

Stanisław JURA, Bohdan MOCHNACKI

Radosław GRZYMKOWSKI

MODELOWANIE NUMERYCZNE PROCESU KRZEPNIĘCIA ODLEWU
O ZŁOŻONEJ GEOMETRII W FORMIE PIASKOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono realizację numeryczną modelu matematycznego opisującego niestacjonarny przepływ ciepła w układzie odlew-forma. Utworzony na bazie jawnych schematów różnicowych algorytm wykorzystano do obliczeń krzepnięcia układów o złożonej geometrii.

1. Wstęp

Proces stygnięcia i krzepnięcia odlewu w formie piaskowej (rozkład temperatury w czasie i przestrzeni, kinetyka krzepnięcia) opisuje układ równań różniczkowych typu:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda_i \operatorname{grad} T_i(x,t), \quad i = 1 \quad (1) \quad n$$

$$(x,t) \in \Omega_i \times J$$

gdzie wskaźnik i wyróżnia stan ciekły, przejściowy i fazę zakrzepkę w obszarze odlewu oraz podobszary formy, c_i , γ_i , λ_i - są właściwymi pojemnościami cieplnymi, gęstościami i współczynnikami przewodzenia ciepła w podobszarach, Ω_i , T_i - oznacza temperaturę, a t - czas.

Wzajemne oddziaływania między podobszarami układu odlew-forma zachodzą poprzez powierzchnie graniczne $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$, przy czym zmienność w czasie konfiguracji niektórych podobszarów układu determinuje chwilowe położenia odpowiednich powierzchni granicznych, tzn. $\Gamma_{12} = \Gamma_{12}(t)$ i $\Gamma_{23} = \Gamma_{23}(t)$, gdzie indeksami 1, 2, 3 oznaczono strefy likwidusu, fazy przejściowej i solidusu w obszarze wlewka (rys. 1). Wskaźnikiem $i = 4$ (1) n przyporządkowano pozostałe elementy układu odlew-forma, zakładając, że w ogólnym przypadku forma nie jest jednorodna.

Na styku podobszarów dane są warunki w postaci:

$$\Gamma_{12}(t) : T_1(x,t) = T_2(x,t) = T' \quad (2)$$

$$\Gamma_{23}(t) : T_2(x, t) = T_3(x, t) = T'' \quad (3)$$

$$\Gamma_{jk} \begin{cases} \lambda_j \frac{\partial T_j(x, t)}{\partial n} = \lambda_k \frac{\partial T_k(x, t)}{\partial n} \\ T_j(x, t) = T_k(x, t) \end{cases} \quad (4)$$

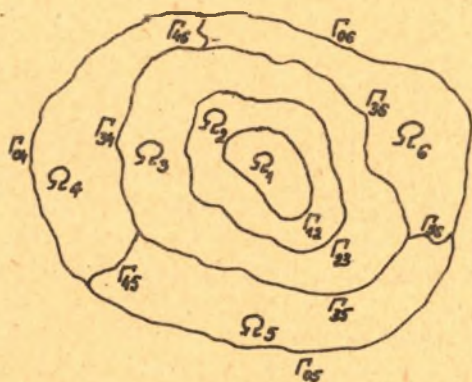
Założono tu, że na powierzchniach granicznych odlew-forma i między podobszarami formy (różne materiały formierskie, krystalizatory itp.) przepływ zachodzi przy tzw. styku idealnym, nazywanym w literaturze warunkiem brzegowym IV rodzaju. Warunki brzegowe uzupełniają warunki na granicy formy i otoczenia lub w punktach z obszaru formy, które umownie przyjęto jako brzegowe.

Dany jest również rozkład funkcji $T_i(x, t)$, $i = 1(1)n$ w chwili $t = 0$

$$T_i(x, 0) = T_i^0(x) \quad x \in \Omega_i \quad (5)$$

oraz

$$\Omega_3 = \Omega_2 = \Phi, \quad (6)$$



Rys. 1. Niejednorodny obszar odlew-forma

przy czym istotą stosowanych tu metod jest sprowadzenie rozwiązania analitycznego do rozwiązań numerycznych (najczęściej układów równań algebraicznych liniowych).

co wynika z przyjęcia, że dla $t = 0$ formę wypełnia ciekły metal.

