

Bohdan MOCHNACKI

METODA ELIMINACJI WĘZŁÓW BRZEGOWYCH W MODELACH
RÓZNICOWYCH PROBLEMÓW PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewien sposób różnicowej aproksymacji warunków brzegowych w zagadnieniach przewodnictwa cieplnego, szczególnie dogodny w realizacji obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej.

1. WSTĘP

Rozwiązanie numeryczne zagadnienia przewodnictwa cieplnego w jednorodnym obszarze Ω , którego parametry termofizyczne wynoszą odpowiednio $\lambda = \lambda(T)$, $c = c(T)$, $\rho = \rho(T)$, gdzie λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, c - właściwą pojemnością cieplną, ρ - gęstością masy, zaś T - temperaturą, sprowadza się do konstrukcji pewnych algorytmów przybliżonego wyznaczania zmiennego w czasie i przestrzeni pola temperatury, spełniającego w obszarze Ω równanie różniczkowe

$$c(T)\rho(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda(T) \operatorname{grad} T(x,t), \quad (1)$$

zaś na brzegu Γ warunki w postaci:

$$A(x,t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} + B(x,t)T(x,t) = C(x,t) \quad (2)$$

Dany jest również warunek początkowy zadania

$$T(x,0) = T_0(x) \quad (3)$$

W równaniach (1), (2), (3) przez x, t oznaczono współrzędne przestrzenne i czas, n jest wektorem normalnym do brzegu Γ obszaru Ω w punkcie $P(x) \in \Gamma$, A, B, C - funkcje zadane na brzegu rozpatrywanego obszaru.

W zagadnieniach praktycznych warunek (2) sprowadza się do trzech szczególnych przypadków

$$P(x) \in \Delta \Gamma_I; \quad A(x,t) = 0; \quad T(x,t) = \varphi(x,t) \quad (4)$$

$$P(X) \in \Delta\Gamma_{II}; \quad B(X, t) = 0; \quad \frac{\partial T(X, t)}{\partial n} = \psi(X, t) = -\frac{\dot{q}(X, t)}{\lambda} \quad (5)$$

$$P(X) \in \Delta\Gamma_{III}; \quad -\lambda \frac{\partial T(X, t)}{\partial n} = \alpha [T(X, t) - T_{ot}] \quad (6)$$

Warunek brzegowy typu (4) nazywany jest warunkiem brzegowym I rodzaju, zaś funkcja $\varphi(X, t)$ jest zadany rozkładem temperatury na wycinku $\Delta\Gamma_I$ konturu $\Gamma = \Delta\Gamma_I \cup \Delta\Gamma_{II} \cup \Delta\Gamma_{III}$. Znajomość pochodnej normalnej funkcji $T(X, t)$ na $\Delta\Gamma_{II}$ jest równoznaczna z określeniem warunku brzegowego dotyczącego jednostkowego strumienia ciepła \dot{q} w otoczeniu $P(X) \in \Delta\Gamma_{II}$, doprowadzanego lub odprowadzanego z obszaru Ω .

Warunek brzegowy III rodzaju opisany równaniem (6) wynika z postulatu ciągłości strumienia ciepła między obszarem a otoczeniem, przy czym α jest współczynnikiem wnikania, zaś T_{ot} - temperaturą płynu omywającego obszar.

Jeżeli rozpatrywany obszar nie jest jednorodny i stanowi złożenie np. dwóch podobszarów $\Omega_1 \cup \Omega_2$, to na wspólnym brzegu zadany jest warunek typu

$$P(X) \in \Gamma_{12}; \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1(X, t)}{\partial n} = \frac{T_1(X, t) - T_2(X, t)}{R(X, t)} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(X, t)}{\partial n} \quad (7)$$

gdzie $R(X, t)$ jest oporem cieplnym styku.

Dla kontaktu idealnego $R(X, t) = 0$, czyli

$$P(X) \in \Gamma_{12} \left\{ \begin{array}{l} -\lambda_1 \frac{\partial T_1(X, t)}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(X, t)}{\partial n} \\ T_1(X, t) = T_2(X, t) \end{array} \right. \quad (8)$$

W zadaniach z dziedziny teorii cieplnej procesów odlewniczych warunku (7) występuje m.in. na wewnętrznej powierzchni wlewnicy po wygenerowaniu się szczeliny gazowej, zaś warunki (8) między podobszarami niejednorodnej formy piaskowej.

