

Bohdan MOCHNAKI

Bronisław ORTYL

MODELOWANIE NUMERYCZNE PROCESU ODLEWANIA CIĄGŁEGO

METODĄ WĘDRUJĄCEGO PRZEKROJU PRZY ZMIENNEJ W CZASIE SIATCE RÓŻNICOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono model matematyczny i schemat rozwiązania numerycznego problemu krzepnięcia wlewa ciągłego. Aproxymację różnicową równań różniczkowych utworzono na bazie operatorów $\Delta^2 U$, zapisanych w siatce o zmiennym kroku przestrzennym. Otrzymane rozwiązanie w przekroju poprzecznym (przemierzającym się z prędkością v) stanowi podstawę do konstrukcji izoterm w obszarze przestrzennym wlewa ciągłego.

1. Opis matematyczny procesu odlewania ciągłego wlewa stalowego

Obszar krzepnięcia metalu tworzącego wlewki ciągły jest sumą objętości zajmowanych przez fazę ciekłą, fazę przejściową i fazę stałą.

Oznaczając przez T' i T granice podziału temperatur, w których zachodzi proces krystalizacji, otrzymujemy oczywiste kryterium identyfikacji podobszarów, a mianowicie:

$$P(X) \in \Omega_1 \Leftrightarrow U(X,t) \geq T'$$

$$P(X) \in \Omega_2 \Leftrightarrow U(X,t) \in (T', T'') \quad (1)$$

$$P(X) \in \Omega_3 \Leftrightarrow U(X,t) \leq T''$$

gdzie: $P(X)$ punkt z obszaru wlewa, $\Omega_{1,2,3}$ podobszary fazy ciekłej, przejściowej i stałej, U - temperatura, t - czas.

Procesy cieplne zachodzące w podobszarach Ω_m , $m = 1, 2, 3$ opisane są równaniami Fouriera-Kirchoffa [1]:

$$\rho_m c_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + w \text{ grad } U \right) = \text{div } \lambda_m \text{ grad } U, \quad (2)$$

gdzie:

c_m , ρ_m , λ_m - oznaczają właściwą pojemność cieplną, gęstość masy i współczynnik przewodzenia w obszarze Ω_m ,
 w - wektor prędkości przesuwu wlewka ciągłego.

Poszukiwana funkcja U spełnia na brzegu obszaru wlewka warunki typu:

$$\varphi \left[U(X,t), \frac{\partial U(X,t)}{\partial n} \right] = 0; X \in \Gamma_0 \quad (3)$$

Dany jest również warunek początkowy

$$U(X,0) = U_0(X); X \in \Omega_m, m = 1,2,3 \quad (4)$$

Jedną z efektywnych metod [1] [3] rozwiązania sformułowanego wyżej problemu jest pominięcie w równaniu (2) składnika w grad U i poszukiwanie niestacjonarnego pola temperatury w przekroju poprzecznym wlewka, przy czym warunki na brzegu obszaru płaskiego zmieniają się w czasie, tak jak to wynika z prędkości przesuwu wyróżnionego przekroju wlewka przez urządzenie do odlewania ciągłego (strefa bezpośredniego styku z krystalizatorem, przepływ ciepła przez szczelinę gazową itd.).

Pominięcie składowej osiowej strumienia ciepła powoduje błąd nie rzutujący wyraźnie na jakość otrzymanych rezultatów [5].

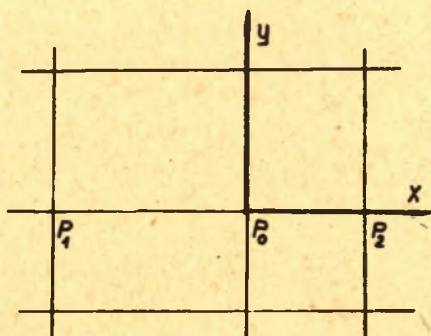
2. Rozwiązanie numeryczne problemu odlewania ciągłego metodą "wędrującego" przekroju

Proponowana przez autorów niniejszego artykułu metoda rozwiązania problemu jest pewną odmianą metody różnic skończonych, przy czym w odróżnieniu od metod opisanych w pracach dotyczących modelowania numerycznego procesów krzepnięcia [1,2,3,4] wprowadza się dodatkowy zbiór węzłów siatki różnicowej, których położenie jest zmienne w czasie.

