ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: MECHANIKA z. 69 Nr kol. 672

Ryszard ZABAWA

MODEL MATEMATYCZNY ZASTĘPCZEJ POJEMNOŚCI CIEPLNEJ STOPU Fe-C W INTERWALE TEMPERATUR KRZEPNIĘCIA

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis matematyczny i doświadczalną weryfikację modelu zastępczej pojemności cieplnej fazy przejściowej stopu Fe-C.

1. WSTĘP

Obliczenia cieplne dla układu odlew-forma-otoczenie stanowięce podstawę dla projektowania technologii wytwarzania odlewów, sprowadzają się do rozwiązywania mniej lub bardziej złożonych modeli matematycznych aproksymujęcych proces przepływu ciepła w objętości rozważanego układu.

Analiza zmienności pola temperatury i kinetyki krzepnięcia w obszarze odlewu na podstawie znanych z literatury rozwiązań Stefana i Schwarza, czy też metod bazujęcych na koncepcji przedstawionej przez Wiejnika wymaga przyjęcia licznych uproszczeń idealizujęcych kształt rozważanego obiektu, właściwości materiału odlewu i formy oraz warunki brzegowe procesu. W szczególności większość z cytowanych w literaturze rozwięzań dotyczy klasycznego modelu Stefana, w którym ciepło przemiany fazowej wydziela się w temperaturze odpowiadającej izotermie granicznej ciecz - ciało stałe, zaś dla odlewów rzeczywistych proces krzepnięcie zachodzi najczęściej w interwale temperatury, co powoduje, że w rozważanym obiekcie, obok podobszaru ciała stałego i cieczy, generuje się podobszar fazy przejściowej.

Model matematyczny przepływu ciepła w fazie przejściowej krzepnęcego metalu sprowadza się do równania różniczkowego Fouriera-Kirchoffa

$$c(T)\rho(T)T'_t(X,t) = \nabla\left[\lambda\nabla T(X,t)\right] + \dot{q}_v(X,t), \tag{1}$$

gdzie:

c,ρ,λ - właściwa pojemność cieplna, gęstość masy i współczynnik przewodzenia ciepła,

$\dot{q}_v$ - wydajność objętościowych źródeł ciepła w fazie przejściowej,

T,X,t - temperatura, współrzędna przestrzenna, czas,

∇ - operator Hamiltona.

W pracy [1] pokazano, że równanie przewodnictwa (1) dla obszaru fazy przejściowej sprowadza się do postaci:

$$C(T)\rho(T)T_t'(X,t) = \nabla\left[\lambda \nabla T(X,t)\right], \tag{2}$$

gdzie $C(T)$ - zastępcza pojemność cieplna fazy przejściowej.

Parametr nazywany zastępczą pojemnością cieplną fazy przejściowej wyraża się zależnością:

$$C(T) = c(T) - q\,\frac{ds(T)}{dT}. \tag{3}$$

W równaniu (3) q jest ciepłem przemiany fazowej, S - funkcją określającą objętościowy udział ciała stałego w otoczeniu punktu $P(X)$ podobszaru fazy przejściowej.

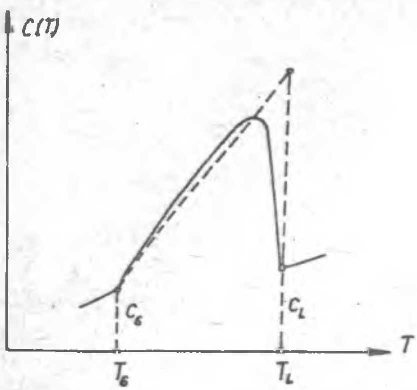
W literaturze można znaleźć kilka hipotez dotyczących konstrukcji funkcji $C(T)$, z których najbardziej znane są wzory podane przez Wiejnika, Samojłowicza i Borisowa. Problemy te omówiono szczegółowo w pracy [2].

Prezentowany w niniejszym artykule sposób modelowania zastępczej pojemności cieplnej bazuje na następujących założeniach:

1^o Funkcje $C(T)$ określone i ciągłe w interwale temperatur krzepnięcia $T \in [T_s, T_l]$ w pobliżu izotermy granicznej ciało stałe - faza przejściowa zmierza do wartości c_s, zaś w pobliżu izotermy ciecz - faza przejściowa do wartości c_l, gdzie c_s, c_l są właściwymi pojemnościami cieplnymi ciała stałego, cieczy w tych temperaturach.

