ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: ENERGETYKA z. 123 Nr kol. 1277

Andrzej RUSIN

METODA NAPRĘŻEŃ BAZOWYCH W ANALIZIE PRZEMIESZCZEŃ WYWOŁANYCH PEŁZANIEM

Streszczenie. W artykule omówiono koncepcję metody naprężeń bazowych. Rozpatrzono przykłady zastosowania tej metody do wyznaczania przemieszczeń elementów zginanych, powłok cienkościennych i grubościennych. Podano również uogólnienia metody oraz jej interpretację probabilistyczną.

THE REFERENCE STRESS METHOD IN THE ANALYSIS OF STRAINS DUE TO CREEP

Summary. The reference stress method is outlined in the paper. The examples of application of the method to calculations of the strains in bent elements, thin – walled and thick – walled shells are also presented. The generalization of the method and its probabilistic interpretation are discussed.

DIE METHODE VON BASISSPANNUNGEN IN DER ANALYSE DER DURCH DAS KRIECHEN HERVORGERUFENEN VERFORMUNGEN

Zusammenfassung. Im diesem Aufsatz ein Konzept der Methode von Basisspannungen ist beschrieben worden. Es wurden einige Beispiele der Anwendung dieser Methode für rechnerische Ermittlung der Verformungen von gebogenen Bauteilen sowie dünn– und dickwandiger Schalen betrachtet. Die Verallgemeinerung der Methode und ihre probabilistische Interpretation wurde angegeben.

1. WSTĘP

Zjawisko pełzania metali definiowane jest jako proces zmian naprężeń i odkształceń w czasie przy stałym obciążeniu. W wielu praktycznych zagadnieniach celem analizy jest wyznaczenie przemieszczeń w zadanym czasie bądź też prędkości przemieszczeń. Problem ten nabiera szczególnego znaczenia w przypadku wirujących elementów maszyn energetycznych (turbin, sprężarek), w których przemieszczenia limitują trwałość maszyny, a ich dokładne wyznaczenie jest podstawą bezpiecznej i niezawodnej konstrukcji [1, 2, 3, 4].

W klasycznych rowiązaniach przemieszczenia mocno uzależnione są od wartości współczynników funkcji opisujących proces pełzania, np. współczynników B i n w prawie Nortona. Rozpatrzmy ten wpływ na przykładzie pręta o przekroju prostokątnym zginanego momentem M. Prędkość zmian promienia krzywizny można obliczyć z zależności [1, 2]:

$$\dot{k} = \frac{B}{d}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(\frac{M}{bd^2}\right)^n \tag{1}$$

Zbadajmy, jak dla ustalonych $b = 0{,}04$ m; $d = 0{,}005$ m; $B = 2{,}0 \cdot 10^{-20}$$M = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ MNm zmienia się krzywizna wraz ze zmianą wykładnika n.

Dla $n = 3{,}8$ $\dot{k} = 2{,}54 \cdot 10^{-10}$

$n = 4{,}0$ $\dot{k} = 6{,}40 \cdot 10^{-10}$

$n = 4{,}2$ $\dot{k} = 16{,}11 \cdot 10^{-10}$

Jak widać, 10% zmiana wykładnika może spowodować zmianę wyniku obliczeń krzywizny o ponad 500%.

2. IDEA METODY NAPRĘŻEŃ BAZOWYCH

Z analizy podanego przykładu wynika, że sprawa dokładnego ustalenia wartości stałych materiałowych może mieć decydujący wpływ na jakość wyników. Jedną z metod pozwalających usunąć niedogodności związane z niepewnością stałych materiałowych jest tzw. metoda naprężeń bazowych (reference stresses). Celem tej metody jest bezpośrednie skorelowanie przemieszczeń pełzaniowych w danym elemencie z pewnym prostym testem pełzaniowym przeprowadzonym przy znanym naprężeniu, zwanym naprężeniem bazowym σ_R. W takim przypadku uogólnioną prędkość przemieszczeń $\dot{q}$ możemy zapisać:

$$\dot{q} = \delta(\sigma_R, n) \cdot \dot{\varepsilon}_R \tag{2}$$

gdzie

$$\dot{\varepsilon}_R = B\sigma_R^n \tag{3}$$

$\delta(\sigma_R, n)$ – współczynnik proporcjonalności dobrany tak, aby nie wykazywał zależności od n.

Naprężenie bazowe σ_R wyrażone jest jako pewien ułamek obciążenia P

$$\sigma_R = P\alpha \tag{4}$$

gdzie α – parametr zależny od geometrii.

