ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z. 92 Nr kol. 1026

XIII MIĘDZYNARODOWE KOLOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"

13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"

25-28.04.1989 ZAKOPANE

Иван Скидан

Кафедра "Начертательная геометрия и инженерная графика"
Донецкого политехнического института, СССР

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СПЕЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Резюме. Предложен метод выбора специальных координат для компактного описания поверхностей на основе кинематики их образования. Построена система математических моделей кинематических поверхностей, представляющая собой элементарную базу для создания систем автоматизированного конструирования деталей машиностроения.

С развитием систем автоматизированного проектирования и конструирования машин проблема системного подхода к математическому моделированию поверхностей приобретает особую актуальность.

По типу математической модели все поверхности могут быть отнесены к одному из двух классов. К первому классу относятся поверхности летательных аппаратов, автомобилей, судов, лопаток турбин, гребных винтов. Математические модели таких поверхностей составляются на основе физической модели, прошедшей натурное испытание, а база данных представляет собой массивы координат точек, снятых с физической модели. В промежутках между узлами точечного каркаса поверхность, как правило, определяется сплайновой интерполяцией.

Ко второму классу относятся поверхности деталей общего машиностроения, из которых могут быть выделены базовые элементы, изучаемые аналитической геометрией: многогранники, поверхности второго порядка, поверхности вращения, винтовые поверхности.Сюда же относятся поверхности тонкостенных конструкций (оболочек), которые могут быть представлены аналитически в виде уравнения.

Форма задания, принятая в аналитической геометрии, не является общей для поверхностей второго класса, и отсюда вытекает основной источник затруднений программной реализации систем автоматизированного конструирования и проектирования.

Исходя из условий модульности программного обеспечения, минимизации входных данных, возможности получения решений, общих для определенных подклассов поверхностей, сформируем требования, предъявляемые к системе математических моделей поверхностей второго класса:

- иерархичность структуры со связями по вертикали и по горизонтали ;
- компактность моделей на нижнем уровне иерархии ;
- инвариантность моделей в отношении определенного класса задач.

В основу построения системы математических моделей поверхностей, удовлетворяющей вышеназванным требованиям, положен кинематический принцип образования поверхности и связанный с ним выбор специальных координат.

Согласно кинематическому принципу линия (образующая) перемещается в пространстве, меняя свою форму или оставаясь неизменной, и описывает поверхность.

Аналитически образующую в пространстве будем задавать посредством поверхности - носителя

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v) \qquad (1)$$

в предположении, что её внутренние координаты u и v связаны функциональной зависимостью. Закон движения поверхности-носителя будем задавать формулами

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (2)$$

Перемещаясь по закону (2), поверхность-носитель образующей (I) заметает определенную область пространства. Относя одну и ту же точку этой области к прямоугольным декартовым координатам x , y , z и к специальным координатам u , v , t определим функции

$$x = x(u,v,t),\ y = y(u,v,t),\ z = z(u,v,t), \quad (3)$$

выражающие общее преобразование пространства, которое расслаивается на подпространства в виде фиксированных положений поверхности-носителя (I), соответствующих фиксированным значениям параметра движения t .

Вместе с тем, функции (3) с произволом задания одной функции, связывающей переменные u , v , t , например,

$$v = v(u,t) \quad (4)$$

задают класс кинематических поверхностей, носителем образующей которых является поверхность (I), перемещающаяся по закону(2).

При такой интерпретации формулы (3) и (4) выражают общую системную математическую модель кинематической поверхности, которая занимает верхний (нулевой) уровень иерархической структуры.

Представляется возможным для нулевого уровня написать вычислительные формулы определения коэффициентов E , F , G , L , M , N первой и второй квадратичных форм. Для этого необходимо выражения первых и вторых частных производных по u , v , t неопределенных функций (3) при условии, что v является неопределенной функцией от u и t согласно (4), подставить в выражения коэффициентов E , F , G , L , M , N для прямоугольных декартовых координат.

