

Małgorzata BIEDROŃSKA

WYKORZYSTANIE FUNKCJI GIĘTYCH W OBLICZENIACH CIEPLNYCH PROCESU CIĄGŁEGO ODLEWANIA STALI

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis matematyczny i symulację numeryczną procesu ciągłego odlewania stali, przy wykorzystaniu sześciennych funkcji giętych typu B-spline.

WSTĘP

Tematem pracy jest opis matematyczny i symulacja numeryczna procesu ciągłego odlewania stali, przy wykorzystaniu sześciennych funkcji giętych typu B-spline.

Modelowany układ odpowiada technologii wytwarzania wielkogabarytowych wlewków ciągłych, zaprojektowanej w ZSRR i przewidzianej do uruchomienia w Kombinacie Metalurgicznym Huta Katowice. Przykładem zastosowania zaproponowanego algorytmu są obliczenia numeryczne zrealizowane na EMC WANG 2200, dotyczące wyznaczania kinetyki krzepnięcia wlewka ciągłego przy różnych warunkach chłodzenia w strefach.

1. TECHNOLOGIA CIĄGŁEGO ODLEWANIA STALI

Technologia przetwarzania ciekłego metalu, a w szczególności technologia ciągłego odlewania stali, stale ulega modyfikacji. Zauważa się dużą różnorodność typów urządzeń do odlewania ciągłego. Można wśród nich wyszczególnić trzy zasadnicze grupy, a co za tym idzie trzy metody COS. Do pierwszej grupy zaliczyć można urządzenia, w których krystalizator jest ruchomy i przesuwa się wraz z wlewkiem. Drugą grupę stanowią konstrukcje, w których krystalizator tylko częściowo przesuwa się wraz z wlewkiem, zaś trzecią urządzenia ze stacjonarnym krystalizatorem. Ta ostatnia grupa obejmuje urządzenia pionowe, radialne i horyzontalne. Na rozwój tej technologii wpływa wiele istotnych czynników, między innymi: poprawa jakości wlewków, większa oszczędność materiału w wyniku zmniejszenia odpadów, uproszczenie dalszych procesów obróbki cieplnej oraz większa możliwość automatyzacji.

Sposoby otrzymywania jakościowo dobrego wlewka opierają się głównie na doświadczeniach praktycznych, zaś teoria procesu ciągłego odlewania nie jest jeszcze dokładnie opisana.

Wzrost zainteresowania modelami matematycznymi procesu COS wiąże się z tym, że wykorzystując opis matematyczny można zbadać wpływ parametrów fizycznych i technologicznych na przebieg procesu oraz zoptymalizować warunki jego realizacji. Możliwe jest zatem zwiększenie wydajności procesu, podanie przyczyn powstawania wad wlewków, poprawianie jakości wlewków poprzez optymalizację układów chłodzenia oraz opracowanie systemów sterowania. Taka analiza problemu może mieć zastosowanie przy projektowaniu nowych systemów i urządzeń do ciągłego odlewania.

2. FUNKCJE GIĘTE I NIEKTÓRE ICH WŁASNOŚCI

Przy ustalonej siatce Δ_n : $a : x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ sześcienną funkcję giętą nazywa się funkcję, która w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest wielomianem stopnia trzeciego, zaś w $[a, b]$ jest klasy C^2 . Niektóre własności funkcji giętych oraz ich zastosowania podano m.in. w pracach [1, 2, 3].

Aby podać szczególnie dogodną do obliczeń numerycznych postać funkcji giętej wprowadza się sześć dodatkowych węzłów

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \quad x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3} \quad (1)$$

i przyjmuje się następującą definicję funkcji typu B-spline $B_1(x)$ $i = 1, 0, \dots, n+1$

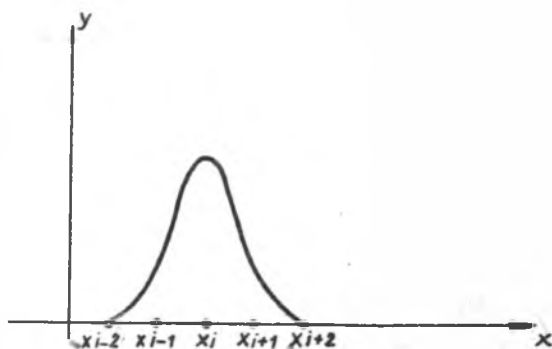
$$B_1(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x-x_{i-2})^3 & ; \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x-x_{i-1}) + 3h(x-x_{i-1})^2 - 3(x-x_{i-1})^3; & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1}-x) + 3h(x_{i+1}-x)^2 - 3(x_{i+1}-x)^3; & [x_i, x_{i+1}] \ni x(2) \\ (x_{i+2}-x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

gdzie h jest krokiem siatki Δ_n (zakłada się, że podział przedziału $[a, b]$ jest równomierny).