A zatem w metodzie naprężeń bazowych dokonuje się rozdzielenia „odpowiedzi” konstrukcji na dwie części zależne odpowiednio od postaci geometrycznej oraz materiału. Pierwszą część można wyznaczyć w oparciu o analizę teoretyczną pełzania danego elementu natomiast drugą opierając się na jednym prostym jednoosiowym teście na rozciąganie w warunkach pełzania. Metoda ta, ze względu na dużą dokładność otrzymywanych wyników przy niewielkich kosztach eksperymentów i obliczeń, zyskała sobie dużą popularność [5 ÷ 16].

W dalszej części zostaną omówione szczegółowo przypadki wyznaczania przemieszczeń różnych elementów maszyn energetycznych metodą naprężeń bazowych.

3. ELEMENTY ZGINANE

3.1. Zginany pręt o przekroju prostokątnym

Rozpatrzmy zginanie pręta o przekroju prostokątnym, którego materiał podlega prawu Nortona

$$\dot{\varepsilon} = B\sigma^n \tag{5}$$

zapisanemu w postaci

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_R} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_R}\right)^n \tag{6}$$

wtedy

$$B = \frac{\dot{\varepsilon}_R}{\sigma_R^n} \tag{7}$$

W pracy [1] podano zależność określającą prędkość zmian krzywizny zginanego pręta:

$$\dot{k} = B\left(\frac{M}{I_n}\right)^n \tag{8}$$

gdzie

$$I_n = \int_A y^{1+\frac{1}{n}}\, dA \tag{9}$$

Po uwzględnieniu (7) oraz przyjęciu prostokątnego przekroju pręta (b x 2d), dla którego:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} d^{2+\frac{1}{n}} b \tag{10}$$

możemy zapisać:

$$\dot{k} = \dot{\varepsilon}_R \left(\frac{M}{bd^2 \sigma_R} \right)^n \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \frac{1}{d} \tag{11}$$

Porównując $\dot{k}$ dla różnych wartości wykładników n mamy:

$$\left(\frac{M}{bd^2 \sigma_R} \right)^{n_1} \left(1 + \frac{1}{2n_1} \right)^{n_1} = \left(\frac{M}{bd^2 \sigma_R} \right)^{n_2} \left(1 + \frac{1}{2n_2} \right)^{n_2} \tag{12}$$

Po przekształceniach:

$$\frac{\sigma_R bd^2}{M} = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2n_2} \right)^{n_2}}{\left(1 + \frac{1}{2n_1} \right)^{n_1}} \right]^{\frac{1}{n_2 - n_1}} = \alpha \tag{13}$$

$$\sigma_R = \alpha \frac{M}{bd^2} \tag{14}$$

Zbadajmy zmienność α w zależności od wykładników n_1 i n_2. W przedziale zmian $2 < n < 8$ uzyskano średnią wartość $\alpha = 1{,}006$. Maksymalny błąd wynosił 1%. A zatem prędkość zmiany krzywizny możemy zapisać:

$$\dot{k} = \dot{\varepsilon}_R \cdot \delta(\sigma_R, n) \tag{15}$$

gdzie: $\dot{\varepsilon}_R$ – prędkość pełzania dla naprężenia σ_R

$$\delta(\sigma_R, n) = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \frac{1}{d} \tag{16}$$

W rozpatrywanym zakresie zmian wykładnika pełzania możemy zapisać

$$\dot{k} = \dot{\varepsilon}_R \frac{1{,}62}{d}$$

3.2. Zginana rura o przekroju kołowym

W przypadku zginanej rury o promieniu wewnętrznym r_w i zewnętrznym r_z wielkość I_n (wzór 9) możemy zapisać:

$$I_n = \int_A y^{\frac{n+1}{n}}\, dA = \int_{A_z} y^{\frac{n+1}{n}}\, dA - \int_{A_w} y^{\frac{n+1}{n}}\, dA =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{\frac{n+1}{n}} \cos^2\theta\, d\theta \left(r_z^{\frac{3n+1}{n}} - r_w^{\frac{3n+1}{n}} \right) = 4I_{on}\left(r_z^{\frac{3n+1}{n}} - r_w^{\frac{3n+1}{n}} \right) \tag{17}$$

gdzie

$$I_{on} = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{\frac{n+1}{n}} \cos^2\theta\, d\theta \tag{18}$$

Prędkość zmian krzywizny możemy zatem obliczyć jako

$$\dot{k} = \frac{\dot{\varepsilon}}{y} = \frac{BM^n}{\left\{ 4I_{on}\left(r_z^{\frac{3n+1}{n}} - r_w^{\frac{3n+1}{n}} \right) \right\}^n} \tag{19}$$