Geometrię modelowanego układu przedstawiono na rys. 1.

Tak sformułowany problem posiada rozwiązanie analityczne jedynie dla bardzo wąskiej grupy zadań, które są najczęściej zbyt silnym uproszczeniem procesów rzeczywistych. Zastosowanie elektrycznej techniki obliczeniowej pozwala jednak na rozwiązanie bardzo złożonych zagadnień opisanych równaniami (1) ÷ (6),

2. Metoda numeryczna rozwiązania problemu krzepnięcia i stygnięcia układu

Do rozwiązania sformułowanego we wstępie zadania zastosowano metodę różnic skończonych, polegającą na zastąpieniu procesu ciągłego procesem zmian skokowych, co uzyskuje się przez przyjęcie w rozpatrywanym obszarze przestrzenno-czasowym dyskretnego zbioru punktów (węzłów) i poszukiwaniu wartości funkcji w węzłach z układów równań liniowych, otrzymanych z aproksymacji operatorów różniczkowych wyrażeniami różnicowymi.

Przybliżeniem różnicowym równań (1) mogą być równania:

$$c_m \tau_m \frac{T_{ij}^{P+1} - T_{ij}^P}{\Delta t} = \nabla_{h_i h_j} \cdot \lambda_m \nabla_{h_i h_j} T_{ij}^P, \quad (7)$$

$$m = 1(1)n$$

gdzie:

$$T_{ij}^{P+1} = T(X^{ij}, t + \Delta t) = T(x_i^1, x_j^2, t + \Delta t)$$

$$T_{ij}^P = T(X^{ij}, t) = T(x_i^1, x_j^2, t),$$

przy czym $X^{ij} = (x_i^1, x_j^2)$ - węzeł wewnętrzny siatki nałożonej na układ odlew-forma, Δt - krok czasowy (dla ustalenia uwagi przyjęto, że problem jest dwuwymiarowy).

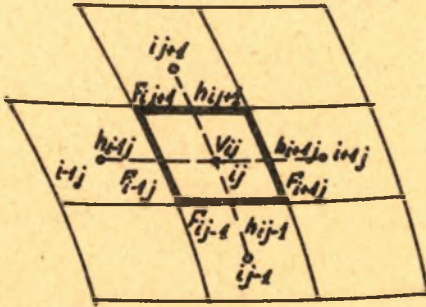
$$\begin{aligned} & \nabla_{h_i h_j} \cdot \lambda_m \nabla_{h_i h_j} T_{ij}^P = \\ & = \lambda_{i+1,j}^0 \frac{T_{i+1,j}^P - T_{ij}^P}{h_{i+1,j}} \beta_{i+1,j} - \lambda_{i-1,j}^0 \frac{T_{ij}^P - T_{i-1,j}^P}{h_{i-1,j}} \beta_{i-1,j} + \\ & + \lambda_{i,j+1}^0 \frac{T_{i,j+1}^P - T_{ij}^P}{h_{i,j+1}} \beta_{i,j+1} - \lambda_{i,j-1}^0 \frac{T_{ij}^P - T_{i,j-1}^P}{h_{i,j-1}} \beta_{i,j-1} \quad (8) \end{aligned}$$

gdzie:

$\beta_{k,l} = \frac{F_{kl}}{v_{ij}}$ są współczynnikami kształtu siatki dla węzła, X^{ij} wskaźniki $\beta_{k,l}$ są zgodne z indeksami λ^0 .

F_{kl} , h_{kl} i v_{ij} - lokalne wymiary siatki i lokalna powierzchnia siatki dla węzła X^{ij} (rys. 2),

λ_{kl}^0 , ($k = i+1, i, i, i-1$), ($l = j, j+1, j-1, j$) - uśredniona wartość współczynnika przewodzenia między węzłami x^{ij} , x^{kl} .



