ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 144 Nr kol. 1727

Krzysztof PIEŃKOSZ
Politechnika Warszawska

WŁAŚCIWOŚCI ROZWIĄZAŃ PROBLEMU PLECAKOWEGO Z OGRANICZONĄ PODZIELNOŚCIĄ ELEMENTÓW*

Streszczenie. W pracy jest rozpatrywany wariant problemu plecakowego, w którym dopuszcza się podział elementów podczas pakowania przy zastrzeżeniu, że waga umieszczanych w plecaku fragmentów nie może być mniejsza niż zadany parametr β. Analizowane są właściwości rozwiązań optymalnych takiego problemu. Sformułowano warunki opłacalności pakowania poszczególnych elementów, co w wielu przypadkach umożliwia znaczącą redukcję wymiaru rozpatrywanego zadania.

PROPERTIES OF THE KNAPSACK PROBLEM WITH RESTRICTED ITEM FRAGMENTATION

Summary. In the paper the semi-continuous variant of the knapsack problem is considered in which items may be fragmented into smaller pieces while putting them into the knapsack. Fragmentation is however subjected to the restriction that the weight of each piece cannot be smaller than the given parameter β. In the paper the properties of the semi-continuous knapsack problem are investigated. It is shown how the optimal values of some variables may be fixed in advance and thus the size of the problem may be reduced.

1. Wprowadzenie

W zagadnieniach alokacji zasobu pojawia się problem przydziału ograniczonego co do wielkości zasobu do podmiotów, które się o ten zasób ubiegają. Jeżeli sumaryczne zapotrzebowanie podmiotów nie przekracza dostępnej wielkości zasobu, problem alokacji nie nastręcza trudności – każdy podmiot otrzymuje tyle zasobu, ile wymaga. Istotny problem decyzyjny pojawia się wówczas, gdy zasobu nie wystarczy dla wszystkich. Trzeba wówczas, po pierwsze, określić, kogo uwzględnić przy rozdziale zasobu, a po drugie, zadecydować, ile zasobu przydzielić każdemu wybranemu podmiotowi. Przy wyborze kierujemy się zwykle miarą korzyści, jaką przyniesie przydzielenie jednostki zasobu do danego podmiotu.

*Praca częściowo finansowana w ramach grantu MNiI 3T11C 005 27: „Modele i algorytmy wspomagania efektywnego i sprawiedliwego rozdziału zasobów w złożonych systemach rozproszonych".

Podstawowym modelem alokacji pojedynczego zasobu jest problem plecakowy. W klasycznym problemie plecakowym (*ang. 0-1 knapsack problem*) dany jest zbiór niepodzielnych elementów, którymi próbuje się wypełnić plecak o zadanej ładowności. Dla każdego elementu określone są jego waga oraz wartość użytkowa. Zagadnienie plecakowe polega na takim wyborze elementów do zapakowania, aby ich sumaryczna wartość użytkowa była jak największa i dopuszczalne maksymalne obciążenie plecaka nie było przekroczone.

Stosując klasyczny model plecakowy do problemu alokacji zasobu zakładamy, że porcje zasobu przydzielonego poszczególnym podmiotom muszą być dokładnie równe składanym przez nie zapotrzebowaniom. Istnieje jednak wiele zagadnień alokacji, gdzie nie ma tak ostrych wymagań i przydział zasobu na poziomie niższym od zgłaszanych zapotrzebowań jest również akceptowalny. Jednakże w praktyce, nawet wtedy często pojawiają się różnego rodzaju wymagania technologiczne, organizacyjne lub wynikające ze względów ekonomicznych, które narzucają ograniczenia na minimalną wielkość alokowanego zasobu. Oznacza to, że każda porcja zasobu przydzielana wybranym podmiotom powinna być "sensownej" wielkości, np. nie powinna być mniejsza niż zadany parametr β. Model opisujący tego rodzaju zagadnienie będziemy nazywać *problemem plecakowym z ograniczoną podzielnością elementów*. W dalszej części pracy będą analizowane jego właściwości.

