

Julian ZIELIŃSKI

Instytut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn

ANALIZA KRZYWYCH REZONANSOWYCH UKŁADU DRGAJĄCEGO
O NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYKACH RUCHU

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę określenia dynamicznych charakterystyk więzów układu drgającego o jednym stopniu swobody, opartą na analizie krzywych rezonansowych.

1. Cel pracy

W zagadnieniach dotyczących dynamiki układów mechanicznych zaobchodzi często konieczność uwzględnienia nieliniowego charakteru zależności sił od przemieszczeń i prędkości elementów układu. Przepisy funkcyjne, które ujmują działające na układ siły, zależne od wzajemnej konfiguracji jego elementów i ich prędkości względnych, nazywamy charakterystykami ruchu. Stosowana dość powszechnie w obliczeniach dynamicznych linearyzacja charakterystyki sprężystej, w przypadku małych drgań lub stwierdzonej tzw. słabej nieliniowości, nie może dotyczyć równocześnie charakterystyki tłumienia ruchu w układzie. Świadczą o tym doświadczenia, z których wynika, że tzw. logarytmiczny dekrement tłumienia nie jest proporcjonalny do częstotności drgań.

Z punktu widzenia zastosowań technicznych jednakowo ważny staje się więc proces analizy ruchu, jak również proces poszukiwania postaci charakterystyk układu, który realizuje określony rodzaj ruchu.

Praca, sugerując pewną metodę wyznaczania charakterystyk ruchu, na drodze analizy krzywych rezonansowych układu drgającego o jednym stopniu swobody, przedstawia pewną próbę uzupełnienia dotychczasowych opracowań w tej dziedzinie.

Matematyczne ujęcie zagadnienia

Rozpatrzmy drgania wymuszone układu zmodelowanego jak na rys. 1. Ciało M o masie "m" powiązane jest z ciałem M_1 za pomocą łącznika złożonego z silnie nieliniowych: sprężyny i tłumika. Ciało M_1 wykonuje drgania ściśle sinusoidalne o amplitudzie i częstotliwości regulowanych w sposób ciągły. Niech ξ oznacza współrzędną ciała M_1 względem nieruchomego układu odnie-

sienia, x współrzędną określającą wychylenie ciała M względem drgającego ciała M_1 . Równanie ruchu M ma postać:

$$\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = -\ddot{\xi}, \quad (1)$$

gdzie

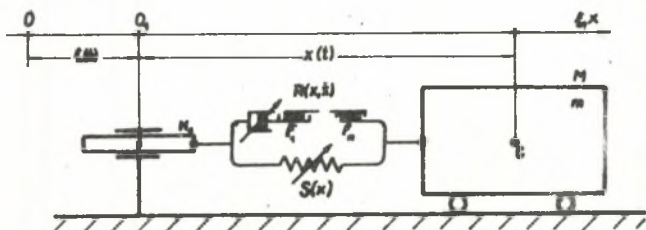
$R(x, \dot{x}) = \frac{1}{m} \varphi(x, \dot{x})$ - nieliniowa charakterystyka tłumienia,

$S(x) = \frac{1}{m} F(x)$ - nieliniowa charakterystyka sprężysta,

$$\xi = h \sin \omega t,$$

h - amplituda drgań ciała M_1 ,

m - masa ciała M .



Rys. 1

Na funkcje $S(x)$ i $R(x, \dot{x})$ nakładamy warunki zgodne z własnościami mechanicznych układów drgających, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} S(-x) &= -S(x), \\ S(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} R(x, \dot{x}) \dot{x} &\geq 0, \\ R(-x, \dot{x}) &= R(x, \dot{x}), \\ R(x, -\dot{x}) &= -R(x, \dot{x}), \\ R(x, 0) &= 0, \\ R(0, \dot{x}) &\neq 0, \quad \text{dla } \dot{x}^2 \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Po podstawieniu $\xi = h \sin \omega t$ w prawą stronę równania (1) i uwzględnieniu przesunięcia fazowego między siłą wymuszającą $P(t) = -\ddot{\xi}(t)$ i wychyleniem $x(t)$ ciała M w funkcji $P(t)$, równanie (1) przyjmie postać:

$$\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = P_s \sin \omega t + P_o \cos \omega t, \quad (4)$$

gdzie

$$P_s = h \omega^2 \cos \theta, \quad (5)$$

$$P_o = h \omega^2 \sin \theta. \quad (6)$$

P_s i P_o są to amplitudy składowych sinusowej i cosinusowej funkcji $P(t)$, θ - kąt przesunięcia fazowego między $P(t)$ i $x(t)$. Składowe P_s i P_o spełniają równanie

$$(P_s^2 + P_o^2)^{\frac{1}{2}} = h \omega^2. \quad (7)$$

Dla równania (4) założono istnienie rozwiązania w postaci kombinacji liniowej odpowiednio dobranych i liniowo niezależnych funkcji. Ponieważ siła wymuszająca $P(t)$ jest funkcją okresowo zmienną i układ jest tłumiony, to rozwiązanie równania (4) można przedstawić w postaci