Rys. 2. Siatka różnicowa w podobszarach

Dla siatki prostokątnej - rys. 3 - z (8) otrzymamy:

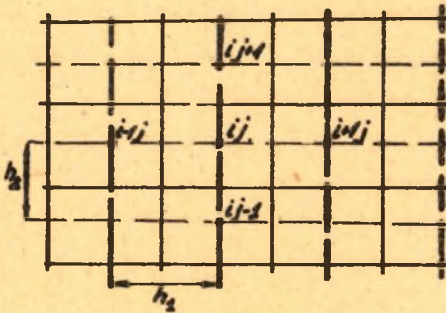
$$\nabla_{h_1 h_2} \cdot \lambda_m \nabla_{h_1 h_2} T_{ij}^P = \nabla_{h_1 h_2} \cdot$$

$$\cdot \lambda_m \nabla_{h_1 h_2} T_{ij}^P =$$

$$= \frac{1}{h_1} \left[\lambda_{i+1,j}^0 \frac{T_{i+1,j}^P - T_{ij}^P}{h_1} -$$

$$- \lambda_{i-1,j}^0 \frac{T_{ij}^P - T_{i-1,j}^P}{h_1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{h_2} \left[\lambda_{i,j+1}^0 \frac{T_{i,j+1}^P - T_{ij}^P}{h_2} - \lambda_{i,j-1}^0 \frac{T_{ij}^P - T_{i,j-1}^P}{h_2} \right] \quad (9)$$



Rys. 3. Zbiór węzłów w siatce prostokątnej

Zastosowanie wyrażenia różnicowego (8) do przybliżenia prawej strony równań (1) dla siatek krzywoliniowych jest wystarczająco dokładne do obliczeń numerycznych w siatkach ortogonalnych (w przypadku siatek cylindrycznych, stożkowych itp. można stosować również dokładniejsze operatory różnicowe).

Dla zbioru węzłów tworzących siatkę różnicową otrzymuje się w konsekwencji z (7) i (8) liniowy układ równań typu:

$$T_{ij}^{P+1} = A_0 T_{ij}^P + \sum_{(k,l)} A_{kl} T_{kl}^P, \quad \begin{pmatrix} k = i+1, i-1, i \\ l = j+1, j, j-1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

gdzie:

A_0 i A_{kl} - współczynniki liczbowe wynikające z przekształcenia związków (9) do postaci (10).

Na brzegach podobszarów (w węzłach nie należących do zbioru węzłów wewnętrznych) zapisuje się w postaci różnicowej odpowiednie warunki brzegowe. Szczegółowy wykład z dziedziny metod różnicowych i wykorzystania ich w termodynamice procesów odlewniczych można znaleźć m.in. w pracach: [1], [2], [3], [4], [5]. Tak więc metoda różnicowa pozwala na podstawie pól temperatury w chwili t wyznaczyć pola temperatury w kolejnych interwałach czasu.

Równanie (10) nazywa się równaniem w postaci jawnej.

3. Realizacja modelu krzepnięcia i stygnięcia układu odlew-forma o złożonej geometrii na EMC

Nakładając na układ Ω siatkę różnicową aproksymujemy obszar rzeczywisty obszarem siatkowym numerycznie mu równoważnym Ω' . Dla $t = 0$ na zbiorze węzłów wewnętrznych X^{ij} układu Ω' określamy funkcję identyfikacyjną $S(X^{ij})$ w sposób następujący:

$$S(X^{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } X^{ij} \in \Omega'_1 \\ p & \text{dla } X^{ij} \in \Omega_p, \quad p = 4(1)n \\ -2 & \text{dla } X_{ij} \notin \Omega' \end{cases} \quad (11)$$

gdzie:

Ω'_1 , $1 = 1(1)n$, siatkowe aproksymacje Ω_1 .