Postępując podobnie jak w przypadku pręta i uwzględniając (7) możemy zapisać:

$$\dot{k} = \frac{\dot{\varepsilon}_R M^n}{\left\{ 4I_{on}\sigma_R\left(r_z^{\frac{3n+1}{n}} - r_w^{\frac{3n+1}{n}} \right) \right\}^n} \tag{20}$$

$$\sigma_R = \frac{M}{r_w^3}\,\alpha \tag{21}$$

Po dalszych przekształceniach otrzymujemy:

$$\alpha = \left(\frac{I_{on_2}^{n_2}}{4^{(n_1 - n_2)}\, I_{on_1}^{n_1}} \right)^{\frac{1}{n_1 - n_2}} \cdot \left\{ \frac{\left[\left(\frac{r_z}{r_w} \right)^{\frac{3n_2+1}{n_2}} - 1 \right]^{n_2}}{\left[\left(\frac{r_z}{r_w} \right)^{\frac{3n_1+1}{n_1}} - 1 \right]^{n_1}} \right\}^{\frac{1}{n_1 - n_2}} \tag{22}$$

Sprawdzimy obecnie zmienność α w zależności od n_1 , n_2 oraz stosunku promienia $K = \frac{r_z}{r_w}$.

Średnią wartość α dla danego stosunku promieni oraz maksymalny uzyskany błąd podano w tablicy 1.

Tablica 1

Zmienność parametru α w zależności od współczynnika K dla rury o przekroju kołowym

$K = \frac{r_z}{r_w}$	α	Maksymalny błąd %
1,1	2,276	0,60
1,2	1,035	0,70
1,5	0,317	0,76
2,0	0,108	0,86
2,5	0,052	0,95
3,0	0,029	1,0

Na podstawie (19) prędkość zmian krzywizny możemy przedstawić jako

$$\dot{k} = \delta\, \dot{\varepsilon}_R \tag{23}$$

gdzie

$$\delta = [\alpha(K^{3,5} - 1)]^{-2} \frac{1}{r_w} \tag{24}$$

Można zatem dla dowolnego stosunku K wyznaczyć α, a dalej naprężenia bazowe σ_R. Po wyznaczeniu doświadczalnym $\dot{\varepsilon}_R$ dla danego naprężenia σ_R z zależności (23) znajdujemy prędkość zmian krzywizny.

3.3. Zginana rura o przekroju eliptycznym

Podobnie możemy wyznaczyć prędkość zmian krzywizny dla zginanej rury o przekroju eliptycznym o wymiarach średnic zewnętrznych $2a_z$, $2b_z$ oraz średnic wewnętrznych $2a_w$, $2b_w$.

W tym przypadku

$$\begin{aligned} I_n &= \int_A y^{\frac{n+1}{n}}\, dA = 4\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{\frac{n+1}{n}} \cos^2\theta\, d\theta \left(a_z b_z^{\frac{2n+1}{n}} - a_w b_w^{\frac{2n+1}{n}} \right) = \\ &= 4I_{on} \left(a_z b_z^{\frac{2n+1}{n}} - a_w b_w^{\frac{2n+1}{n}} \right) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{BM^n y}{\left\{ 4I_{on} \left[a_z b_z^{\frac{2n+1}{n}} - a_w b_w^{\frac{2n+1}{n}} \right] \right\}^n} \tag{26}$$

Postępując podobnie jak w przypadku rury o przekroju kołowym, otrzymamy

$$\sigma_R = \frac{M}{a_w b_w^2}\alpha \tag{27}$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{I_{on_2}^{n_2}}{I_{on_1}^{n_1}}\right]^{\frac{1}{n_1 - n_2}}\left\{\frac{\left[K_a K_b^{\frac{2n_2+1}{n_2}} - 1\right]^{n_2}}{\left[K_a K_b^{\frac{2n_1+1}{n_1}} - 1\right]^{n_1}}\right\}^{\frac{1}{n_1 - n_2}} \tag{28}$$

gdzie $K_a = \frac{a_z}{a_w}$, $K_b = \frac{b_z}{b_w}$

Zmienność α w zależności od n_1 i n_2 z przedziału $2 \div 8$ dla różnych stosunków K_a i K_b podano w tablicy 2.