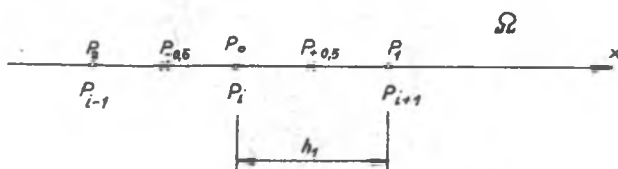
2. APROKSYMACJA RÓŻNICOWA RÓWNIANIA PRZEWODNICTWA

Przedstawiony niżej pewien sposób konstrukcji operatorów różnicowych w węzłach siatki przestrzenno-czasowej stanowi próbę takiego wykorzystania znanych z literatury metod, aby równania końcowe posiadały określoną interpretację fizyczną (analogicznie jak w metodzie bilansów elementarnych Waniczewska) oraz, aby sposób modelowania warunków brzegowych zadania nie odbiegał od schematu obliczeń dla wnętrza obszaru Ω . W prezentowanej me-

totdzie rozwijanej w pracach Grzymkowskiego [1], Zabawy [2] i autora niniejszej publikacji, a ściślej w równaniach końcowych opisujących czasoprzestrzenny rozkład temperatury w węzłach siatki różnicowej można znaleźć potwierdzenie matematycznej poprawności algorytmów opisanych przez J. Szarguta w pracy [3], stanowiącej podsumowanie dorobku autora i jego współpracowników w zakresie zastosowania metody bilansów elementarnych w obliczeniach cieplnych procesów przemysłowych.

Dla prostoty dalszych rozważań rozpatrywane będzie zagadnienie jednowymiarowe dla obszaru zorientowanego w układzie współrzędnych prostokątnych, przy czym otrzymane równania można bezpośrednio uogólnić na większą liczbę wymiarów oraz na inny niż prostokątny układ współrzędnych.

Przyjmijmy, że we wnętrzu obszaru Ω wyróżniono trzy węzły P_1 , P_{i+1} , P_{i-1} (rys. 1), którym w układzie współrzędnych związanym z węzłem centralnym P_1 odpowiadają wskaźniki 0,1,2.



Rys. 1. Węzły wewnętrzne podziału siatkowego

Równanie energii (1) dla zadania jednowymiarowego przyjmuje postać:

$$c(T)\rho(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (9)$$

Do rozważań wprowadza się dwa pomocnicze węzły $P_{-0,5}$, $P_{+0,5}$ w odległości $0,5 h_1$ od węzła centralnego.

Wyrażenie $\lambda(T)T'_x$ w węzłach $P_{-0,5}$, $P_{+0,5}$ przybliżamy ilorazami różnicowymi centralnymi

$$\lambda(T)T'_x \Big|_{P_{+0,5}} \approx \lambda_{+0,5}^k \frac{T_1^k - T_0^k}{h_1}; \quad \lambda(T)T'_x \Big|_{P_{-0,5}} \approx \lambda_{-0,5}^k \frac{T_0^k - T_2^k}{h_1} \quad (10)$$

Wskaźnik k wyróżnia chwilę t^k wynikającą z dyskretnego podziału czasu $t \in (0, \infty)$ punktami $0 = t^0 < t^1 < t^2, \dots$, przy czym interwał $\Delta t^k = t^{k+1} - t^k$ jest krokiem czasoprzestrzennej siatki różnicowej w kierunku osi t .

Aproksymacja operatora $\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}$ w węzle P_0 za pomocą różnicy centralnej prowadzi do wyrażenia

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \approx \frac{1}{h} \left[\lambda_{+0,5}^k \frac{T_1^k - T_0^k}{h_1} - \lambda_{-0,5}^k \frac{T_0^k - T_2^k}{h_1} \right] \quad (11)$$

Niech

$$\lambda_{+0,5}^k = \frac{2\lambda_1^k \lambda_0^k}{\lambda_1^k + \lambda_0^k}; \quad \lambda_{-0,5}^k = \frac{2\lambda_2^k \lambda_0^k}{\lambda_2^k + \lambda_0^k} \quad (12)$$

co oznacza, że wartości współczynników przewodzenia w węzłach pomocniczych przyjęto jako średnie harmoniczne współczynników w węzłach sąsiednich.