Tak zdefiniowana funkcja $S(X^{ij})$ w sposób jednoznaczny określa geometrię układu w chwili $t = 0$, tj. gdy mamy do czynienia tylko z niejednorodną formą i metalem w stanie ciekłym. Wartości tej funkcji tworzą macierz $[S_{ij}]$, którą nazwiemy macierzą identyfikacyjną. Elementy tej macierzy pozwalają przyporządkować węzłom odpowiadające im stałe fizyczne c , γ , λ ($c = c(S_{ij})$, $\gamma = \gamma(S_{ij})$, $\lambda = \lambda(S_{ij})$). Wartości $S(X_{ij}) < 0$ odpowiadają węzłom "pustym" i przy obliczeniach numerycznych są opuszczone.

W równaniu (10) dla węzła X_{ij} występują również stałe fizyczne węzłów sąsiednich (współczynniki przewodzenia ciepła).

Dla oszczędzania pamięci operacyjnej EMC budujemy dla węzła X^{ij} pomocniczy wektor $[X]$, którego składowymi będą elementy macierzy identyfikacyjnej $[S_{ij}]$. Składowe tego wektora umożliwiają przyporządkowanie węzłom sąsiadującym z X^{ij} odpowiadających im stałych fizycznych (rys. 4).

$$[\lambda] = [S_{i+1,j} \ S_{i,j+1} \ S_{i,j} \ S_{i,j-1} \ S_{i-1,j}] \Rightarrow \quad (12)$$

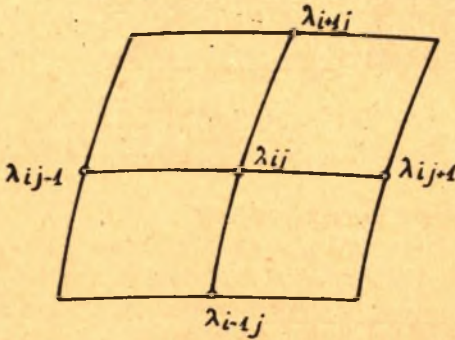
$$\Rightarrow [\lambda_{i+1,j} \ \lambda_{i,j+1} \ \lambda_{ij} \ \lambda_{i,j-1} \ \lambda_{i-1,j}]$$

gdzie:

$$\lambda_{kl} = S_{kl} \cdot \lambda_2 +$$

$$+ (1 - S_{kl}) \cdot \lambda_1, \quad S_{kl} \leq 1, \quad \lambda_{kl} = \lambda_p,$$

$$p = 4(1) \dots n, \quad S_{kl} = p > 1$$



Rys. 4. Uśrednione współczynniki przewodzenia

Dla $t > 0$ pojawia się Ω_2 i Ω_3 a tym samym i ich siatkowe aproksymacje Ω'_2 i Ω'_3 . Fakt ten rejestruje się zmianą funkcji identyfikacyjnej $S(X^{ij})$ w obrębie obszaru metalu. Mianowicie:

$$S(X^{ij}) \begin{cases} 0 & \text{dla } T_{ij}^{P+1} \geq T' \quad |S_{ij}^0| \leq 1 \\ \frac{T' - T_{ij}^{P+1}}{T' - T} & \text{dla } T'' < T_{ij}^{P+1} < T' \quad |S_{ij}^0| \leq 1 \\ 1 & \text{dla } T_{ij}^{P+1} \leq T'' \quad |S_{ij}^0| \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

jednocześnie

$$X^{ij} \in \begin{cases} \Omega'_1 & \text{dla } S = 0 \\ \Omega'_2 & \text{dla } 0 < S < 1 \\ \Omega'_3 & \text{dla } S = 1 \end{cases}$$