Общая математическая модель кинематической поверхности получает первую конкретизацию при задании типа поверхности-носителя (I) и закона её перемещения (2), в результате чего определяются функции (3). Первый уровень иерархии составляют расположенные по горизонтали тройки определенных функций (3), соответствующие сочетаниям типа поверхности-носителя образующей (I), выбора на ней системы внутренних координат u , v и закона движения (2). На этом уровне конкретизацию получают также выражения коэффициентов E , F , G , L , M , N квадратичных форм: в них остается неопределенной функция (4) и её первые и вторые частные производные.

Вторую конкретизацию математической модели поверхности свяжем с неполным определением функции двух переменных (4). Эта функция на втором уровне иерархии может быть представлена как совокупность произвольно-выбранных функций от каждой из переменных для u и t с произволом выбора постоянных. При переходе от первого уровня иерархии ко второму представляется возможным классифицировать поверхности по типу их образующей (линейчатые, циклические), по типу одного из семейств координатных линий (винтовые, квазивинтовые, вращения), по дифференциально-геометрическим свойствам (ортогональность координатной сети, минимальность) и др. Неопределенность функции (4) приводит к выражению посредством её не конкретной поверхности, а класса поверхностей.

Последующие уровни иерархии получаем, выделяя подклассы поверхностей из классов верхних уровней, предъявляя к последним новые требования. Например, из класса линейчатых поверхностей получим подкласс развертываемых, из класса циклических - подклассы трубчатых, каналовых поверхностей и резных поверхностей Монжа. Из класса поверхностей, у которых координатная сеть ортогональная - подкласс поверхностей с координатными линиями кривизны.

Начиная с первого уровня иерархии многие задачи конкретизации математической модели поверхности имеют решения как в прямой, так и в обратной постановке: спуск по иерархическим ступеням осуществляется или в результате интерпретации известной кинематики образования поверхности, или в результате решения дифференциальных уравнений, выраженных в терминах коэффициентов квадратичных форм для класса верхнего уровня и интерпретирующих дополнительные требования к ним.

Для поверхностей, условно отнесенных ко второму классу, наиболее распространена форма образующей в виде плоской кривой. Поэтому в работе много внимания уделяется классу поверхностей, носителем образующей которой является плоскость, а в качестве перемещения поверхности-носителя выбрано самое технологичное движение-вращение.

В зависимости от расположения плоскости-носителя образующей относительно оси её вращения и выбора системы внутренних координат на ней получаем горизонтальный ряд первого уровня иерархии следующих типов поверхностей:

- С - поверхности. Плоскость-носитель параллельна оси вращения и отстоит от нее на расстоянии r , координаты на плоскости-носителе - прямоугольные декартовые. Специальные координаты - обобщенные цилиндрические / I /, функции (3) зависимости от них прямоугольных декартовых координат

$$x = r\cos t - u\sin t,$$
$$y = r\sin t + u\cos t, \qquad (5)$$
$$z = v$$

- G - поверхности. Плоскость-носитель образующей наклонена под углом α к оси вращения. Координаты на плоскости-носителе - прямоугольные декартовы.

Специальные координаты - гиперболические / 2 /, функции(3) зависимости от них прямоугольных декартовых координат

$$x = v\sin\alpha\cos t - u\sin t,$$
$$y = v\sin\alpha\sin t + u\cos t, \qquad (6)$$
$$z = v\cos\alpha$$

При выполнении условия $r = 0$ обобщенные цилиндрические и $\alpha = 0$ гиперболические координаты переходят в цилиндрические координаты. Таким образом, как C-поверхности, так и G-поверхности содержат подклассы поверхностей, традиционно описываемые в цилиндрических координатах.

- E - поверхности. Отличаются от G-поверхностей тем, что на плоскости-носителе образующей выбраны не прямоугольные декартовы, а полярные координаты. Специальные координаты - квазисферические / 3 /.