Wykres funkcji $B_1(x)$ przedstawia rys. 1. Tabela 1 zawiera wartości funkcji $B_1(x)$ i ich pierwszych i drugich pochodnych w węzłach siatki.

Tabela 1

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$B_1(x)$	0	1	4	1	0
$B_1'(x)$	0	$\frac{1}{6h}$	0	$-\frac{1}{6h}$	0
$B_1''(x)$	0	$\frac{1}{2h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{1}{2h^2}$	0

Rys. 1. Wykres funkcji $B_1(x)$

Zbiór funkcji $\{B_{-1}, B_0, \dots, B_{n+1}\}$ stanowi bazę przestrzeni funkcji giętych $S_3(x; \Delta_n)$ [4].

Każdą funkcję giętą można więc przedstawić w postaci

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} k_i B_i(x) \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

przy czym łatwo zauważyć, że z każdym przedziałem $[x_i, x_{i+1})$ związane są cztery niezerowe funkcje B-splina $B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, B_{i+2}$.

Tak więc dla

$$x \in (x_i, x_{i+1}) \quad S_3(x) = k_{i-1} B_{i-1}(x) + k_i B_i(x) + k_{i+1} B_{i+1}(x) + k_{i+2} B_{i+2}(x), \quad (4)$$

natomiast dla

$$x = x_i \quad S_3(x_i) = k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1}. \quad (5)$$

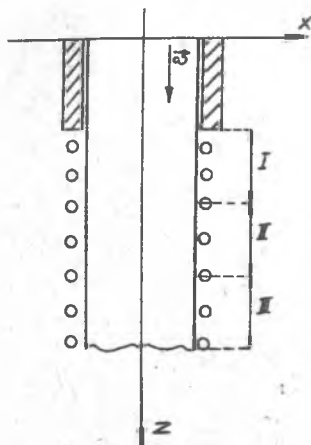
3. OPIS MATEMATYCZNY PROCESU COS I JEGO NUMERYCZNA APROKSYMACJA

Przedstawione zostanie modelowanie pola temperatury w przekroju podłużnym wlewka ciągłego (rys. 2).

Włówek przesuwa się wzdłuż osi Oz z prędkością $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Rozkład temperatury w tym układzie opisany jest równaniami

$$c_k \rho_k \frac{DU}{Dt} = \lambda_k \nabla^2 U \quad k = 1, 2, 3, \quad (6)$$

gdzie c_k, ρ_k, λ_k są parametrami termofizycznymi podobszarów odpowiednio fazy ciekłej, przejściowej i stałej, a $\frac{DU}{Dt}$ oznacza pochodną substancjalną temperatury U .



Rys. 2. Przekrój podłużny wlewka ciągłego

$$\frac{DU}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \overline{\text{grad}U} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (7)$$

Wykorzystując fakt, że $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ równanie (6) otrzymuje się w postaci:

$$c_k \rho_k \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \omega \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Ponieważ w omawianym układzie oddawanie ciepła zachodzi głównie wzdłuż osi Ox , zaś wzdłuż osi Oz jest stosunkowo niewielkie, więc można przyjąć, że

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx 0.$$

Tak więc równanie (8) przyjmuje postać:

$$c_k \rho_k \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \omega \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \lambda_k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (9)$$

W przekroju wlewka wyróżnia się warstwy o grubości k , a w warstwach węzły o odległości h (rys. 3).

Zastosowana zostanie następująca aproksymacja:



Rys. 3. Układ węzłów w przekroju wlewka

$$i = 0, 1, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(i,j)} \sim \frac{U_{11}^{p+1} - U_{11}^p}{\Delta t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{(i,j)} \sim \frac{U_{1+1,1}^{p+1} - U_{1,1}^{p+1}}{k} \quad (11)$$

gdzie Δt jest krokiem siatki czasu.

Operator występujący po lewej stronie równania 9 przyjmuje postać:

$$LU \Big|_{(i,j)} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \omega \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{(i,j)} = \frac{U_{11}^{p+1} - U_{11}^p}{\Delta t} + \frac{U_{1+1,1}^{p+1} - U_{1,1}^{p+1}}{k} \quad (12)$$

Więząc kroki siatek zależność

$$k = \omega \cdot \Delta t,$$

równanie (7) sprowadza się do

$$LU \Big|_{(i,j)} = \frac{U_{i+1,j}^{p+1} - U_{i,j}^p}{\Delta t} \quad (13)$$

Tak więc równanie (9) otrzymuje się w postaci

$$c_{ij}^p \rho_{ij}^p \frac{U_{i+1,j}^{p+1} - U_{i,j}^p}{\Delta t} = \lambda_{ij}^p \frac{\partial^2 U_{i+1,j}^{p+1}}{\partial x^2} \quad (14)$$