2^o Efekt cieplny określony całką $\int_{T_s}^{T_l} C(T)dT$ jest równy zmianie entalpii jednostki masy fazy przejściowej przy krzepnięciu i stygnięciu, a więc musi wynosić $\hat{c}(T_l - T_s) + q$, gdzie $\hat{c}$ jest średnim ciepłem właściwym rozważanego podobszaru.

3^o Maksymalne wartości funkcji $C(T)$ lokalizuje się w pobliżu izotermy T_l, co znajduje potwierdzenie w licznych badaniach cytowanych w literaturze dotyczącej omawianych problemów.



Rys. 1. Przebieg zmienności funkcji C(T)

Hipotetyczny przebieg funkcji $C(T)$ przedstawiono na rysunku 1.

2. KONSTRUKCJA FUNKCJI C(T)

Wyznaczenie nie ustalonych pól temperatury i kinetyki krzepnięcia w złożonych geometrycznie układach odlew - forma jest praktycznie możliwe jedynie na bazie metod numerycznych. Opis matematyczny procesu sprowadza się do pewnego algorytmu (najczęściej układu równań liniowych), przy czym symulację przepływu ciepła w układzie realizuje się na maszynach cyfrowych. Ponieważ istotą metod numerycznych jest w ogólnym przypadku dyskretyzacja przestrzeni i czasu, więc algorytm obliczeń nie będzie mniej dokładny, jeżeli w miejsce postulowanej we wstępie funkcji wprowadzi się zależność typu

$$C(T) = c_s + a(T - T_s)^p; \quad p > 0. \tag{4}$$

Przebieg takiej funkcji pokazano linią przerywaną na rysunku 1. Z założenia 2° otrzymuje się

$$\int_{T_s}^{T_1} \left[c_s + a(T - T_s)^p\right] dT = \hat{c}(T_1 - T_s) + q \tag{5}$$

Można obliczyć stąd parametr a

$$a = \frac{(p+1)(\hat{c}+c_{sp}-c_s)}{(T_1 - T_s)^p}, \tag{6}$$

gdzie $c_{sp} = q/(T_1 - T_s)$ jest spektralnym ciepłem krzepnięcia. Wynika stąd wzór na zastępcze ciepło właściwe w postaci:

$$C(T) = c_s + (p + 1)(\hat{c} + c_{sp} - c_s)\left[\frac{T - T_s}{T_1 - T_s}\right]^p \tag{7}$$

Podstawienie przyjętej zależności do równania (3) prowadzi do związku

$$c(T) - q\,\frac{dS}{dT} = c_s + (p + 1)(\hat{c} + c_{sp} - c_s)\left[\frac{T - T_s}{T_1 - T_s}\right]^p. \tag{8}$$

Otrzymane w ten sposób równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{dS}{dT} + \beta S = \beta - B(T - T_s)^s, \tag{9}$$

gdzie:

$$\beta = \frac{c_1 - c_s}{q}; \quad B = \frac{(p+1)(\hat{c}+c_{sp}-c_s)}{q(T_1 - T_s)^p}, \tag{10}$$

z warunkiem $S(T_s) = 1$, co wynika z definicji funkcji $S(T)$, musi prowadzić do funkcji $S(T)$, spełniającej postulat normalizacji do przedziału $[0,1]$ i w punkcie $T = T_1$ przyjmującej wartość $S(T_1) = 0$.

W równaniu (8) w miejsce pojemności cieplnej $c(T)$ przyjęto średnią ważoną ciepła właściwego cieczy i ciała stałego z wagą 1-S oraz S

$$c(T) = c_s\, S(T) + c_l\left[1 - S(T)\right] \tag{11}$$

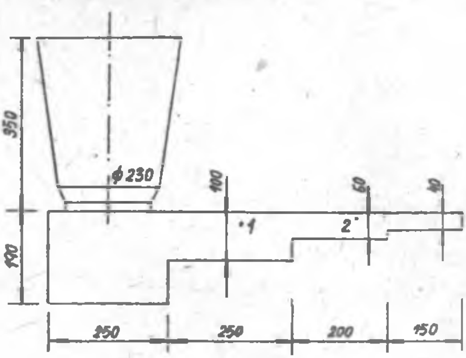
Rozwiązanie równania (9) można przedstawić w postaci:

$$S = 1 + \frac{Bp!}{\beta^{p+1}} (-1)^p \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{\left[\beta(T_s - T)\right]^i}{i!} \tag{12}$$

Jak pokazano w [3], uwzględnianie tylko pierwszego wyrazu rozwinięcia (12) daje nieznaczny defekt wartości funkcji S w pobliżu izotermy $T = T_l$, co świadczy o poprawności hipotezy (7).