Wówczas

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \approx \frac{T_1^k - T_0^k}{R_1^k} \Phi_1 + \frac{T_2^k - T_0^k}{R_2^k} \Phi_2, \quad (13)$$

gdzie $\Phi_1, \Phi_2 = \frac{1}{h_1}$ nazywane będą współczynnikami kształtu siatki różnicowej, zaś R_1^k, R_2^k są oporami cieplnymi między węzłami wewnętrznymi i wy-
noszą odpowiednio

$$R_1^k = \frac{0,5 h_1}{\lambda_1^k} + \frac{0,5 h_1}{\lambda_0^k}; \quad R_2^k = \frac{0,5 h_1}{\lambda_2^k} + \frac{0,5 h_1}{\lambda_0^k} \quad (14)$$

Rozpatrując prostokątną M-wymiarową siatkę różnicową dochodzi się do zależności

$$\operatorname{div} \lambda(T) \operatorname{grad} T(X, t) \approx \sum_{j=1}^{2M} \frac{T_j^k - T_0^k}{R_j^k} \Phi_j, \quad (15)$$

przy czym wskaźniki $j = 1, 2, \dots$ są numerami węzłów sąsiadujących z węzłem centralnym P_0 , zaś współczynniki kształtu są odwrotnościami kroku siatki różnicowej w kierunku j . Dla siatek krzywoliniowych (np. walcowych, sferycznych itp.) funkcje kształtu są bardziej złożone.

Jeżeli pochodną $T_t^k(X, t)$ przybliżyć ilorazem różnicowym przednim, to równanie (1) w węźle P_0 sprowadza się do postaci

$$C_0^k \rho_0^k \frac{T_0^{k+1} - T_0^k}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{2M} \frac{T_j^k - T_0^k}{R_j^k} \Phi_j, \quad (16)$$

gdzie $C_0^k = C(T_0^k)$, $\rho_0^k = \rho(T_0^k)$.

Ostatecznie

$$T_0^{k+1} = T_0^k + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} \frac{\Phi_j}{R_j^k C_0^k \rho_0^k} (T_j^k - T_0^k), \quad (17)$$

przy czym wartości T_j^0 oraz T_0^0 wynikają z warunku początkowego (3). Jawny schemat (17) jest stabilny, jeśli

$$\bigwedge_{P_1 \in \Omega} \Delta t \sum_{j=1}^{2M} \frac{\Phi_1}{R_j^k C_o^k \varphi_o^k} \leq 1, \quad (18)$$

czyli krok siatki w kierunku zmiennej t należy dobrać w ten sposób, aby

$$\bigwedge_{P_1 \in \Omega} \Delta t \leq \frac{1}{\sum_{j=1}^{2M} A_j}, \quad (19)$$

gdzie

$$A_j = \frac{\Phi_1}{R_j^k C_o^k \varphi_o^k} \quad (20)$$

3. WARUNKI BRZEGOWE

3.1. Warunki brzegowe I rodzaju

Przyjmijmy, że dla układu jak na rysunku 1 węzeł P_1 jest węzłem brzegowym z zadaną temperaturą $\varphi(X, t)$. Operator różnicowy $\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ w punkcie P_0 przyjmuje wówczas postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \approx \frac{\varphi(P_1, t^k) - T_0^k}{R_1^k} \Phi_1 + \frac{T_2^k - T_0^k}{R_0^k} \Phi_2, \quad (21)$$

czyli

$$T_0^{k+1} = T_0^k + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} A_j (T_j^k - T_0^k) e_j + \sum_{j=1}^{2M} \frac{\Delta t \Phi_1}{R_j^k C_o^k \varphi_o^k} \left[\varphi(P_j, t^k) - T_0^k \right] (1 - e_j), \quad (22)$$

przy czym $e_j = 1$ w kierunkach do wnętrza obszaru oraz $e_j = 0$ dla kierunków do brzegu z warunkiem I rodzaju, zaś opór cieplny R_j^k wynosi

$$R_j^k = \frac{0,5 h_1}{\lambda(T_0^k)} + \frac{0,5 h_1}{\lambda[\varphi(P_j, t^k)]} \quad (23)$$

3.2. Warunki brzegowa II rodzaju

Założmy, że węzeł centralny P_0 zlokalizowano w odległości $0,5 h_1$ od brzegu, przy czym wektor normalny do konturu Γ jest równoległy do osi x (rys. 2).