Tablica 2

Zmienność parametru α w zależności od współczynników K_a i K_b dla rury o przekroju eliptycznym

K_a	K_b	α	błąd %
1,1	1,2	1,289	0,0526
1,1	1,3	0,876	0,459
1,2	1,1	1,668	0,888
1,2	1,3	0,732	0,617
1,5	1,4	0,389	0,797
1,5	1,6	0,265	0,739
2,0	1,9	0,121	0,866
2,0	2,1	0,096	0,864
2,5	2,4	0,056	0,944
2,5	2,6	0,047	0,951
3,0	2,9	0,031	1,00
3,0	3,1	0,027	1,01

Prędkość zmian krzywizny obliczymy z zależności

$$\dot{k} = \delta \dot{\varepsilon}_R \tag{29}$$

gdzie

$$\delta = [\alpha(K_a K_b^{2,5} - 1)]^{-2}\frac{1}{b_w} \tag{30}$$

Wartość $\dot{\varepsilon}_R$ otrzymujemy z testu przeprowadzonego przy naprężeniu σ_R. Prędkość zmian krzywizny obliczamy z zależności (29).

4. POWŁOKI CIENKOŚCIENNE I GRUBOŚCIENNE

4.1. Rura cienkościenna pod ciśnieniem wewnętrznym

Obwodową prędkość odkształceń cienkościennej rury pod ciśnieniem wewnętrznym możemy obliczyć z zależności [1]:

$$\dot{\varepsilon}_t = \frac{3}{4} B \sigma_i^{n-1} \frac{pa}{h} \tag{31}$$

gdzie: $\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pa}{h}$; a – promień rury, h – grubość ścianki, p – ciśnienie.

Zgodnie z przyjętą metodą, powyższą zależność zapiszemy jako:

$$\dot{\varepsilon}_t = \frac{6}{4\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\frac{pa}{\sigma_R h}\right)^n \dot{\varepsilon}_R \tag{32}$$

następnie porównamy prędkości odkształceń przy różnych wykładnikach n. Po przekształceniach:

$$\sigma_R = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pa}{h} \cong 0,86 \frac{pa}{h} \tag{33}$$

Prędkość odkształceń wyznaczymy zatem z zależności

$$\dot{\varepsilon}_t = \frac{6}{4\sqrt{3}} \dot{\varepsilon}_R \cong 0,86\, \dot{\varepsilon}_R \tag{34}$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_R$ wyznaczono przy naprężeniu σ_R.

4.2. Rura cienkościenna poddana działaniu momentu skręcającego

Prędkość odkształceń kątowych rury cienkościennej można obliczyć ze związku [2]:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{3}\, B M_s^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi a h}\right)^n \frac{1}{a} \tag{35}$$

gdzie:

M – moment skręcający,
a – promień rury,
h – grubość ścianki.

Po uwzględnieniu (7) oraz porównaniu przemieszczeń dla różnych n_1 i n_2 mamy:

$$\sigma_R = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{M_s}{ah} \tag{36}$$

Prędkość odkształceń kątowych obliczymy teraz jako:

$$\dot{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{a}\dot{\varepsilon}_R \tag{37}$$

4.3. Grubościenna powłoka cylindryczna

Obwodową prędkość pełzania grubościennej powłoki cylindrycznej obciążonej ciśnieniem p oblicza się z zależności [1]

$$\dot{\varepsilon}_t = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{n}} B \left[\frac{2}{n}\frac{p}{\left(\frac{r_z}{r_w}\right)^{2/n} - 1}\right]^n \left(\frac{r_z}{r}\right)^2 \tag{38}$$

Po uwzględnieniu (7) dla promienia zewnętrznego zapiszemy

$$\dot{\varepsilon}_t(r_z) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{\dot{\varepsilon}_R}{\sigma_R^n}\left[\frac{2}{n}\frac{p}{K^{2/n} - 1}\right]^n \tag{39}$$

gdzie:

$$K = \frac{r_z}{r_w}$$

Dla dowolnych n_1 i n_2 zachodzi równość

$$\left(\frac{p}{\sigma_R}\right)^{n_1}\left[\frac{2}{n_1(K^{2/n_1} - 1)}\right]^{n_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n_1+1}{2}} = \left(\frac{p}{\sigma_R}\right)^{n_2}\left[\frac{2}{n_2(K^{2/n_2} - 1)}\right]^{n_2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n_2+1}{2}} \tag{40}$$

Po przekształceniach

$$\sigma_R = p\,\alpha(K) \tag{41}$$

$$\alpha(K) = \sqrt{3}\left\{\frac{\left[n_1\left(K^{2/n_1} - 1\right)\right]^{n_1}}{\left[n_2\left(K^{2/n_2} - 1\right)\right]^{n_2}}\right\}^{\frac{1}{n_2 - n_1}} \tag{42}$$

Zmienność α w zależności od n_1 i n_2 dla różnych wartości K podano w tablicy 3.