2. Problem plecakowy z ograniczoną podzielnością elementów

Niech $N = \{1, 2, ..., n\}$ będzie zbiorem elementów rozpatrywanych przy pakowaniu plecaka o ładowności C. Każdy element $j \in N$ ma wagę w_j, przy czym dopuszczalne jest umieszczenie w plecaku tylko pewnej części danego elementu, ale pod warunkiem, że waga każdej zapakowanej części nie jest mniejsza niż $\beta \geq 0$. Korzyść z zapakowania do plecaka całego elementu j wynosi $p_j > 0$. Gdy tylko część elementu jest pakowana, zysk jest proporcjonalnie mniejszy. Dodatkowo zakładamy, że $\beta \leq w_j \leq C$ dla każdego $j \in N$ oraz

$$\sum_{j \in N} w_j > C. \tag{1}$$

Problem rozpatrywany w pracy formułujemy następująco:

Problem *SCKP*

$$\max z = \sum_{j \in N} p_j x_j$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j \in N} w_j x_j \leq C$$

$$x_j = 0 \text{ lub } \beta \leq w_j x_j \leq w_j \quad \forall j \in N.$$

W powyższym modelu zmienne decyzyjne x_j określają, jaka część elementu j ma być zapakowana do plecaka. W pracy [5] pokazano, że problem *SCKP* można również zapisać w postaci zadania programowania mieszanego poprzez zastąpienie każdego z ograniczeń o charakterze logicznym parą ograniczeń liniowych z dodatkową zmienną binarną.

Wielkość β jest parametrem modelu. Okazuje się, że od wartości β zależy trudność rozwiązywania problemu *SCKP*. Gdy β=0, czyli nie ma żadnych ograniczeń co do podziału elementów, otrzymujemy tzw. *ciągły problem plecakowy*, którego rozwiązanie można bardzo łatwo wyznaczyć [3,4]. Gdy β jest na tyle duże, że żaden z elementów nie może być podzielony, mamy do czynienia z klasycznym problemem plecakowym, który jest *NP*-trudny. Znane z literatury algorytmy dokładne rozwiązywania takiego problemu wykorzystują najczęściej metodę podziału i oszacowań oraz programowanie dynamiczne [2,3,4].

Problem *SCKP* jest uogólnieniem obu wymienionych wyżej przypadków i w związku z tym jest też *NP*-trudny. W pracy [5] zaproponowano heurystyczny algorytm jego rozwiązywania. Jeszcze bardziej ogólny przypadek był rozpatrywany w pracy [1], gdzie przedstawiono złożony algorytm podziału i cięć (*ang. branch and cut*). Niezależnie od stosowanej metody rozwiązywania warto dokonać wstępnej redukcji wymiaru problemu *SCKP* wykrywając te elementy, które na pewno znajdą się w plecaku oraz te, które są nieopłacalne do zapakowania.

3. Właściwości rozwiązań optymalnych

Istotną wielkością braną pod uwagę przy rozwiązywaniu problemu *SCKP* jest iloraz p_j/w_j, który będziemy nazywać *wskaźnikiem dochodowości* elementu j. W dalszej części pracy będziemy zakładać, że elementy ze zbioru N są uporządkowane według nierosnących wskaźników dochodowości, czyli

$$\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}. \tag{2}$$

Niech

$$s = \min\left\{ j : \sum_{i=1}^{j} w_i > C \right\} \tag{3}$$

$$r = \begin{cases} \min\left\{ j : \sum_{i=1}^{j} w_i + \beta(s-j) > C \right\}, & \text{gdy } \beta s \leq C \\ 0, & \text{gdy } \beta s > C \end{cases}. \tag{4}$$

Przyjmując, że elementy są pakowane według kolejności (2), wielkość s można interpretować jako indeks tego elementu, który jako pierwszy nie mieści się w całości do plecaka. Z kolei r jest indeksem tego elementu, który jako pierwszy nie mieści się w całości w plecaku, ale przy założeniu, że chcemy zapakować pierwsze s elementów i każdy z nich ma mieć wagę nie mniejszą niż β. Jeżeli $\beta s>C$, to dla formalności przyjmujemy r=0. Zauważmy, że z powyższych definicji wynika $r\leq s$. Okazuje się, że pozycje r i s w uporządkowaniu (2) są kluczowe dla określenia postaci rozwiązania optymalnego problemu *SCKP*.

Rozpatrzmy rozwiązanie $\hat{x}$ następującej postaci:

$$\begin{aligned} &\hat{x}_j = 1 && \text{dla } j = 1,\ldots,r-1 && \text{(w przypadku gdy } r > 1) \\ &\hat{x}_r = \frac{\hat{c}}{w_r} && && \\ &\hat{x}_j = \frac{\beta}{w_j} && \text{dla } j = r+1,\ldots,s && \text{(w przypadku gdy } r < s) \\ &\hat{x}_s = 0 && \text{dla } j = s+1,\ldots,n && \text{(w przypadku gdy } s < n), \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$$\hat{c} = C - \sum_{j=1}^{r-1} w_j - \beta(s-r) \quad . \tag{6}$$

Zauważmy, że z definicji (4) wynika $\beta \le \hat{c} < w_r$, a zatem $\hat{x}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu *SCKP*.