Idea numerycznego rozwiązania tak sformułowanego problemu polega na poszukiwaniu wartości temperatury w $i+1$ warstwie wlewa ciąglego (odpowiadającej czasowi t^{p+1}) na podstawie wyznaczonego uprzednio (lub wynikającego z warunku początkowego) pola temperatury. Dla $i=0$ przyjęto $U(0,j) = U_{zal}$, więc w schemacie opisanym równaniami 14 niewiadomymi są wartości temperatur w węzłach warstwy $i=1$, czyli U_{1j}^1 . Zbiór tych wartości stanowi z kolei warunek początkowy dla obliczeń w warstwie $i=2$ itd.

W chwili $p+1$ -szej, czyli w $i+1$ -szej warstwie funkcję U aproksymuje się funkcję $S_3(x)$, otrzymując:

$$c_{ij}^p \rho_{ij}^p \frac{S_3(x_j) - U_{i,j}^p}{\Delta t} = \frac{\partial^2 S_3(x_j)}{\partial x^2} \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (15)$$

Układ równań (15) uzupełniają warunki brzegowe zadane w punktach x_0 i x_n

$$a_1 U(x_0) + a_2 U'(x_0) = a_0 \quad (16)$$

$$b_1 U(x_n) + b_2 U'(x_n) = b_0 \quad (17)$$

oraz warunek początkowy

$$U(x, 0) = U_0(x). \quad (18)$$

Ponieważ

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} k_i B_i(x)$$

$$S_3'(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} k_i B_i'(x)$$

$$S_3''(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} k_i B_i''(x)$$

układ równań (15), (16), (17) otrzymuje się w postaci

$$\sum_{i=-1}^{n+1} k_i (B_i(x_j) - \frac{\Delta t \lambda_1}{c_j \rho_j} B_i''(x_j)) = U^p(x_j) \quad j=0,1,\dots,n$$

$$\sum_{i=-1}^{n+1} k_i (a_1 B_i(x_0) + a_2 B_i'(x_0)) = a_0 \quad (19)$$

$$\sum_{i=-1}^{n+1} k_i (b_1 B_i(x_n) + b_2 B_i'(x_n)) = b_0$$

Postać macierzowa tego układu równań przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & B_1 & A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots A_n & B_n & A_n \\ A & B & C & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{-1} \\ k_0 \\ \vdots \\ k_n \\ k_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^p(x_0) \\ \vdots \\ U^p(x_n) \\ a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

gdzie:

$$A_j = 1 - \frac{6}{h^2} \frac{\Delta t \lambda_1}{c_j \rho_j} \quad j = 0, \dots, n,$$

$$B_j = 4 + \frac{12}{h^2} \frac{\Delta t \lambda_1}{c_j \rho_j} \quad j = 0, \dots, n,$$

$$A = a_1 - \frac{3}{h} a_2 \quad B = 4a_1 \quad C = a_1 + \frac{3}{h} a_2,$$

$$D = b_1 - \frac{3}{h} b_2 \quad E = 4b_1 \quad F = b_1 + \frac{3}{h} b_2.$$

Układ równań (20) doprowadza się do układu o macierzy trójkątnej, a ten rozwiązuje się za pomocą metody progonki. Tak więc algorytm wyznaczania wielkości $k_{-1}, k_0, \dots, k_{n+1}$ przedstawia się następująco:

$$1. \quad m_0 = \frac{B_0 C - A_0 B}{A_0 (A-C)} \quad n_0 = \frac{A_0 a_0 - C U^p(x_0)}{A_0 (A-C)}$$

$$m_n = \frac{B_n D - A_n E}{A_n (F-D)} \quad n_n = \frac{A_n b_0 - D U^p(x_n)}{A_n (F-D)}$$

$$2. \quad \alpha_i = - \frac{A_i}{A_i \alpha_{i-1} + B_i} \quad \beta_i = \frac{U^P(x_i) - A_i \beta_{i-1}}{A_i \alpha_{i-1} + B_i} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_0 \quad \beta_{-1} = \beta_0$$

$$3. \quad k_{n+1} = \frac{n \beta_n + \alpha_n}{1 - n \alpha_n}$$

$$4. \quad k_i = \alpha_i k_{i+1} + \beta_i \quad i = n, n-1, \dots, 0, -1$$

Wykorzystując wzór (5) wyznacza się nowe wartości temperatury w węzłach siatki kolejnej warstwy

$$S_3(x_i) = k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Do rozważań przyjęto przekrój podłużny radialnego wielkogabarytowego wlewka ciągłego o grubości 0,18 m. Ponieważ promień krzywizny był bardzo duży, więc wlewek można było traktować jako płytę. Urządzenie COS składało się ze strefy chłodzenia pierwotnego, którą stanowił krystalizator o długości 0,9 m oraz stref chłodzenia wtórnego o długościach 2,2 m, 2,65 m i 5 m.