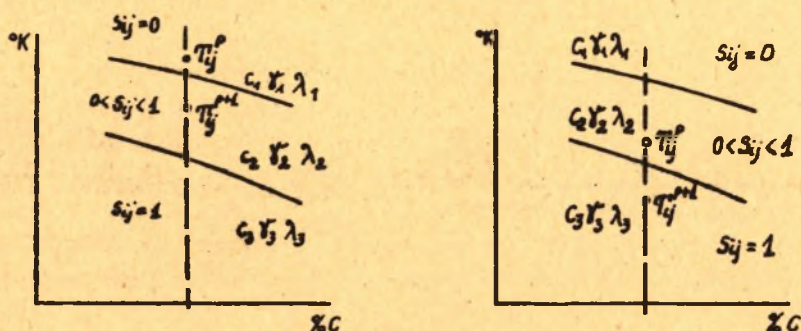
Konieczność określenia obszaru, do jakiego należy dany węzeł w obrębie odlewu, wynika ze zróżnicowanych własności stałych fizycznych w obszarach Ω'_1 , Ω'_2 i Ω'_3 .

W przypadku, gdy $T_{ij}^{P+1} < T'$ a $T_{ij}^P > T'$, węzeł przechodzi przez punkt nieciągłości modelu numerycznego i skorygowana wartość T_{ij}^{P+1} (rys. 5) wynosi:

$$T_{ij}^{P+1} = \frac{C_1 \cdot \bar{v}_1}{C_2 \cdot \bar{v}_2} (T_{ij}^{P+1} - T') + T' \quad (15)$$

gdzie:

T_{ij}^{P+1} - poprawiona temperatura w węźle X^{ij} w chwili $t + \Delta t$.



Rys. 5. Punkty nieciągłości modelu

Analogicznie, gdy $T_{ij}^{P+1} < T''$ a $T_{ij}^P > T''$ (rys. 5b)

$$T_{ij}^{P+1} = \frac{C_2 \cdot \bar{v}_2}{C_3 \cdot \bar{v}_3} (T_{ij}^{P+1} - T'') + T'' \quad (16)$$

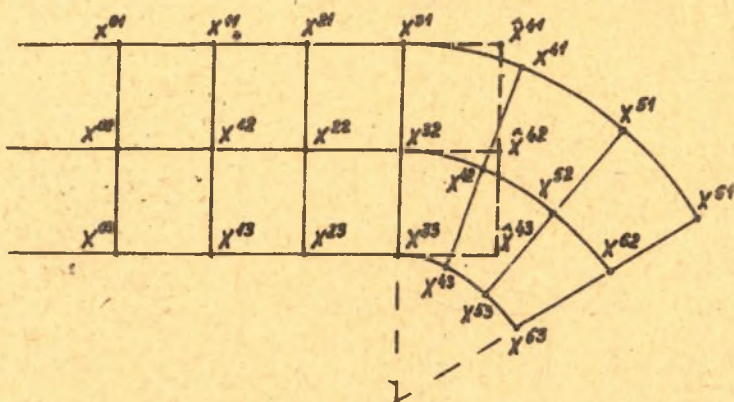
Po obliczeniu poprawionych wartości T_{ij}^{P+1} ponownie określa się funkcję identyfikacyjną S ze związków (13).

Jak łatwo zauważyć funkcja $S(X^{ij})$ w obrębie odlewu będzie spełniała jeszcze rolę informatora o kinetyce krzepnięcia, mianowicie jej wartość, czyli elementy macierzy identyfikacyjnej, będą objętościowymi udziałami fazy stałej w węźle odlewu. Z (11) i (13) wynika, że w chwili $t > 0$ funkcja identyfikacyjna przyjmie postać:

$$S(X^{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } X^{ij} \in \Omega'_1 \\ \frac{T' - T_{ij}^{P+1}}{T' - T''} & \text{dla } X^{ij} \in \Omega'_2 \\ 1 & \text{dla } X^{ij} \in \Omega'_3 \\ P & \text{dla } X^{ij} \in \Omega_p, p = 4(1)n \\ -2 & \text{dla } X^{ij} \notin \Omega \end{cases} \quad (17)$$

Obliczenia w dowolnej chwili t przeprowadza się dla wszystkich węzłów $X^{ij} \in \Omega$.