Twierdzenie 1. *Jeżeli* $r \ge 1$, *to albo istnieje rozwiązanie optymalne* x^* *problemu SCKP, w którym* $x_j^* = 1$ *dla* $j=1,\ldots,r$, *albo* $\hat{x}$ *postaci* (5) *jest rozwiązaniem optymalnym.*

Dowód. Dla danego rozwiązania optymalnego x' problemu *SCKP* niech $K = \{j \in N: j > r \text{ oraz } x_j' > 0\}$.

Jeżeli $s=r$, to rozwiązanie $\hat{x}$ postaci (5) jest optymalne, gdyż jest dopuszczalne i w tym przypadku jest jednocześnie znanym z literatury (patrz np. [3]) optymalnym rozwiązaniem ciągłego problemu plecakowego, będącego relaksacją problemu *SCKP*.

Jeżeli zachodzi $s>r$ i $|K| \ge s-r$, to rozwiązanie $\hat{x}$ jest nie gorsze niż x', a więc jest też optymalne. Niech bowiem L będzie dowolnym $s-r$-elementowym podzbiorem K. W rozwiązaniu x' każdy z elementów $j \in L$ waży co najmniej β, a ich fragmenty o wadze β ważą w sumie $\beta(s-r)$ i przynoszą zysk $\Sigma_{i \in L}\, p_i \beta / w_i$. Tyle samo ważą elementy $j=r+1, \ldots, s$ z rozwiązania $\hat{x}$, przy czym ze względu na uporządkowanie (2) i definicję zbioru L zachodzi:

$$\sum_{i \in L} p_i \frac{\beta}{w_i} \le \sum_{i=r+1}^{s} p_i \hat{x}_i \ .$$

Pozostałe w plecaku miejsce o ładowności $C-\beta(s-r)$ jest w rozwiązaniu $\hat{x}$ wykorzystane w sposób optymalny. Zatem

$$\sum_{i \in N} p_i x_i' = \left(\sum_{i \in N \setminus L} p_i x_i' + \sum_{i \in L} p_i (x_i' - \frac{\beta}{w_i}) \right) + \left(\sum_{i \in L} p_i \frac{\beta}{w_i} \right) \le \sum_{i=1}^{r} p_i \hat{x}_i + \sum_{i=r+1}^{s} p_i \hat{x}_i = \sum_{i \in N} p_i \hat{x}_i \ .$$

Jeżeli $s>r$ i $|K| \le s-r-1$, to ponieważ każdy z elementów $j \in K$ waży co najmniej β, więc szacując od góry zysk rozwiązania x' stwierdzamy, że

$$\sum_{i \in N} p_i x_i' = \left(\sum_{i=1}^{r} p_i x' + \sum_{i \in K} p_i (x_i' - \frac{\beta}{w_i}) \right) + \sum_{i \in K} p_i \frac{\beta}{w_i} \le \left(\sum_{i=1}^{r} p_i x_i'' + \sum_{i \in K} p_i x_i'' \right) + \sum_{i \in K} p_i \frac{\beta}{w_i}, \tag{7}$$

gdzie: x'' jest optymalnym rozwiązaniem ciągłego problemu plecakowego *CKP*, w którym rozpatruje się tylko elementy j ze zbioru $\{1,\ldots,r\} \cup K$, pojemność plecaka wynosi $C-\beta|K|$, współczynniki zysku są równe p_j, zaś $w_j''=w_j$ dla $j \in \{1,\ldots,r\}$ oraz $w_j''=w_j-\beta$ dla $j \in K$.