Rys. 2. Podział siatki w pobliżu brzegu obszaru

W praktyce konstrukcja siatki różnicowej spełniającej powyższe postulaty jest prawie zawsze możliwa, chociaż czasami dla zadań dwu- lub trójwymiarowych wiąże się to z potrzebą przenoszenia warunków brzegowych z brzegu rzeczywistego na kontur wynikający z podziału siatki lub wprowadzenia lokalnych siatek różnicowych dostosowanych do kształtu rozpatrywanego obszaru Ω . Dla układu węzłów, jak na rysunku, mamy

$$\lambda(T)T'_x \Big|_{P_{+0,5}} \approx -\lambda(T)\dot{q}(P_{+0,5}, t^k) = -\dot{q}; \quad \lambda(T)T'_x \Big|_{P_{-0,5}} \approx -\lambda^k \Big|_{-0,5} \frac{T_0^k - T_2^k}{h_1} \quad (24)$$

przy czym pierwsze z powyższych równań wynika bezpośrednio z warunku brzegowego (5).

Tak więc

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \approx \frac{1}{h} \left[-\dot{q} - \lambda^k \Big|_{-0,5} \frac{T_0^k - T_2^k}{h_1} \right] = -\dot{q} \phi_1 + \frac{T_2^k - T_0^k}{R_2^k} \phi_2 \quad (25)$$

Dla M -wymiarowej siatki prostokątnej otrzymuje się

$$\operatorname{div} \lambda(T) \operatorname{grad} T(x, t) \Big|_{P_0} \approx \sum_{j=1}^{2M} \frac{(T_1^k - T_0^k) \phi_1 e_j}{R_j^k} + \sum_{j=1}^{2M} \dot{q}_j \phi_j (e_j - 1), \quad (26)$$

przy czym $e_j = 0$ w kierunkach do brzegu oraz $e_j = 1$ dla pozostałych kierunków. Temperatura w węźle P_0 w chwili t^{k+1} wynosi:

$$T_0^{k+1} = T_0^k + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} A_j (T_j^k - T_0^k) e_j + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} \frac{\phi_1 \dot{q}_j}{C_0^k \rho_0^k} (e_j - 1). \quad (27)$$

3.3. Warunki brzegowe III rodzaju

Rozpatrywać będziemy układ węzłów jak na rysunku 2. Na brzegu (tzn. w punkcie $P_{+0,5}$) zadany jest warunek (6). W takim przypadku

$$\lambda(T)T'_x \Big|_{P_{+0,5}} \sim -\alpha(T_{+0,5}^k - T_{ot}^k); \quad \lambda(T)T'_x \Big|_{P_{-0,5}} \sim \lambda_{-0,5}^k \frac{T_o^k - T_2^k}{h_1}. \quad (28)$$

Wynika stąd, że

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_o} \sim -\alpha(T_{+0,5}^k - T_{ot}^k) \Phi_1 + \frac{T_2^k - T_o^k}{R_2^k} \Phi_2. \quad (29)$$

Zapisując warunek brzegowy III rodzaju w postaci różnicowej, otrzymujemy

$$-\lambda_{+0,5}^k \frac{T_{+0,5}^k - T_o^k}{0,5 h_1} = -\alpha(T_{+0,5}^k - T_{ot}^k). \quad (30)$$

Można stąd wyznaczyć temperaturę $T_{+0,5}^k$.

$$T_{+0,5}^k = \frac{T_o^k + \frac{0,5 h_1 \alpha}{\lambda_{+0,5}^k} T_{ot}^k}{1 + \frac{0,5 h_1 \alpha}{\lambda_{+0,5}^k}}. \quad (31)$$

Przyjmując $\lambda_{+0,5}^k = \lambda_o^k$ i podstawiając (31) do równania (29) dostajemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_o} \sim \frac{T_{ot}^k - T_o^k}{\frac{1}{\alpha} + \frac{0,5 h_1}{\lambda_o^k}} \Phi_1 + \frac{T_2^k - T_o^k}{R_2^k} \Phi_2 \quad (32)$$

Wyrażenie

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{0,5 h_1}{\lambda_o^k} = R_1^k \quad (33)$$

jest zastępczym oporem przenikania ciepła od węzła P_o do otoczenia tzn. sumą oporów wnikańia $\frac{1}{\alpha}$ oraz oporu przewodzenia ciepła od węzła P_o do brzegu Γ .