3. DOBÓR PARAMETRU p

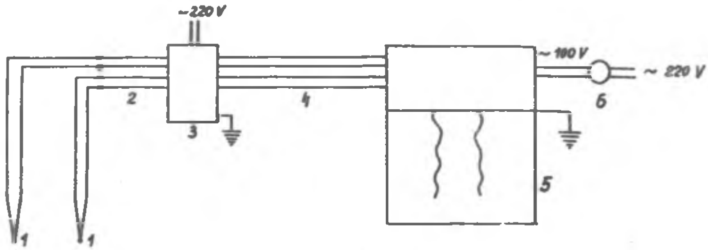
Aby wyznaczyć najbardziej korzystne wartości parametru p we wzorze (7) dla symulacji numerycznej procesu stygnięcia i krzepnięcia odlewu staliwnego w formie piaskowej, opracowano na bazie metod różnicowych model stygnięcia próby schodkowej pokazanej na rysunku 2. Wyniki obliczeń numerycznych (a ściślej otrzymane z modelu krzywe stygnięcia w wybranych jego punktach) były porównywane z krzywymi zmierzonymi na odlewie rzeczywistym. Badania doświadczalne wykonano na odlewie przedstawionym na rys. 2. Termopary Pt 10 Rh-Pt umieszczono w punktach I i II w odległości około 1 cm od górnej powierzchni wnęki formy. Dla dokonania pomiarów zainstalowano układ, w skład którego wchodziły:



Rys. 2. Odlew próby schodkowej

- termopary Pt, Rh-Pt o średnicy 0,5 mm w osłonkach alundowych,
- rejestrator wielokanałowy o zapisie ciągłym,
- termostat elektroniczny utrzymujący SEM zimnych końców na stałym poziomie odpowiadającym temperaturze 50°C z dokładnością ±0,2 K,
- przewody kompensacyjne o sile termoelektrycznej 0,0064 mV/K,
- przewody zasilające.

Schemat układu przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Układ do pomiaru krzywych stygnięcia
1 - termoelementy Pt 10 Rh-Pt, 2 - przewody kompensacyjne, 3 - termostat, 4 - przewody miedziane, 5 - rejestrator, 6 - autotransformator

Błąd pomiaru termoparą Pt 10 Rh-Pt jest dla przedziału 1373-1773 K rzędu 1 K, natomiast powyżej 1773 K rzędu 5 K, a temperaturowy współczynnik SEM (czułość termoelementu) wynosi 10-12 V/K. Wymienione parametry oraz dobra stabilność powoduje, że termopara tego typu jest najdokładniejsza dla mierzonego zakresu temperatur.

Pewną trudność stanowiła ciągła regulacja zakresu pomiarowego stosowana w wykorzystanym urządzeniu. Powodowało to konieczność każdorazowego cechowania układu za pomocę dzielnika napięcia i mostka pomiarowego.

Zastosowane metody pomiarowe zapewniły dostatecznie dużą dokładność wyników.

Pomiary przeprowadzono dla dwóch rodzajów masy formierskiej

- masy kwarcowej na szkle wodnym,
- masy kwarcowej ze spoiwem bentonitowym.