Ponieważ z definicji (3) wynika, że

$$C \geq \sum_{i=1}^{s-1} w_i \geq \sum_{i=1}^{r} w_i + \beta(s-r-1),$$

więc

$$C - \beta|K| \geq \sum_{i=1}^{r} w_i + \beta(s-r-1) - \beta|K| \geq \sum_{i=1}^{r} w_i .$$

Zatem wśród rozwiązań optymalnych problemu *CKP* istnieje takie, w którym $x_j''=1$ dla każdego $j \in \{1,...,r\}$. Zauważmy, że wtedy rozwiązanie x^* postaci:

$$x_j^* = 1 \quad \text{dla } j = 1,...,r$$

$$x_j^* = x_j'' + \frac{\beta}{w_j} \quad \text{dla } j \in K$$

$$x_j^* = 0 \quad \text{dla } j \in N \setminus (\{1,...,r\} \cup K)$$

jest dopuszczalne w problemie *SCKP* i ze względu na (7) nie jest gorsze od x', czyli jest też optymalne.
Z twierdzenia 1 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1. *Jeżeli $r>1$, to istnieje rozwiązanie optymalne x^* problemu SCKP, w którym $x_j^*=1$ dla $j=1,...,r-1$.*

Wykorzystując twierdzenie 1 można w pewnych przypadkach od razu wyznaczyć rozwiązanie optymalne problemu *SCKP*. Z twierdzenia 1 wynika, że gdy $r=s$, to rozwiązanie problemu *SCKP* ma postać (5), gdyż ze względu na definicję (3) w plecaku nie zmieszczą się wówczas w całości wszystkie elementy $j \leq r$. W tym przypadku rozwiązanie (5) pokrywa się z rozwiązaniem ciągłego problemu plecakowego, który jest relaksacją problemu *SCKP*.

Gdy $r=s-1$, to również jest łatwo wyznaczyć rozwiązanie optymalne problemu *SCKP*. Wystarczy porównać rozwiązanie (5) z rozwiązaniem, w którym $x_j=1$ dla $j=1,...,r$ oraz $x_j=0$ dla pozostałych elementów $j>r$ i wybrać rozwiązanie lepsze. Zauważmy, że wówczas z definicji (3) i (4) wynika, że

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \leq C < \sum_{i=1}^{r} w_i + \beta,$$

a zatem poza elementami ze zbioru $\{1,...,r\}$ żaden inny element już się nie zmieści w plecaku.

Gdy $r<s-1$, wyznaczenie optymalnego rozwiązania problemu *SCKP* jest bardziej kłopotliwe. Jednak nawet wtedy na podstawie wniosku 1 możemy często w istotnym stopniu zredukować liczbę zmiennych i w ten sposób znacząco ułatwić rozwiązywanie problemu *SCKP*. W pewnych przypadkach możliwa jest też dalsza redukcja wymiaru problemu poprzez określenie elementów, które nie powinny być pakowane do plecaka.

Niech $M=\{j \in N: j \leq s-1\}$ oraz przy założeniu, że $r<s-1$ niech w^{max} oznacza największą wagę wśród elementów j o indeksach większych od r i mniejszych od s, czyli $w^{max} = \max\{w_j: r<j<s\}$. Załóżmy, że istnieje takie $j \geq s$, że $w_j \geq C - \Sigma_{i \in M} w_i + w^{max}$.

Niech $t=\min\{j \geq s\colon w_j \geq C - \Sigma_{i\in M} w_i + w^{max}\}$.

Twierdzenie 2. *Istnieje rozwiązanie optymalne* x^* *problemu SCKP, w którym* $x_j^*=1$ *dla* $j=1,\ldots,r-1$ *oraz* $x_j^*=0$ *dla każdego* $j > t$.

Dowód. W rozwiązaniu (5) mamy $\hat{x}_j = 1$ dla $j < r$ oraz $\hat{x}_j = 0$ dla każdego $j > s$, a zatem i dla $j > t$. Z twierdzenia 1 wynika, że jeżeli $\hat{x}$ nie jest rozwiązaniem optymalnym, to istnieje rozwiązanie optymalne, w którym $x_j^*=1$ dla $j=1,\ldots,r$. Zauważmy, że wtedy w plecaku nie może być więcej niż $s-1$ elementów, gdyż z definicji (4) wynika, że $\Sigma_{i\leq r} w_i+\beta(s-r)>C$. Załóżmy, że w rozwiązaniu optymalnym $x_j>0$ dla pewnego $j>t$. Oznacza to, że musi istnieć takie $m\in M\backslash\{1,\ldots,r\}$, że $x_m=0$ oraz $w_jx_j \leq C - \Sigma_{i\in M\backslash\{m\}} w_i \leq w_t$. Jeżeli $x_t=0$, to zastępując w plecaku element j elementem t z większym wskaźnikiem dochodowości uzyskujemy lepsze rozwiązanie. Jeżeli zaś $x_t>0$, to element j można zastąpić elementem m i ewentualnie zwiększając udział w plecaku elementu t też uzyskać lepsze rozwiązanie.