Tablica 3

Zmienność parametru α w zależności od współczynnika K dla powłoki cylindrycznej

K	α	Maksymalny błąd %
1,1	9,087	0,01
1,2	4,725	0,06
1,5	2,139	0,39
2,0	1,255	0,86
2,5	0,953	1,5
3,0	0,797	2,15

Prędkość odkształceń na promieniu zewnętrznym obliczymy jako:

$$\dot{\varepsilon}_t(r_z) = \delta(K) \cdot \dot{\varepsilon}_R \tag{43}$$

gdzie:

$$\delta(K) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha^{-1}}{K-1}\right)^{2}$$

5. UOGÓLNIENIA METODY NAPRĘŻEŃ BAZOWYCH

5.1. Metoda naprężeń bazowych przy zmiennych obciążeniach

Jedną ze szczególnie ważnych cech metody naprężeń bazowych jest możliwość stosowania jej przy zmiennych obciążeniach [7]. Dokładne określenie przemieszczeń przy zmiennych obciążeniach wymaga przeprowadzenia tylko jednego testu doświadczalnego przy odpowiednio dobranym obciążeniu.

Załóżmy, że historię obciążenia możemy opisać zależnością:

$$P(t) = \overline{P} \cdot g(t) \tag{44}$$

gdzie $\overline{P}$ jest pewnym jednostkowym obciążeniem, natomiast g(t) – jest funkcją czasu odzwierciedlającą zmienność obciążenia.

Ponieważ naprężenie bazowe jest w przybliżeniu liniową funkcją obciążenia [7], możemy więc zapisać

$$\sigma_R(t) = P(t) \cdot \alpha \tag{45}$$

Jednostkowe naprężenie bazowe odpowiada jednostkowemu naprężeniu w następujący sposób:

$$\bar{\sigma}_R = \bar{P} \cdot \alpha \tag{46}$$

a zatem

$$\sigma_R(t) = \bar{\sigma}_R \cdot g(t) \tag{47}$$

Powyższa zależność oznacza, że przemieszczenie pełzaniowe może być określone na podstawie testu, w którym historia obciążenia jest proporcjonalna do historii obciążenia analizowanego elementu.

5.2. Uogólnienie metody naprężeń bazowych dla przypadków przybliżonych rozwiązań numerycznych

Przedstawione dotychczas rozwiązania umożliwiają stosowanie metody naprężeń bazowych w sytuacjach, gdy istnieje możliwość przedstawienia odkształceń pełzania w formie analitycznej. Podane dalej za [10] uogólnienia odnoszą się do przypadków, gdy istnieje tylko możliwość uzyskania rozwiązań przybliżonych przy użyciu komputera, a związki konstytutywne mogą być zapisane w postaci:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\,\sigma^n\, f(t) \tag{48}$$

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe

$$S = \frac{\sigma}{\sigma_o} \qquad \lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \qquad \varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{E} \tag{49}$$

prawo opisujące pełzanie przybiera postać

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = S^n \tag{51}$$

W przypadkach wielowymiarowych

$$\frac{d\lambda_{ij}}{d\tau} = \frac{3}{2}\, S_e^{n-1}\, s_{ij} \tag{52}$$

gdzie s_{ij} – dewiator naprężeń.

Zakładając przykładowo, że dalsze rozwiązania dotyczą ciał osiowo symetrycznych możemy wprowadzić bezwymiarowe przemieszczenie

$$U = \frac{u}{a\varepsilon_o} \tag{53}$$

gdzie:

u – przemieszczenie promieniowe,

a – promień wewnętrzny.

Prędkość bezwymiarowego przemieszczenia ma postać:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon_0 a} \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\tau} \tag{54}$$

a dalej

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{a\,\sigma_0^n\,A\,f(t)} \frac{du}{dt} \tag{55}$$

Wprowadzimy naprężenie bazowe w postaci

$$\sigma_R = \alpha\sigma_o \tag{56}$$

gdzie α – współczynnik podlegający dalej wyznaczeniu.

Bezwymiarowe prędkości przmieszczeń w stanie ustalonym spowodowane naprężeniem σ_o oraz naprężeniem bazowym σ_R są związane zależnością:

$$\frac{dU}{d\tau} = a^n \frac{dU_R}{d\tau} \tag{57}$$

Generalnie $\frac{dU}{d\tau}$ zmienia się z wartością naprężenia σ_o i wykładnika n, ale na wykresie półlogarytmicznym jako funkcja n i σ_o jest linią prostą [10].

