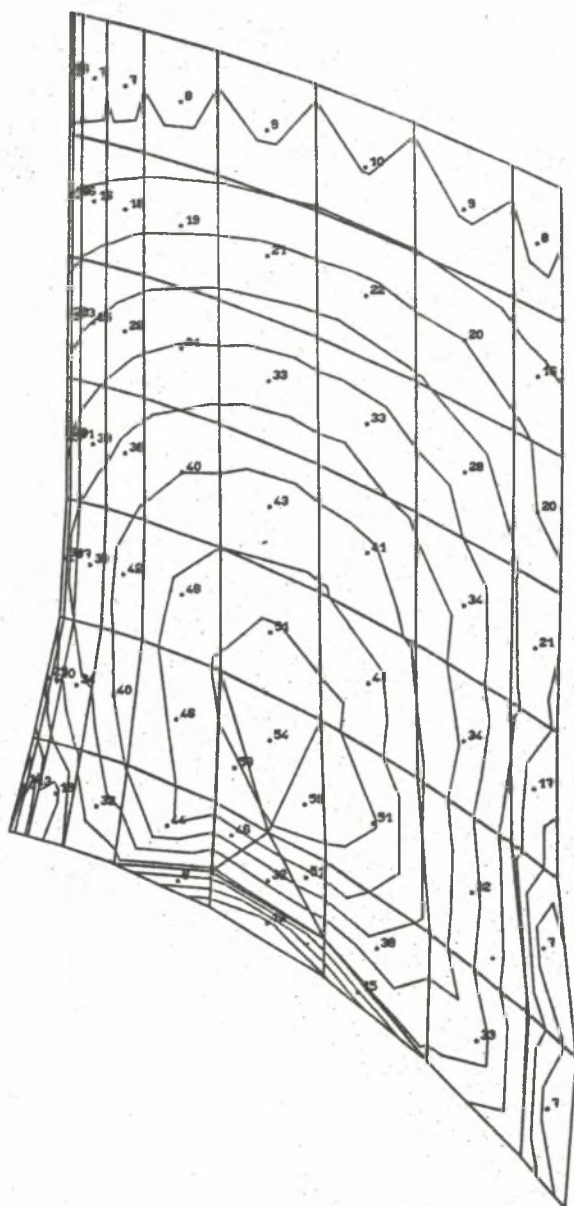
Rys. 10. Wartości i kierunki główne naprężeń całkowitych na powierzchni wypukłej łopatki



Ryc. 11. Linie stałej wartości naprężeń całkowitych na powierzchni wklę-  
ełej żopatki



Rys. 12. Linie stałej wartości naprężeń całkowitych na powierzchni wypukłej łopatki



Rys. 13. Rozkład naprężeń wywołanych siłą odśrodkową (powierzchnia wkleśta)



W trakcie obliczeń łopatkę podzielono na 70 elementów czworokątnych i trójkątnych, uzyskując łącznie 95 węzłów. Podział łopatki na elementy pokazano na rys. 8. Stosowano głównie elementy czworokątne. Elementy trójkątne stosowano w okolicy stopki łopatki (w miejscu przejścia części profilowej w stopkę).

Naprężenie i odkształcenia łopatki liczone dla obciążeń masowych i powierzchniowych. Na rys. 9 do 12 przedstawiono wyniki obliczeń naprężeń całkowitych. Wartości naprężeń i kierunki główne pokazano na rys. 9 i 10. Wyniki te dotyczą powierzchni wklęsłej i wypukłej łopatki (powierzchnie 1 i 2). Na rys. 11 i 12 nakreślono linie stałej wartości naprężeń. Na podstawie tych wykresów łatwo określić miejsca najbardziej obciążone.

Dla porównania na rys. 13 pokazano rozkład naprężeń wywołanych jedynie siłą odśrodkową na powierzchni wklęsłej łopatki (powierzchnia 1).