- F - поверхности. Поверхность-носитель образующей - конус, совершающий вращение вокруг оси, пересекающей его ось. На конусе выбраны ортогональные координаты, одно из семейств координатных линий - прямолинейные образующие конуса, другое - окружности. Пространственные координаты - специальные сферические, функции (3) зависимости от них прямоугольных декартовых координат

$$x = u\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\cos t + u\sin\beta\sin v\sin t - u\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\cos v\cos t,$$
$$y = u\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\sin t - u\sin\beta\sin v\cos t - u\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\cos v\sin t, \qquad (7)$$
$$z = -u\cos\beta\cos(\alpha+\beta) - u\sin\beta\cos v\sin(\alpha+\beta)$$

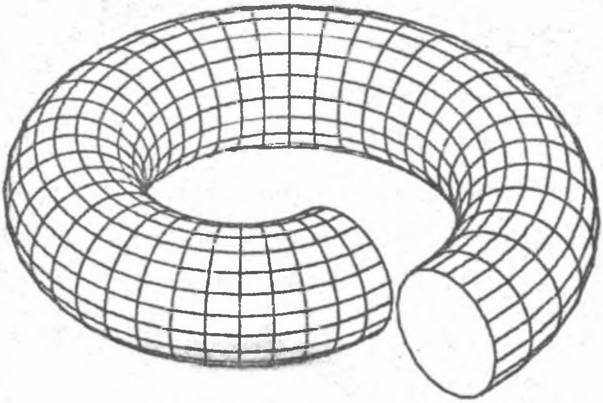

Рис. I. Резная поверхность Монжа

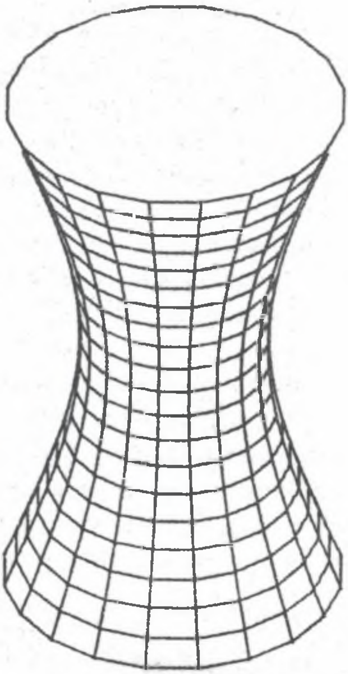

Рис. 2. Однополостный гиперболоид

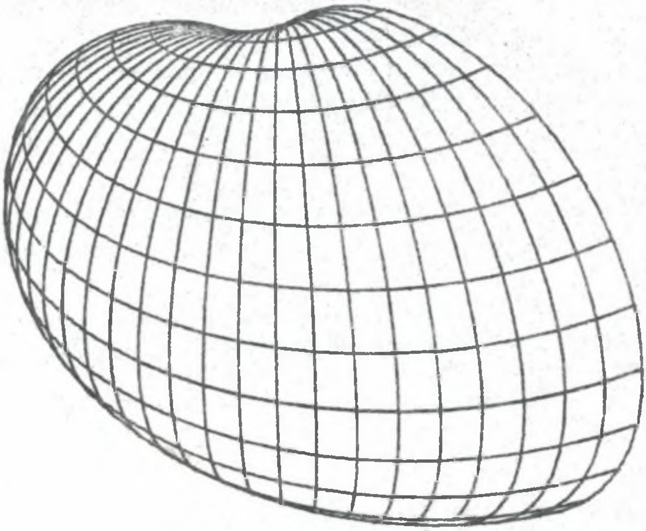

Рис. 3. Каналовая поверхность

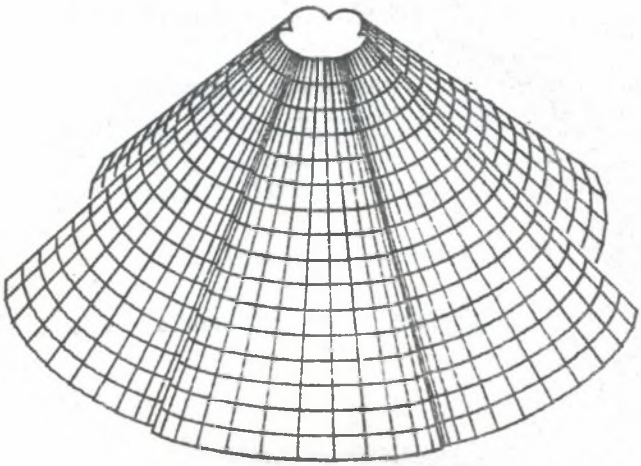

Рис. 4. Ротативная поверхность

В рассмотренных системах специальных координат получены математические модели поверхностей вращения, винтовых, квазивинтовых, линейчатых, развертываемых, циклических, каналовых, резных поверхностей Монжа, ротативных.

Решены задачи, имеющие важные инженерные приложения: построения плоских сечений и линий взаимного пересечения поверхностей, построение разверток торсов, отнесения поверхностей к специальной сети.

Разработано программное обеспечение отображения средствами машинной графики как поверхностей, так и результатов решаемых с ними задач.

На рис. I. представлена резная поверхность Монжа, уравнение которой в обобщенных цилиндрических координатах (5) имеет вид

$$u = c + d\cos\alpha - rt, \quad v = d\sin\alpha, \qquad (8)$$

$$(c = const,\ d = const,\ r = const)$$

На рис. 2 представлен однополостный гиперболоид. Его уравнение в цилиндрических координатах (в функции (5) при $r = 0$)

$$u = \frac{c}{b}\sqrt{v^2 + b^2} \quad (c = const,\ b = const) \qquad (9)$$

На рис. 3 изображена каналовая поверхность / 4,5 /, уравнение которой в обобщенных цилиндрических координатах