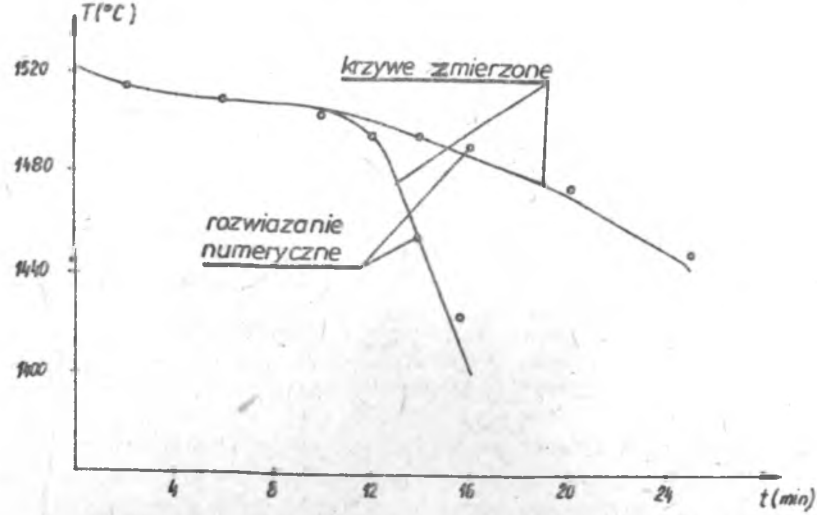
Pozwoliło to zaobserwować zmianę przebiegu krzywych stygnięcia dla różnych szybkości odprowadzania ciepła. Formy zalano staliwem średniowęglowym z kadzi zatyczkowej. Na rysunku 4 pokazano krzywe stygnięcia w masie ze spoiwem bentonitowym. Na tym samym rysunku naniesiono krzywe uzyskane na podstawie rozwiązania numerycznego, w którym rozpatrywano przekrój podłużny próby schodkowej płaszczyzną adiabatyczną. Krzywe te charakteryzuje bardzo dobra zgodność z doświadczeniem. Uzyskano je dla następujących danych:

$q = 270\,000$ J/kg, $c = 750$ J/kgK, $c_s = 600$ J/kgK, $T_l = 1788$ K,
$T_s = 1743$ K, $p = 8$.

Masę formierską charakteryzuje współczynnik wyrównywania temperatury

$a = 667\ 10^{-9}$.

Przykład wydruku pola temperatury w modelowanym układzie po czasie $t = 600$ s pokazano na rysunku 5. Szczegółowa analiza rozwiązania numerycznego wskazuje, że zarówno w przypadku danych szybkości odprowadzania ciepła (masa na szkle wodnym), jak i dla małych szybkości stygnięcia



Rys. 4. Weryfikacja rzeczywistych krzywych stygnięcia z modelem numerycznym .

PROBA SCHODKOWA NR1.

POLE TEMPERATURY PO CZASIE 10 MIN.

1514	1517	1514								
1514	1517	1514								
1514	1517	1514								
1514	1517	1514								
1514	1517	1514								
1514	1517	1514	1493	1489	1488	1488	1487	1476	1361	1304
1514	1517	1515	1505	1502	1501	1501	1500	1490	1365	1308
1514	1517	1515	1513	1513	1513	1511	1511	1506	1363	1305
1514	1516	1515	1514	1514	1514	1504	1500	1493		
1514	1516	1515	1514	1514	1514	1492	1487	1480		
1514	1516	1515	1513	1513	1511					
1514	1515	1515	1505	1501	1494					
1514	1515	1514	1493	1486	1479					
1513	1514	1514								
1509	1513	1510								
1490	1498	1491								
1472	1483	1474								

Rys. 5. Przykład wydruku pola temperatury w przekroju odlewu

otrzymuje się dużą dokładność rozwiązania numerycznego dla wartości parametru p rzędu $p \in [7,9]$.

LITERATURA

[1] Mochnacki B., Zabawa R.: Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w fazie przejściowej stopu Fe-C i jego realizacja w modelu numerycznym procesu krzepnięcia. XVIII Symp. Modelowanie w Mechanice, PTMTS, Wisła 1979, Mat.

[2] Zabawa R.: Sprawozdanie z pracy NB 20.04.07. Międzyresortowy Problem Badań Podstawowych nr 20. Inst. Odl. Pol. Śl. Gliwice 1979.

[3] Mochnacki B., Zabawa R.: The volumetric heat sources in transistory zone of the Fe-C alloy ... Metal Science, London (złożono do druku).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ СПЛАВА Fe-C
В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлены математическое описание и проверка на основе опытов модели эквивалентной теплоемкости переходной фазы сплава Fe-C.

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE Fe-C ALLOY SUBSTITUTE HEAT CAPACITY
IN THE INTERVAL OF SOLIDIFICATION TEMPERATURES

S u m m a r y

The paper presents a mathematical description and experimental verification of the model of the Fe-C alloy substitute heat capacity (in the interval of solidification temperatures).