Przy stosowaniu, ze względu na złożony kształt układu, siatki różnicowej utworzonej przez dwa lub więcej układów współrzędnych węzły w pobliżu styku dwóch segmentów o różnej geometrii nie pokrywają się. W takich przypadkach konieczna jest interpolacja wartości temperatur w elementach zachodzących na siebie. Na rys. 6 pokazano przykładowo połączenie segmentu kołowego i prostokątnego.



Rys. 6. Łączenie segmentów siatki różnicowej

Punkty X^{31} , X^{32} , X^{33} znajdują się na granicy podziału. Dla wyznaczenia wartości temperatur w tych punktach w chwili $t + \Delta t$ konieczna jest znajomość wartości $T(X, t)$ w punktach X^{41} , X^{42} , X^{43} , stanowiących granicę przedłużenia siatki prostokątnej. Wartości wyznacza się metodą interpolacji lub ekstrapolacji na zbiorze wartości temperatur w otaczających węzłach obliczeniowych w chwili t :

$$\bar{T}_{41}^P = \bar{T}_{41}^P (T_{31}^P, T_{32}^P, T_{41}^P, T_{42}^P)$$

$$\bar{T}_{42}^P = \bar{T}_{42}^P (T_{41}^P, T_{42}^P) \quad (18)$$

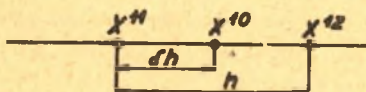
$$\bar{T}_{43}^P = \bar{T}_{43}^P (T_{42}^P, T_{43}^P, T_{52}^P, T_{53}^P)$$

W realizowanym modelu ograniczono się do związków liniowych.

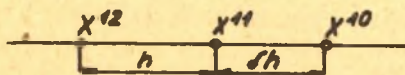
W przypadku wyznaczania wartości temperatury w punkcie 0, położonym na linii łączącej punkty 1 i 2 (rys. 7a)

$$T_{10}^P = (1 - \delta) T_{11}^P + \delta T_{12}^P, \quad 0 < \delta < 1, \quad (19a)$$

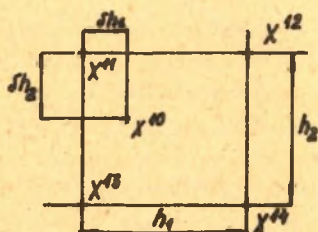
a)



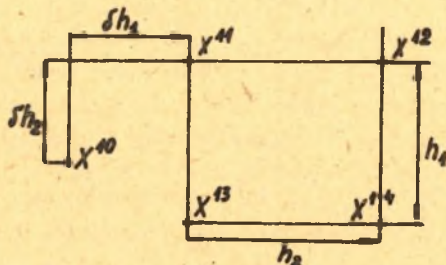
b)



c)



d)



Rys. 7. Interpolacja na przedłużeniach siatek

Dla ekstrapolacji na bazie wartości $T(X, t)$ w dwóch węzłach (rys. 7b) stosować należy wzór:

$$T_{10}^P = (1 + \delta) T_{11}^P - \delta T_{12}^P, \quad 0 < \delta < 1 \quad (19b)$$

Określenie temperatury na podstawie wartości funkcji w czterech węzłach drogą interpolacji (rys. 7c) lub ekstrapolacji (rys. 7d) wynika ze związków:

$$T_{10}^P = (1 - \delta_1)(1 - \delta_2) T_{11}^P + \delta_1(1 - \delta_2) T_{12}^P + (1 - \delta_1) \delta_2 T_{13}^P + \delta_1 \delta_2 T_{14}^P \quad (20a)$$

$$T_{10}^P = (1 + \delta_1)(1 - \delta_2) T_{11}^P - \delta_1(1 - \delta_2) T_{12}^P + (1 + \delta_1) \delta_2 T_{13}^P - \delta_1 \delta_2 T_{14}^P \quad (20b)$$