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t \quad (8)$$

Wnosząc tylko pierwszy człon szeregu (8)

$$x(t) = A \sin \omega t, \quad (9)$$

jako pierwsze przybliżenie rozwiązania równania (4) otrzymuje się pozostałość

$$q(t) = -\Lambda \omega^2 \sin \omega t + R(\Lambda \sin \omega t, \Lambda \omega \cos \omega t) + \\ + S(\Lambda \sin \omega t) - P_s \sin \omega t - P_o \cos \omega t. \quad (10)$$

Jako kryterium dokładności rozwiązania przyjęto minimum następującej całki

$$J = \int_0^T q^2(t) dt, \quad (11)$$

gdzie

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \text{okres funkcji (9)}.$$

Kryterium to wynika z zasady najmniejszych kwadratów stosowanej do wyznaczenia stałych, będących parametrami krzywej aproksymującej szereg punktów empirycznego rozwiązania. Dla każdej częstotliwości wymuszenia, A , P_s , P_o spełniają rolę stałych i występują w pozostałości (10) i całość (11). Ponieważ amplitudę drgań $A = A(\omega)$ można wyznaczyć doświadczalnie, poszukiwać będziemy wartości składowych P_s i P_o , które minimalizują całość (11). Minimum całości (11) otrzymuje się, jeśli zostaną spełnione następujące warunki

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial P_s} &= \int_0^{2\pi} q(\tau) \frac{\partial q(\tau)}{\partial P_s} d\tau = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial P_o} &= \int_0^{2\pi} q(\tau) \frac{\partial q(\tau)}{\partial P_o} d\tau = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gdzie

$$\tau = \omega t.$$

Po przedstawieniu (10) do (12) otrzymuje się

$$P_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [S(x) - A\omega^2 \sin\tau] \sin\tau d\tau, \quad (13)$$

$$P_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(x, \dot{x}) \cos\tau d\tau. \quad (14)$$

Podstawiając (13) i (14) do (7) otrzymuje się równanie krzywych rezonansowych $A = A(\omega, h)$. W przypadku gdy $P(t) = -\dot{\xi}(t) = 0$, drgania ciała M będą drganiami swobodnymi. Podstawiając do równania (13) $P_s = 0$ otrzymuje się

$$\omega^2 = p^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} S(x) \sin\tau d\tau, \quad (15)$$

gdzie

p - częstotać drgań swobodnych.

Równanie (15) jest równaniem krzywej zależności między częstotliwością p i amplitudą drgań swobodnych, czyli jest to równanie krzywej szkieletowej krzywych rezonansowych $A = A(\omega, h)$. Biorąc pod uwagę (15) przekształciliśmy równanie (4) do następującej postaci:

$$\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + p^2 x = P_g \sin \omega t + P_o \cos \omega t. \quad (16)$$

Równania (13) i (14) przyjmują postać:

$$P_g = p^2 A - \omega^2 A, \quad (17)$$

$$P_o = \omega A J_1, \quad (18)$$

gdzie

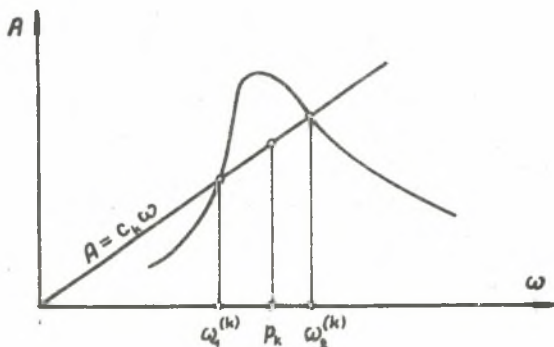
$$J_1 = \frac{1}{\pi \omega A} \int_0^{2\pi} R(x, \dot{x}) \cos \tau \, d\tau. \quad (19)$$

Podstawiając (17) i (18) do równania (7) otrzymuje się następujące równanie krzywych rezonansowych

$$\left(1 - \frac{h^2}{A^2}\right) \omega^4 - (2 p^2 - J_1^2) \omega^2 + p^4 = 0. \quad (20)$$

Przez początek układu współrzędnych A, ω prowadzimy proste (rys. 2).