2.1. Tworzenie operatorów różnicowych w siatce o zmiennym kroku przestrzennym

Rozpatrywać będziemy zbiór trzech kolejnych węzłów siatki różnicowej o współrzędnych $P_1(X_{i-1}, Y_j)$, $P_0(X_i, Y_j)$, $P_2(X_{i+1}, Y_j)$ jak na rys. 1.

Wartości funkcji w węzłach P_1 , P_0 , P_2 wynoszą odpowiednio: $U_{i-1,j}$, U_{ij} , $U_{i+1,j}$.



Rys. 1. Węzły siatki różnicowej o zmiennym kroku

Funkcję interpolującą w lokalnym układzie współrzędnych, związanym z punktem P₀ można zapisać w postaci:

$$U(x) \Big|_{\substack{y=y_j \\ t=t_\Delta \\ x \in [x-h_1, x+h_1]}} = [1, x, x^2] \int_x \cdot \begin{bmatrix} U_{i-1,j} \\ U_{1j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

$$\int_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-h_2}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{h_2-h_1}{h_1 h_2} & \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} \\ \frac{1}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{1}{h_1 h_2} & \frac{1}{h_2(h_1+h_2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

skąd po dwukrotnym zróżniczkowaniu i podstawieniu $x = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sim 2 \left[\frac{U_{i-1,j}}{h_1(h_1+h_2)} - \frac{U_{1j}}{h_1 h_2} + \frac{U_{i+1,j}}{h_2(h_1+h_2)} \right] \quad (7)$$

Analogicznie

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx 2 \left[\frac{U_{i,j-1}}{k_1(k_1+k_2)} - \frac{U_{ij}}{k_1 k_2} + \frac{U_{i,j+1}}{k_2(k_1+k_2)} \right] \quad (8)$$

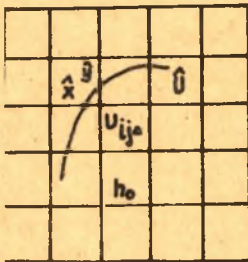
Zauważmy, że dla $h_1=h_2=h$ lub $k_1=k_2=k$ dochodzi się do znanych aproksymacji różnicowych pochodnych rzędu II typu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} \quad (9)$$

2.2. Lokalizacja izotermy w obszarze wlewka

Oznaczmy przez $\{U_{i,j,\Delta}\}$ zbiór wartości funkcji U w węzłach siatki różnicowej, nałożonej na przekrój poprzeczny wlewka ciągłego (rys. 2)

Dla każdego węzła wewnętrznego P_{ij} obszaru Ω rozwiązuujemy równania



$$[1, x, x^2] \int_x \begin{bmatrix} U_{i-1,j} \\ U_{ij} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix}_{t=t_\Delta} = \hat{U} \quad (10)$$

Rys. 2. Przebieg izotermy \hat{U}

$$[1, y, y^2] \int_y \begin{bmatrix} U_{i,j-1} \\ U_{ij} \\ U_{i,j+1} \end{bmatrix}_{t=t_\Delta} = \hat{U} \quad (11)$$

gdzie: \int_y określone jest przez (6) po podstawieniu $h = k$.

Żadamy, aby znalezione rozwiązania mieściły się w przedziale

$$\begin{aligned} \hat{x} &\in [x_{i-1,j}, x_{i+1,j}] \\ \hat{y} &\in [y_{i,j-1}, y_{i,j+1}] \end{aligned} \quad (12)$$

Otrzymujemy w ten sposób na liniach tworzących prostokątną siatkę różnicową zbiór wartości lokalnych (związanych z węzłem P_{ij}) współrzędnych, odpowiadających wybranej izotermie \hat{U} .

Podstawiając w miejsce U wartości T' i T'' otrzymujemy dla każdego interwału czasu współrzędne dodatkowych węzłów siatki różnicowej, stanowiących węzły brzegowe między podobszarami $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ z zadanymi warunkami I rodzaju:

$$U(x_{ij}, y_{ij}, t_{\Delta}) = T' \quad (13)$$

$$U(x_{ij}, y_{ij}, t_{\Delta}) = T''$$

W ten sposób każdemu z węzłów siatki stacjonarnej można jednoznacznie przyporządkować wartości stałych fizycznych c_m, ρ_m, λ_m oraz wektor $\bar{H}_{ij} [h_{1ij}, h_{2ij}, k_{1ij}, k_{2ij}]^*$, którego współrzędne są wielkościami siatki w chwili t w węzle P_{ij} .