Szczególna wartość σ_o, która daje prędkość $\frac{dU}{d\tau}$ niezależną od n (na wykresie linia pozioma), jest naprężeniem bazowym σ_R. A zatem aby wyznaczyć σ_R, potrzebne są tylko dwa obliczenia. Obliczając $\frac{dU}{d\tau}$ dla 2 różnych wykładników n_1 i n_2 dla tej samej wartości σ_o możemy zapisać

$$\left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_1} = \alpha^{n_1} \left.\frac{dU_R}{d\tau}\right|_{n_1} \tag{58}$$

$$\left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_2} = \alpha^{n_2} \left.\frac{dU_R}{d\tau}\right|_{n_2} \tag{59}$$

Warunki definiujące naprężenia bazowe powodują, że zachodzi:

$$\left.\frac{dU_R}{d\tau}\right|_{n_1} = \left.\frac{dU_R}{d\tau}\right|_{n_2} \tag{60}$$

a zatem

$$\alpha^{-n_1} \left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_2} = \alpha^{-n_2} \left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_2} \tag{61}$$

i ostatecznie

$$\alpha = \left[\frac{\left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_1}}{\left.\frac{dU}{d\tau}\right|_{n_2}} \right]^{\frac{1}{n_1 - n_2}} \tag{62}$$

5.3. Metoda lokalnych naprężeń bazowych

W dotychczasowych rozważaniach określono współczynnik proporcjonalności d jako niezależny od stałej materiałowej – wykładnika pełzania n. Doświadczenia wskazują, że w pewnych wypadkach bardzo trudne lub wręcz niemożliwe jest znalezienie takiego współczynnika, który byłby niezależny od n w całym przedziale spotykanych wartości n. W takich wypadkach możliwe jest wyznaczenie tzw. lokalnego współczynnika, który charakteryzuje się niezmiennością od n, ale tylko w pewnym przedziale w otoczeniu średniej wartości $\overline{n}$. W tym celu rozwiniemy wyrażenie na współczynnik proporcjonalności w szereg Maclaurina wokół wartości $\overline{n}$.

$$\delta(\sigma, n) = \delta(\sigma, \overline{n}) + (n - \overline{n}) \left.\frac{d\delta}{dn}\right|_{\overline{n}} + \varnothing\left((n - \overline{n})^2\right) \tag{63}$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę małe wahania wartości wokół $\overline{n}$, to człony rzędu $(n - \overline{n})^2$ możemy pominąć. A zatem jeśli teraz założymy, że $\sigma = \sigma_R$ to

$$\left.\frac{d\delta}{dn}\right|_{\overline{n}} = 0 \tag{64}$$

oraz

$$\delta(\sigma, n) = \delta(\sigma, \overline{n}) \tag{65}$$

Powyższe równanie pozwala zatem określić lokalne naprężenie bazowe. Poniżej zastosowano omówioną metodę dla przypadku zginania pręta. Zapisując jak poprzednio

$$\sigma = \alpha \frac{M}{bd^2} \tag{66}$$

współczynnik proporcjonalności

$$\delta(\sigma, n) = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \frac{1}{\alpha^n} \tag{67}$$

Wyrażenie na pochodną ma postać:

$$\frac{d\delta}{dn} = \delta\left[-\ln\alpha + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1/(2n)}{1 + 1/(2n)}\right] \tag{68}$$

Powyższe wyrażenie dla $n = \bar{n}$ przybiera wartość zero. A zatem

$$\alpha = \bar{\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2\bar{n}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\bar{n} + 1}\right) \tag{69}$$

Zatem lokalny współczynnik proporcjonalności ma postać

$$\delta(\sigma_R, n) \equiv \delta(\sigma_R, \bar{n}) = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{2\bar{n}}\right)^{\bar{n}} \frac{1}{\bar{\alpha}}\bar{n} \tag{70}$$

Równanie (64) może stanowić podstawę do przybliżonego wyznaczenia naprężeń bazowych. Niech n_1 i n_2 oznaczają 2 wartości stałych materiałowych ograniczających zakres wartości oczekiwanej $\bar{n}$, tzn. $n_1 < \bar{n} < n_2$. Wtedy przybliżenie równanie (64) można zapisać jako:

$$\left.\frac{d\delta}{dn}\right|_{\bar{n}} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{n_1 - n_2} \tag{71}$$

czyli

$$\delta_1 = \delta_2$$

i dalej

$$\delta(\sigma_R, n) \equiv \delta(\sigma_R, n_1) = \delta(\sigma_R, n_2) \tag{72}$$

5.5. Probabilistyczna interpretacja metody naprężeń bazowych

Metoda naprężeń bazowych może mieć również swoje uzasadnienie probabilistyczne. Ponieważ stała materiałowa występująca we współczynniku może być traktowana jako zmienna losowa, a więc i współczynnik δ jest zmienną losową. Efekt nieokreśloności stałych materiałowych powinien zatem być minimalizowany poprzez współczynnik δ. Naprężenie bazowe należy wybierać więc tak, aby wariancja δ była najmniejsza [15, 16].