4. Podsumowanie

Rozpatrywany w pracy model *SCKP* jest uogólnieniem klasycznego problemu plecakowego i jego relaksacji liniowej – ciągłego problemu plecakowego. Ma zastosowanie w tych zagadnieniach alokacji zasobu, gdzie jest dopuszczalne przydzielanie porcji zasobu mniejszych od zgłaszanych zapotrzebowań, ale ze względów technologicznych, ekonomicznych bądź organizacyjnych porcje te nie mogą być zbyt małe. Przedstawione w pracy właściwości rozwiązań optymalnych problemu *SCKP* dają nam wskazówki co do sposobu jego rozwiązywania. Najpierw należy wyliczyć indeksy s oraz r na podstawie definicji (3) i (4). Jeżeli $r=s$, to mamy do czynienia z najłatwiejszym przypadkiem, gdy rozwiązanie optymalne ciągłego problemu plecakowego jest dopuszczalne dla problemu *SCKP*. Również, gdy $r=s-1$, rozwiązanie optymalne jest łatwe do wyznaczenia. Jeżeli $r<s-1$, to proces rozwiązywania bardziej się komplikuje, ale wówczas na podstawie twierdzenia 2 można określić optymalne wartości przynajmniej dla części zmiennych i w ten sposób zredukować wymiar analizowanego dalej problemu.

Przykład

Rozpatrzmy przykład problemu plecakowego z ograniczoną podzielnością elementów, w którym $n=10$, $C=100$, $\beta=10$ oraz
$w_1=20, w_2=10, w_3=27, w_4=25, w_5=15, w_6=12, w_7=20, w_8=31, w_9=10, w_{10}=29$,
$p_1=59, p_2=28, p_3=60, p_4=55, p_5=32, p_6=25, p_7=41, p_8=62, p_9=15, p_{10}=40$.
Uporządkowanie elementów spełnia warunek (2) i w związku z tym $s=6$ oraz $r=4$.
Na podstawie wniosku 1 możemy więc stwierdzić, że w rozwiązaniu optymalnym będzie $x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=1$. Ponadto mamy $M=\{1,2,3,4,5\}$ oraz $w^{max}= w_5=15$, a zatem $C - \Sigma_{i\in M} w_i + w^{max} = 18$ i $t=7$.
Na podstawie twierdzenia 2 wnioskujemy więc, że dodatkowo $x_8^*=0, x_9^*=0, x_{10}^*=0$.
W rezultacie wymiar rozpatrywanego problemu redukuje się tylko do czterech zmiennych decyzyjnych: x_4, x_5, x_6 oraz x_7.

LITERATURA

1. de Farias I.R Jr.: Semi-continous cuts for mixed-integer programming, Lecture Notes in Computer Science, vol. 3064, Springer Verlag, 2004, p. 163-177
2. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.: Knapsack Problems, Springer Verlag, 2004.
3. Martello S., Toth P.: Knapsack problems: algorithms and computer implementations. Wiley, New York 1990.
4. Martello S., Pisinger D., Toth P: New trends in exact algorithms for 0-1 knapsack problem, European Journal of Operational Research, vol. 123, 2000, p. 325-332.
5. Pieńkosz K.: On solving the semi-contiuous knapsack problem, Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 2005, p. 851-855.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zdzisław Duda

Abstract

In the classical knapsack problem we have to choose a subset of given items to be packed into a knapsack in such a way that their total profit is maximized, while the total weight does not exceed the capacity of the knapsack. In the paper a semi-continuous variant of the knapsack problem is considered in which items may be fragmented into smaller pieces while putting them into the knapsack. Fragmentation is however subjected to the restriction that the weight of each piece cannot be smaller than the given parameter β. The semi-continuous model is appropriate in all these applications in which portions of items representing various objects like execution time of tasks, invested money, distributed commodity, etc. shouldn't be too small because of technological, economical or organisational reasons. It turns out that if β=0 then the problem can be easily solved to optimality. If β is large and fragmentation is not allowed, we get the classical knapsack problem which is NP-hard. In the paper the properties of the semi-continuous knapsack problem are investigated. The rules for finding the optimal values of some variables are proposed. These rules enable to reduce the size of the problem in the pre-processing phase.