W strefie chłodzenia pierwotnego na zewnętrznej powierzchni wlewka przyjęto warunek brzegowy II rodzaju w postaci [5]

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = 4190 (640 - 53 \sqrt{t}) \quad [W/m^2],$$

gdzie t jest czasem przebywania poprzecznego przekroju wlewka w krystalizatorze.

W sektorach chłodzenia wtórnego przyjęto współczynniki wnikania ciepła [5]

$$\alpha_I = 330$$

$$\alpha_{II} = 157$$

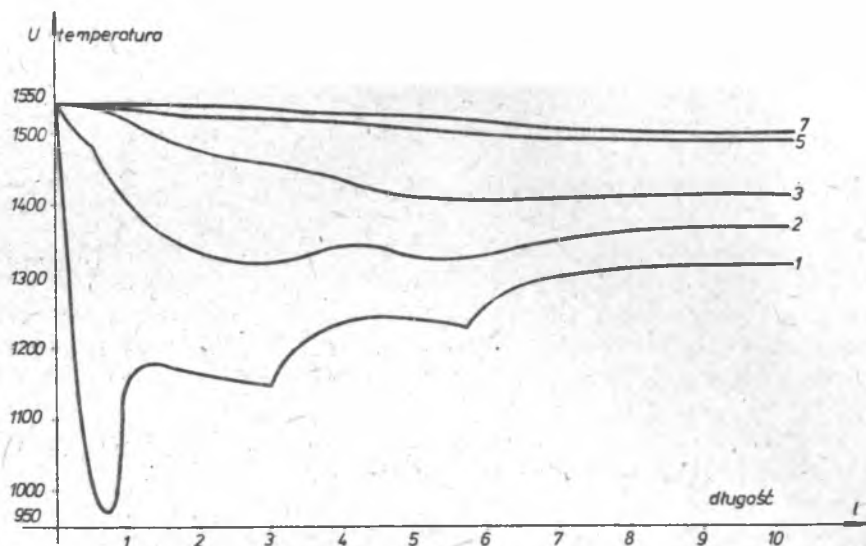
$$\alpha_{III} = 68$$

w jednostkach układu SI.

Temperatura zalewania, którą przyjęto jako temperaturę pierwej od góry warstwy wypełniającej krystalizator wynosiła 1540°C. Materiałem odlewana była stal węglowa, dla której przyjęto następujące dane:

$U < 1445^{\circ}$	$c = 690$	$\rho = 7500$	$\lambda = 29$
$U > 1500^{\circ}$	$c = 837$	$\rho = 7000$	$\lambda = 23$
$U \in < 1445^{\circ}, 1500^{\circ} >$	$c = 5635$	$\rho = 7250$	$\lambda = 26$

Prędkość wyciągnięcia wlewka wynosiła $\omega = 0.016667$ m/s. Rys. 4 przedstawia krzywe rozkładu temperatury w rozpatrywanym przekroju podłużnym dla 7 węzłów w poszczególnych warstwach wlewka.



Rys. 4. Krzywe rozkładu temperatury w przekroju podłużnym wlewka

LITERATURA

- [1] Biedrońska M., Grzymkowski R., Mochnacki B.: Numeryczne rozwiązanie problemu przewodnictwa przy wykorzystaniu funkcji giętych, *Mechanika i Komputer*, IPPT PAN Warszawa (przyjęto do druku).
- [2] Mochnacki B., Biedrońska M.: O pewnej metodzie przybliżonego rozwiązania problemu krzepnięcia, *ZN Pol. Śl. Mat.-Fiz.*, Z. 36, 1979.
- [3] Sprawozdanie z Międzyresortowego Problemu Badań Podstawowych nr 20 (zadanie 20.04.04), Instytut Odlewnictwa, Gliwice 1979.
- [4] Prenter P.M.: *Splines and variational method*, Colorado State University.
- [5] Lait J.E., Brimacombe J.K.: *Mathematical modeling of heat flow in the continuous casting of steel Ironmaking and Steelmaking t. I.* 1974, ss. 90-97.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙНОВ В ТЕПЛОВЫХ ИСЧИСЛЕНИЯХ
ПРОЦЕССА НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ СТАЛИ

Р е з ю м е

Темой работы являются математическое описание и численная симуляция процесса непрерывного литья стали при использовании кубических В-сплайнов.

THE APPLICATION OF SPLINE FUNCTIONS IN HEAT CALCULATIONS
OF THE PROCESS OF CONTINUOUS CASTING OF STEEL

S u m m a r y

The paper presents a mathematical description and a numerical simulation of the process of continuous casting of steel using cubic B-splines.