## 6. Analiza wyników obliczeń

Wyniki obliczeń uzyskane metodą elementów skończonych wskazują, że najbardziej obciążonym fragmentem łopatki jest element 51 i 64 (rys. 8). Naprężenia całkowite są odpowiednio równe:

$$\sigma_{51} = 29,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{64} = 25,7 \text{ MPa}$$

Z uwagi na stosunkowo niską liczbę obrotów stosunek naprężeń wywołanych siłą masową do naprężeń wywołanych siłą aerodynamiczną nie jest duży, np.:

$$\sigma_{51}^p = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{64}^p = 9,6 \text{ MPa}$$

oraz

$$\sigma_{51}^w = 21,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{64}^w = 16,1 \text{ MPa}$$

Podobne wyniki uzyskano metodą uproszczoną dla modelu prętowego. Maksymalne naprężenia wystąpiły pomiędzy elementem 42 i 51 i wynoszą:

$$\sigma_{51-42} = 23,1 \text{ MPa}$$

Uzyskane wyniki obliczeń wskazują, że badana łopatkę nie jest silnie obciążona wytrzymałościowo. Łopatkę została zaprojektowana w ten sposób, że maksymalne naprężenia nie występują w przekroju przy stopce. Na taki wynik obliczeń wpływa przyjęta zmiana przekroju łopatki  $F = F(r)$ .

Warto jeszcze zwrócić uwagę na stosunkowo znaczne zginanie łopatk siłami odśrodkowymi własnych mas. Wynika to z tego, że linia łączące środki ciężkości poprzecznych przekrojów łopatki nie pokrywa się z linią promieniową. Efekt zginania można usunąć przez zmianę konstrukcji łopatki. Za względu na małe wartości naprężeń taka korekta łopatki nie jest jednak potrzebna.

Uzyskane wartości naprężeń są kilkakrotnie mniejsze od granicy plastyczności przyjętego materiału łopatki. Na taki wynik obliczeń ma wpływ niska liczba obrotów wentylatora.

### Literatura

- [1] System obliczeniowy PAMES - zestaw programów służących do analizy wytrzymałościowej elementów powłokowych metodą MES. BUMAR - Gliwice.
- [2] Kosman G.: Termowytrzymałość maszyn przepływowych. Skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1982.
- [3] Walczyk Z.: Modele prętowe w wytrzymałościowych obliczeniach układów łopatkowych maszyn przepływowych. Konferencja naukowo-techniczna, Rzeszów 1979.
- [4] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1983.
- [5] Otte J., Szefranec A., Misiewicz A.: Analiza porównawcza numerycznych metod rozwiązywania opływu palisady profili sprężających, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Energetyka", z. 83, Gliwice 1983.
- [6] Katsenia T.: Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface a Turbomachine, NASA TN D-4525-1968.
- [7] Witkowiak A., Misiewicz A.: Modelowanie przepływu rzeczywistego w osiowym stopniu sprężającym. Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Wiała 1980.
- [8] Jakubowicz A., Orłós Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1982.

Recenzent: doc. dr inż. Jan Redwański

Wpłynęło do redakcji, maj 1985

### АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛОПАТКАХ АКСИАЛЬНОГО ВЕНТИЛЯТОРА, СЛИЧЕНИЕ ОБОЛОЧНОЙ И СТЕРЖЕННОЙ МОДЕЛИ

#### Резюме

В статье представлено результаты упругих вычислений лопатки аксиального вентилятора. Сравнено оболочную и стерженную модель. В первом случае применено метод конечных элементов (система ПАМБО), во втором - элементарную теорию свернутых стержни. Использовано алгоритмы разработанные в [2].

ANALYSIS OF STRESS IN AN AXIAL FAN BLADE;  
CONFRONTATION OF SHELL AND ROD MODELS

S u m m a r y

This paper presents the results of strength computations for the axial fan blade. Two strength models of the blade, shell and rod, have been compared. In the former case, computations have been made by the use of the finite element method; PAMES computing system has been employed here [1]. In the latter case, the elementary theory of coiled rod has been applied. The use has been made of algorithms worked out in [2].