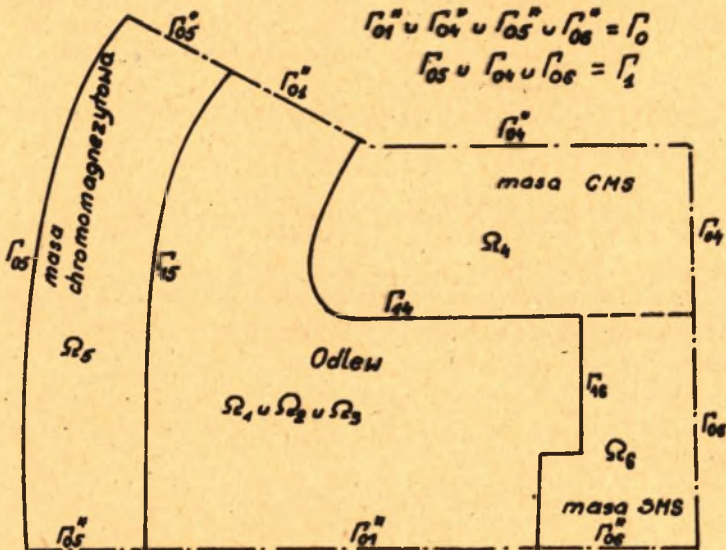
$$0 < \delta_1 < 1, \quad 0 < \delta_2 < 1$$

Model numeryczny procesu stygnięcia, opisany w niniejszym artykule, był wykorzystany do obliczeń układów o dużych wymiarach i złożonej geometrii.

W przypadku realizacji ww. modeli na maszynach cyfrowych o pamięci operacyjnej rzędu 20K konieczna jest segmentacja obszaru, zaś wprowadzonym umownie powierzchniom podziału należy przypisać odpowiednie warunki brzegowe.

Najwygodniej dokonać podziału wzdłuż linii adiabatycznych, ponieważ taki podział generuje bardzo prosty numerycznie warunek brzegowy. W dowolnym obszarze, w którym zachodzi proces wymiany ciepła, istnieje nieskończenie wiele linii izotermicznych, wzdłuż których $(\frac{\partial T}{\partial n})_{\Gamma} = 0$. Kontur z zadany warunkiem II rodzaju można więc utworzyć przyjmując zbiór węzłów tworzących linię ortogonalną z rodziną izoterm. W przypadku, gdy istnieją trudności z możliwie dokładnym intuicyjnym doбором linii podziału adiabatycznego, można zastosować procedurę iteracyjną, która szybko prowadzi do wyznaczenia zbioru węzłów brzegowych w segmentach obszaru Ω .

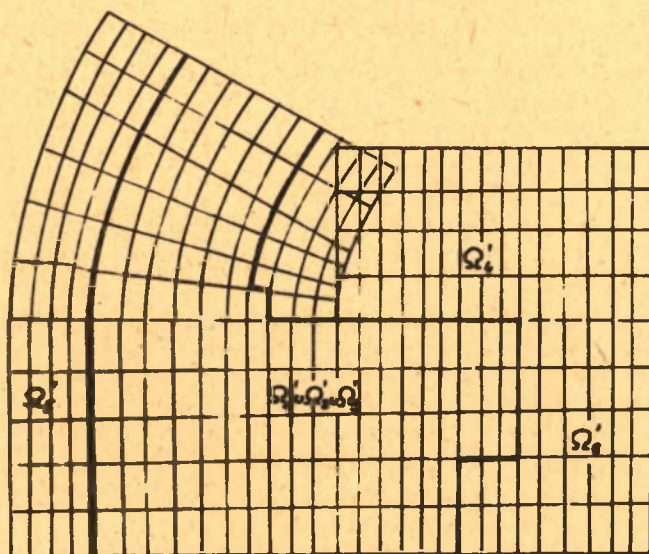
Na podstawie podanego modelu opracowano program obliczeniowy w języku BASIC, przeznaczony do realizacji na maszynie cyfrowej WANG - 2200.