$$V[\delta(\sigma_R)] \to \min \tag{73}$$

W szczególności jest możliwy taki wybór naprężeń bazowych σ_R, aby wariancja współczynnika δ zerowała się.

$$V[\delta(\sigma_R)] = 0 \tag{74}$$

A zatem z nierówności Czebyszewa [15] wynika, że:

$$\mathrm{Prob}[\delta = E[\delta]] = 1 \tag{75}$$

to znaczy

$$\delta = E[\delta] \tag{76}$$

Przy takim wyborze naprężeń bazowych

$$\dot{q} = E[\delta] \cdot \varepsilon_R \tag{77}$$

W przypadku gdy współczynnik δ jest funkcją tylko jednego parametru, np. n oraz $\overline{n}$ oznacza jego wartość oczekiwaną, natomiast v_n^2 – wariancję możemy zapisać:

$$E[\delta] \cong \delta(\sigma_R, \overline{n}) + \frac{d^2}{dn^2}\,\delta(\sigma_R, \overline{n})\,\frac{v_n^2}{2} \tag{78}$$

$$V[\delta] \cong \frac{d}{dn}\,\delta(\sigma_R, \overline{n})\, v_n^2 \tag{79}$$

Naprężenia bazowe wybieramy tak, aby

$$V[\delta] = 0 \tag{80}$$

tzn.

$$\frac{d}{dn}\,\delta(\sigma_R, n)\,\big|_{\overline{n}} = 0 \tag{81}$$

co jest identyczne z wyrażeniem (64).

6. OCENA CZASU ZNISZCZENIA

Ideę metody naprężeń bazowych, polegającą na wnioskowaniu o zachowaniu się elementów na podstawie wyników prostego testu na pełzanie, można również zastosować do oceny czasu zniszczenia. Opierając się na teorii zniszczenia Kaczanowa–Rabotnowa proces pełzania z uwzględnieniem zniszczenia można opisać równaniem:

$$\dot{\varepsilon} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^n$$
$$\dot{\omega} = C\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^\nu \qquad (82)$$

gdzie: B, n, C, ν – stałe materiałowe.

W pracach [17, 19], opierając się na kryteriach energetycznych podano następujące wyrażenie pozwalające na obliczenie naprężenia wywołującego zniszczenie w stanie jednoosiowym w czasie równym czasowi zniszczenia całej konstrukcji:

$$\sigma_R = B^{-1/n}\left\{\frac{\int_v \left(\frac{\dot{E}_d}{B^{-1/n}}\right)^{(n+1+\nu)/(n+1)} dv}{\int_v \frac{\dot{E}_d}{B^{-1/n}}\, dv}\right\}^{1/\nu} \qquad (83)$$

gdzie: $\dot{E}$ – jest mocą dysypowaną na jednostkę objętości,

$$\dot{E} = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (84)$$

Dla wirującej tarczy w płaskim stanie naprężenia moc dysypowaną możemy zapisać w formie:

$$\dot{E} = \sigma_r\,\dot{\varepsilon}_r + \sigma_t\,\dot{\varepsilon}_t \qquad (85)$$

Przyjmując

$$\dot{\varepsilon}_r = B\sigma_i^{n-1}\,(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_t)$$

$$\dot{\varepsilon}_t = B\sigma_i^{n-1}\,(\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_r)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r\sigma_t}$$

otrzymamy

$$\dot{E} = B\sigma_i^{n+1} \qquad (86)$$

i ostatecznie [18]

$$\sigma_R = \left[\int_{r_0}^{r_z} \sigma_i^{(n+1+v)}\, dr \Big/ \int_{r_0}^{r_z} \sigma_i^{(n+1)}\, dr \right]^{1/v} \tag{87}$$

W przypadku grubościennej powłoki walcowej obciążonej ciśnieniem p o wymiarach: promień zewnętrzny b, promień wewnętrzny a, naprężenie wywołujące zniszczenie w stanie jednoosiowym możemy obliczyć z zależności [17]:

$$\sigma_R = 2p\left\{ \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(1+v)/n} \right) \Big/ (1+v)\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right) \right)^{(1+v)} \right\}^{1/v} \frac{1}{n} \tag{88}$$

7. PODSUMOWANIE

Omówiona powyżej metoda naprężeń bazowych pozwala sprowadzić opis nieliniowego zagadnienia wyznaczenia szybkości przemieszczeń elementów maszyn wywołanych pełzaniem do opisu za pomocą prostego równania liniowego wykorzystującego jedną „wielkość fizyczną" będącą bezpośrednim wynikiem pomiaru. Takie sformułowanie pozwala w prosty sposób wyznaczać przemieszczenia ze znaczną dokładnością.