2.3. Model różnicowy

Zgodnie z zasadą jawnych schematów różnicowych równania określające funkcję U w punktach wewnętrznych obszaru będą następujące:

$$c_m \rho_m \frac{\bar{U}_{ij} - U_{ij}}{\Delta t} = 2 \bar{\lambda}_m \left[\frac{U_{i-1,j}}{h_1(h_1+h_2)} + \frac{U_{i+1,j}}{h_2(h_1+h_2)} + \frac{U_{i,j-1}}{k_1(k_1+k_2)} + \frac{U_{i,j+1}}{k_2(k_1+k_2)} - U_{ij} \left(\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{k_1 k_2} \right) \right] \quad (14)$$

gdzie:

$$U_{ij} = U(x_i, y_j, t_{\Delta})$$

$$\bar{U}_{ij} = U(x_i, y_j, t_{\Delta+1})$$

$\bar{\lambda}_m$ - uśredniona wartość współczynnika przewodzenia w rozpatrywanym segmencie siatki.

Warunkiem stabilności przedstawiono rozwiązania numerycznego jest, aby

$$P_{ij} \in \Omega \left[1 - \frac{2 \bar{\lambda}_m}{c_m \rho_m} \left(\frac{1}{k_1 h_2} + \frac{1}{k_1 k_2} \right) \right] \geq 0 \quad (15)$$

* Jak wykazują próby wykonywane przy uruchamianiu programu, różnice między lokalizacją brzegu U na bazie węzłów $P_{i-1,j}, P_{ij}, P_{i+1,j}$, a następnie tego samego punktu w segmencie $P_{ij}, P_{i+1,j}, P_{i+2,j}$ są takiego rzędu, że równania sprawdzające typu $h_{2ij} + h_{1i+1,j} = h_0$ spełnione są z defektem max %

Ponieważ przy zmniejszającym się lokalnym kroku siatki w kierunku $\pm x \pm y$ wartość interwału czasu liczona dla ww. węzła dąży do zera, należy przyjąć, że gdy jedna ze składowych wektora \vec{H}_{ij}

$$h_{1ij} \cup h_{2ij} \cup k_{1ij} \cup k_{2ij} < \epsilon_{nk}, \quad (16)$$

to węzeł wewnętrzny P_{ij} staje się węzłem brzegowym z warunkiem (13).

Problem modelowania warunków brzegowych w zagadnieniach odlewania ciągłego przy zastosowaniu przedstawionej metody nie różni się zasadniczo od rozwiązań przedstawionych m.in. w [3, 4].

LITERATURA

- [1] Ruddle R.W.: The solidification of castings. The Inst. of metals, London 1957.
- [2] Kozdoba L.A.: Metody rieszenija nieliniejnych zadacz tiepłoprowodnosti. Izd. Nauka, Moskwa 1975.
- [3] Szargut J., Mochnacki B.: Różnicowy model matematyczny krzepnięcia wlewka stali uspokojonej. Arch. Hut. 3/1971, 270-289.
- [4] Mochnacki B.: Zastosowanie minikomputera Wang 2200 do numerycznego modelowania ... ZN Pol. Sl. Odlewnictwo 8, Gliwice 1975, 109-122.
- [5] Nikitienko N.I.: Issledowanije niestacionarnych processiow tiepla i massoobmiena metodom sietok. Kiev 1971.

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ
ПС МЕТОДУ ПЕРЕДВИГАЮЩЕГОСЯ СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ
ВО ВРЕМЕНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СЕТКЕ

Резюме

Представляется математическая модель и схема решения цифрового вопроса отвердевания слитков. Аппроксимирование дифференциальных уравнений было построено на базе операторов $\Delta^2 U$ записанных в сетке с переменным пространственным шагом. Полученное решение в поперечном сечении (перемещающимся со скоростью v) является основой для построения изотерм в пространственной зоне непрерывного слитка.

THE NUMERICAL MODELLING OF CONTINUOUS CASTUNG BY A MIGRATING
SECTION METHOD WITH A TIME-VARIABLE DIFFERENTIAL NETWORK

S u m m a r y

A mathematical model and a scheme of numerical solution of the continuous cast ingot solidification have been outlined. The differential approximation of the differential equations has been obtained and the basis of $\Delta^2 U$ operators recorded in the network with variable space step. The resultant solution in the cross-section (being dislocated with the rate v) is a basic value of an isothermal lines construction in the space region of a continuous cast ingot.