$$A = C_k \omega \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (21)$$



Rys. 2

Proste (21) przecinają krzywą rezonansową $A = A(\omega, h)$ (rys. 2) w punktach o częstościach drgań układu $\omega_1^{(k)}$ i $\omega_2^{(k)}$. Podstawiając (21) do (20) otrzymuje się

$$\left[\omega^{(k)}\right]^4 - \left(\frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1\right)\left[\omega^{(k)}\right]^2 + p^4 = 0. \quad (22)$$

Po rozwiązaniu równania 22 otrzymuje się

$$\omega_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1^2 - \sqrt{\left(\frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1^2\right)^2 - 4p^4}}{2}} \quad (23)$$

$$\omega_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1^2 + \sqrt{\left(\frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1^2\right)^2 - 4p^4}}{2}} \quad (24)$$

Rugując z równań (23) i (24) funkcję

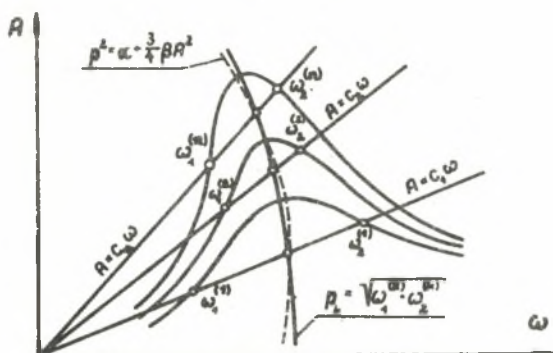
$$f(A, \omega) = \frac{h^2}{C_k} + 2p^2 - J_1^2, \quad (25)$$

otrzymuje się

$$p_k = \sqrt{\omega_1^{(k)} \omega_2^{(k)}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (26)$$

Stosując równanie (26) można wyznaczyć krzywą częstości drgań swobodnych (krzywa szkieletowa) dla wyznaczonych doświadczalnie krzywych rezonansowych układu (rys. 3).

Z równania (15) wynika, że kształt tej krzywej zależy od charakterystyki sprężystej więzów $S(x)$. Zauważmy, że istnieje możliwość doboru zarówno dynamicznej charakterystyki sprężystej $S(x)$ jak i charakterystyki tłumienia $R(x, \dot{x})$. W tym celu wykorzystujemy doświadczalnie wyznaczony zbiór krzywych rezonansowych oraz krzywą częstości drgań swobodnych (krzywa szkieletowa).



Rys. 3

Zakładając analityczność funkcji $S(x)$ przy warunkach (2) - przyjmujemy dla $S(x)$ następujące rozwinięcie

$$S(x) = \frac{1}{m} F(x) = \frac{1}{m} (a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + \dots) \quad (27)$$

Stosując tylko pierwsze dwa wyrazy szeregu (27) otrzymuje się

$$S(x) = \alpha x + \beta x^3, \quad (28)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{a_1}{m},$$

$$\beta = \frac{a_2}{m}.$$

Po podstawieniu (28) i (9) do (15) i scałkowaniu otrzymuje się

$$p^2 = \alpha + \frac{3}{4} \beta A^2. \quad (29)$$

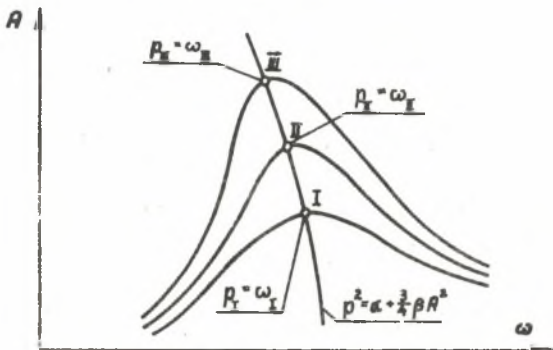
Podstawiając do równania (29) współrzędne (A, p) odpowiednie dobranych punktów krzywej częstości drgań swobodnych, otrzymuje się $j(j = 1, 2)$ równań na współczynniki α i β dynamicznej charakterystyki sprężystej $S(x)$:

$$[p^{(j)}]^2 = \alpha + \frac{3}{4} \beta [A^{(j)}]^2 \quad (30)$$

Układ równań (30) należy dobrać tak, aby po jego rozwiązaniu i podstawieniu wartości współczynników α i β do (29) funkcja ta aproksymowała w sposób optymalny wyznaczoną doświadczalnie krzywą częstotliwości drgań swobodnych układu (rys. 3).