$$u = d + \sqrt{2rdt - c}\,\cos\alpha, \quad v = \sqrt{2rdt - c}\,\sin\alpha$$

$$(r = const,\ d = const,\ c = const) \qquad (10)$$

Ротативная поверхность имеет уравнение в специальных сферических координатах (7)

$$v = nt \qquad (11)$$

где n - целое число складок. Для поверхности (рис. 4) $n = 5$.

Чтобы перейти от специальных координат к декартовым, необходимо подставить правые части уравнений (8) - (II) в соответствующие функции зависимости прямоугольных декартовых координат от специальных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скидан И.А. Обобщенные цилиндрические координаты и их приложения в прикладной геометрии// Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1971. -Вып. 13. С. 15-20.
2. Скидан И.А. Кинематические поверхности в гиперболических координатах. // Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1972. -Вып. 14. - С. 78-82.
3. Скидан И.А. Квазисферические координаты и их применение в прикладной геометрии. // Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1977. -Вып. 23. - С. 38-42.
4. Скидан И.А. Квазивинтовые, циклические и каналовые С - поверхности. - 1980. -Вып. 30. - С. 31-34.
5. Скидан И.А. Каналовые поверхности в обобщенных цилиндрических координатах. // Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1980. - 1980. -Вып.30. - С. 31-34.

MATEMATYCZNE MODEŁOWANIE POWIERZCHNI KINEMATYCZNYCH W SPECJALNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH

S t r e s z c z e n i e

Zaproponowano metodę wyboru specjalnych współrzędnych do zwartego opisu powierzchni na podstawie kinematyki ich tworzenia. Zbudowano matematyczny system modeli powierzchni kinematycznych, będący podstawową bazą do tworzenia zautomatyzowanych systemów konstruowania części maszyn.

MATHEMATICAL MODELLING OF KINEMATIC SURFACES
IN SPECIAL CO-ORDINATE AXES

S u m m a r y

A method of selection of special co-ordinate axes for a compact surface description using kinematics of their creation has been presented. A mathematical system of kinematic surface models has been designed as the basis for creating automatic systems of machine designing.

Recenzent: dr inż. H. Gliński

Wpłynęło do Redakcji 21.XII.1988 r.