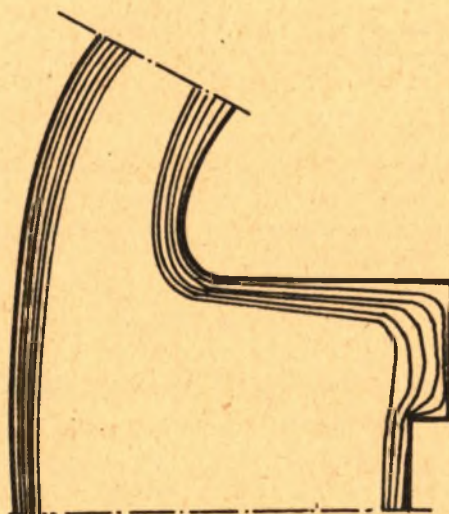
Rys. 8. Geometria układu odlew-forma

Przykładem wykorzystania programu może być obliczenie rozkładu temperatur i kinetyki krzepnięcia dla płaskiego układu Ω (rys. 8), przy warunkach brzegowych i początkowych danych związkami:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \\ T(x, t) \Big|_{\Gamma_1} = T_{ot} \\ T(x, 0) \Big|_{x \in \Omega_1} = T_{max} \\ T(x, 0) \Big|_{x \in \Omega_1} = T_f, \quad 1 = 4(1)n \end{array} \right. \quad (21)$$



Rys. 9. Siatka różnicowa dla obszaru z rys. 8



Rys. 10. Przykład obliczenia numerycznego (linie frontu krzepnięcia odnoszą się do czasów 1, 3, 5, 9, 15 min.)

Na układ nałożono siatkę jak na rys. 9. Jako dane wyjściowe przyjęto: $T_{max} = 1560$, $T_{ot} = 50$, $T_f = 50$, $T'' = 1470$, $T' = 1520$; oraz odpowiadające danym obszarom Ω_1 $l = 1$ (1) n stąke fizyczne, wymiary zgodne z rys. 8

w skali 1 : 5. Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie w postaci przebiegu frontu krystalizacji [6, 7] na rys. 10.

LITERATURA

- [1] Ruddle R.W.: The solidification of castings. The Inst. of metals, London 1957.
- [2] Kozdoba L.A.: Metody rieszzenia nieliniowych zadacz ciepłowodnosti. Izd. Nauka, Moskwa 1975.
- [3] Szargut J., Mochnacki B.: Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia wlewka stali uspokojonej. Arch. Hut. 3/1971, 270-289.
- [4] Mochnacki B.: Proces stygnięcia i powstawania jamy skurczowej w odlewach, ZNPSl. Odlewnictwo 6 - s. 25 - 37, Gliwice 1973.
- [5] Mochnacki B.: Zastosowanie minikomputera Wang 2200 do numerycznego rozwiązania problemu krzepnięcia wlewków wielokątnych. ZNPSl, Odlewnictwo 8 - Gliwice 1975, s. 109 - 122.
- [6] Grzymkowski R.: Modele numeryczne krzepnięcia dużych odlewów. Wybrane zagadnienia z odlewnictwa (w druku).
- [7] Model matematyczny procesu zasilania i krzepnięcia odlewu stożka wielokopiecowego. Sprawozdanie z pracy NB dla Huty Dzierżyńskiego w Dąbrowie Górniczej. Inst. Odl. 1976. (niepublikowane).

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ПЕСЧАНОЙ ФОРМЕ

Р е з ю м е

Представлено цифровое осуществление математической модели описывающей неустановившееся движение тепла в системе отливка-форма. Составленный на основе явных дифференциальных схем алгоритм был использован для расчёта отвердевания систем сложной конфигурации.

THE NUMERICAL MODELLING OF SOLIDIFICATION OF A CAST WITH A COMPOUND GEOMETRY IN A SAND MOULD

S u m m a r y

The subject of this work is an outline of the numerical realization of a mathematical model describing an unstationary heat flow in a cast-mould system. The algorithm, obtained on the basis of open differential schemes has been used for the calculations of solidification of systems with a compound geometry.