Krzywa częstotliwości drgań swobodnych przecina krzywe rezonansowe w punktach I, II, III, ... (rys. 4). Dla wymienionych punktów spełniony jest warunek

$$\omega_{\nu} = p_{\nu} \quad (\nu = I, II, III, \dots) \quad (31)$$



Rys. 4

Podstawiając (31) oraz odpowiadające punktom I, II, III, ... amplitudy drgań A_{ν} ($\nu = I, II, III, \dots$) do równania (20) otrzymuje się

$$J_1(\nu) = \frac{h_1}{A_{\nu}} p_{\nu}^3. \quad (32)$$

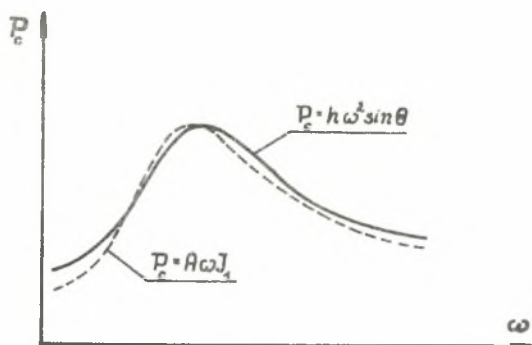
Zauważmy, że istnieje możliwość doboru charakterystyki tłumienia więzów $R(x, \dot{x})$ wykorzystując w tym celu równania (6), (19), (32). Mierząc kąt przesunięcia fazowego θ między $x(t)$ i $\xi(t)$ dla każdej częstotliwości wymuszenia ω sporządzamy wykres funkcji (6) (rys. 5).

Wobec założonej analityczności funkcji $R(x, \dot{x})$ oraz nałożonych na nią warunków (3) przyjmijmy dla $R(x, \dot{x})$ następujące rozwinięcie

$$R(x, \dot{x}) = \frac{1}{m} \varphi(x, \dot{x}) = b_1 \dot{x} + b_2 x^2 \dot{x}. \quad (33)$$

Po podstawieniu (33) do (19) i scałkowaniu otrzymuje się

$$J_1 = b_1 + \frac{1}{4} b_2 A^2. \quad (34)$$



Rys. 5

Porównując stronami równania (32) i (34) otrzymuje się

$$\frac{h}{A\gamma} p_\nu = b_1 + \frac{1}{4} b_2 A_\nu^2, \quad (\nu = I, II, III, \dots) \quad (35)$$

Podstawiając do równania (35) współrzędne A_ν, p_ν odpowiednio dobranych punktów przecięcia się krzywej częstości drgań swobodnych z krzywymi rezonansowymi otrzymuje się układ dwu równań algebraicznych na współczynniki b_1 i b_2 . Układ równań (35) należy dobrać tak, aby po jego rozwiązaniu i podstawieniu współczynników do (34), a następnie (34) do (18) funkcja (18) aproksymowała w sposób optymalny krzywą $P_c = P_c(\omega)$. Wyznaczone współczynniki b_1 i b_2 funkcji (18) będą równocześnie współczynnikami poszukiwanej charakterystyki tłumienia (33).

LITERATURA

1. J.N. MAC DUFF i J.R. CURRERI - Vibration control, Mc Graw - Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1958.
2. W.J. CUNNINGHAM - Introduction to nonlinear analysis, Mac Graw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1958.

АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
ОБЛАДАЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ДВИЖЕНИЯ

Р е з ю м е

Воздействие на колебательную систему с нелинейными упругими связями возмущающих сил вызывает последствия отличающиеся от аналогических в случае линейных систем. Поэтому основные сведения о поведении системы во время колебаний, необходимые при проектировании вибрационных машин обладающих нелинейными упругими связями, можно получить только лишь в результате проведения анализа нелинейных динамических уравнений движения. Для этой цели необходимо располагание функциями называемыми динамическими характеристиками связей. В работе описывается приближенный метод определения названных функций опирающийся на анализ резонансных кривых механической системы обладающей одной степенью свободы.

AN ANALYSIS OF THE RESONANCE CURVES OF THE VIBRATIONAL
SYSTEM WITH NONLINEAR CHARACTERISTICS OF MOTION

S u m m a r y

An action of the forces on the vibrational system with nonlinear elastic contractions causes effect different than in case of linear system. Therefore, obtaining of the fundamental information on behaviour of the system during forced vibrations, necessary for design of vibrational machines with nonlinear elastic contractions requires analysis of the nonlinear dynamical equations of motion. For the purpose knowledge of the functions called dynamical characteristics of contractions is necessary.

In the paper has been described the approximate method of determination of the functions mentioned above, based on analysis of the resonance curves of system with one degree of freedom.