Ideę tej metody można również wykorzystać do wyznaczania czasu zniszczenia konstrukcji na podstawie badań na próbce.

Przedstawione wyniki wskazują, że metoda ta może być z powodzeniem stosowana do wielu różnych elementów, np. prętów zginanych, prętów skręcanych, powłok cienkościennych, powłok grubościennych itd.

LITERATURA

[1] Chmielniak T., Kosman G., Rusin A.: Pełzanie elementów turbin cieplnych. WNT Warszwa 1991.

[2] Kosman G., Rusin A.: Termowytrzymałość maszyn wirnikowych. Zagadnienia plastyczności i pełzania. Skrypt Pol. Śl. nr 1565, Gliwice 1991.

[3] Rusin A.: Porównanie metod wyznaczenia naprężeń w wirujących tarczach w warunkach pełzania. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Energetyka, z. 102 Gliwice 1988.

[4] Rusin A.: Modelowanie pełzania wirujących tarcz metodą elementów skończonych. PTMTS Sympozjum „Modelowanie w Mechanice", Gliwice 1989.

[5] Mackenzie A.C.: On the use of a single uniaxial test to estimete deformation rates in some structures undergoing creep. Int. J. Mech. Sci. 1968, vol 10 pp. 441–453.

[6] Fairbairn J.: A reference stress approach to creep bending of straight tubes. J. Mech. Eng. Sci. 1974. vol. 16, nr 3 pp. 125–138.
[7] Penny R.K., Mariott D.L.: Design for creep. Mc Graw–Hill, Londyn 1971.
[8] Boyle J.T., Spence J.: Stress analysis for creep. Butterwoth, Londyn 1983.
[9] Goodall I.W, Leckie F.A. Ponter A.R.S., Townley C.H.A.: The development of high temperature design methods based on reference stresses and bounding theorems. J. Eng. Mat. Techn. 1979, vol. 101 pp. 349–355.
[10] Sim R.G.: Evaluation of reference parameters for structures subject to creep. J. Mech. Eng. Sci. 1971. vol. 13, pp. 47–50.
[11] Fessler H, Hude T.H., Webster J.J.: Stationary creep prediction from model test using reference stresses. J. Strain Anal. 1977, vol. 12, nr 4, pp. 271–285.
[12] Marriot D.L.: A review of reference stress methods for estimating creep deformation. IUTAM Symposium, Creep of Structures, 1970 Gothenburg.
[13] Johnsson A.: Reference stress for structures obeying the Prandtl and Dorn creep laws. J. Mech. Eng. Sci. 1974, vol. 16, nr 5 pp. 298–305.
[14] Sin R.G.: Reference stress concepts in the analysis of structures during creep. Int. J. Mech. Sci. 1970, vol. 12, pp. 561–573.
[15] Boyle J.T.: A consistent interpretation of the reference stress method in creep design. Mech. Res. Comm. 1977. vol. 4, pp. 41 – 44.
[16] Boyle J.T.: Approximations in the reference stress method for creep design. Int. J. Mech. Sci 1980, vol. 22, pp. 73 – 82.
[17] Leckie F.A., Hayhurst D.R.: Creep rupture of structures. Proc. R. Soc. Lond. A 340, 1974, pp. 323–347.
[18] Walczak J.: Stany krytyczne i pozakrytyczne niesprężystych ustrojów nośnych w ujęciu metody elementów skończonych. ZN Pol. Rzeszowskiej, nr 23, Rzeszów 1985.
[19] Walczak J.: Stany krytyczne tarcz wirujących w warunkach nieliniowego pełzania. Rozprawy Inżynierskie, vol. 27, nr 2, 1979, s. 325–340.

Abstract

The reference stress method, based on the direct correlation of the creep strains in en element to a certain simple creep test at a given referencestress is described the paper. The method allows separating the response of the construction into two parts dependent on the geometry and the material respectively. The first component may be determined from a theoretical analysis while the other one is calculated basing on a simple uniaxial creep test. The detailed description of the strains in the bent bars with rectangular

cross sections, bent circular and elliptical tubes, thin–walled tubes with internal pressure, thin–walled tubes under torque and thick walled cyllindrical shells is given. The generalization of the method including the cases of variable loading and approximate numerical solutions is also presented.

Basing on the Kachanov–Rabotnov damage theory and the energetic criteria the reference stress method may also be used to calculating the rupture time. The formulae for the stresses causing a failure of a sample under uniaxial drawing force after a time equivalent to the damage of a rotating disc and a pressurized cyllindrical shell are also given.