Ostatecznie

$$T_0^{k+1} = T_0^k + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} A_j (T_j^k - T_0^k) e_j + \sum_{j=1}^{2M} \frac{\phi_j \Delta t}{R_j^k C_0^k \rho_0^k} (T_{ot}^k - T_0^k) (e_j - 1) \quad (34)$$

3.4. Warunki brzegowe IV rodzaju

Na rysunku pokazano zbiór węzłów, w którym punkty P_0 i P_2 należą do obszaru Ω_2 , zaś węzeł P_1 do obszaru Ω_1 . Linia' rozgraniczająca podobszary jest prostopadła do kierunku x i odległa o $0,5 h_1$ od węzła centralnego.



Rys. 3. Obszar niejednorodny

Postępując analogicznie jak w przypadkach opisanych poprzednio dochodzi się do zależności:

$$T_0^{k+1} = T_0^k + \Delta t \sum_{j=1}^{2M} A_j (T_j^k - T_0^k) e_j + \sum_{j=1}^{2M} \frac{\phi_j \Delta t}{R_j^k C_0^k \rho_0^k} (T_j^k - T_0^k) (e_j - 1) \quad (35)$$

przy czym R_j^k jest oporem zastępczym przewodzenia ciepła w kierunku do węzłów leżących w podobszarce Ω_1 i wynosi

$$\hat{R}_j^k = \frac{0,5 h_1}{(\lambda_2)_0^k} + R + \frac{0,5 h_1}{(\lambda_1)_j^k} \quad (36)$$

Gdzie R jest oporem cieplnym styku podobszarów Ω_1 , Ω_2 .

Przedstawiony wyżej sposób modelowania warunków brzegowych posiada prostą interpretację fizyczną (jednostkowy strumień ciepła przepływający między węzłem centralnym a sąsiednimi lub otoczeniem jest wprost proporcjonalny do różnicy temperatury, a odwrotnie do oporu cieplnego).

Równocześnie unifikacja równań różnicowych dla wszystkich węzłów przestrzennej siatki różnicowej bardzo istotnie upraszcza algorytm obliczeń numerycznych i jego realizację na maszynie cyfrowej. Zaproponowana w tytule pracy nazwa takiego sposobu modelowania procesów cieplnych wynika z faktu, że wpływ warunków brzegowych na przebieg procesu uwzględnia się przez dołączenie do oporów cieplnych przewodzenia dodatkowych oporów, wynikających z określonego warunku w pobliżu węzła P_0 , zaś nie tworzy się oddzielnych równań stanowiących aproksymację różnicową warunku brzegowego w węzłach granicznych obszaru Ω .

LITERATURA

- [1] Grzymkowski R., Mochnecki B.: O pewnych problemach aproksymacji różnicowej warunków brzegowych przepływu ciepła na styku dwóch ośrodków. ZN Pol. Śl. Mat.-Fiz. z. 29 1979.
- [2] Zabawa R.: Sprawozdanie z pracy NB 20.04.07. Międzyresortowy Problem Badań Podstawowych nr 20. Inst. Odlew. Pol. Śl. Gliwice 1979.
- [3] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Śląsk, Katowice 1977.

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ КРАЕВЫХ УЗЛОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
МОДЕЛЯХ ПРОБЛЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлен некоторый способ дифференциальной аппроксимации краевых условий в проблемах теплопроводности особенно выгодный при осуществлении численных расчетов на цифровой-вычислительной машине.

THE METHOD OF ELIMINATION OF BOUNDARY KNOTS IN DIFFERENTIAL MODELS
OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS

S u m m a r y

The paper presents a certain way of differential approximation of boundary conditions in heat conduction problems, peculiarly convenient in performing computer numerical calculations.