

Wiesław Ostachowicz

Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

Jacek Jackiewicz

ATR, Bydgoszcz

MODELOWANIE PROPAGACJI PĘKNIĘĆ ZMĘCZENIOWYCH ELEMENTAMI BRZEGOWYMI

Streszczenie. W artykule przedstawiono wprowadzenie do techniki elementów brzegowych, które pozwalają na dyskretne modelowanie rozwoju płaskich pęknięć zmęczeniowych. Zwrócono uwagę na zasadnicze właściwości, niezbędne do matematycznego określenia takiego modelu. Wprowadzono iteracyjny opis brzegu obszaru całkowania badanego ciała, zmieniający się zgodnie z rozwojem pęknięcia zmęczeniowego. Uwzględniono możliwość wystąpienia zjawiska kontaktu pomiędzy powierzchniami pęknięcia.

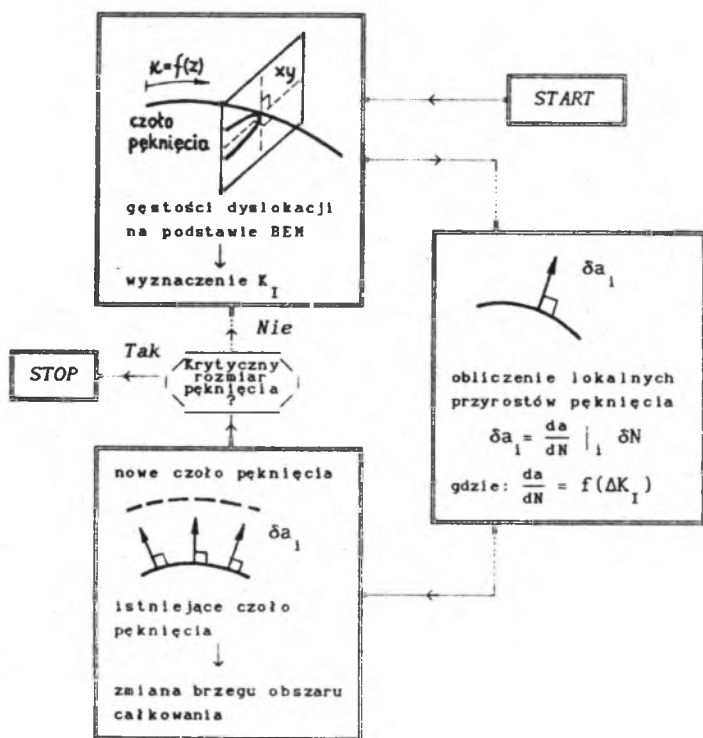
Резюме. В статье представлено введение в технику граничных элементов, которые разрешают дискретно моделировать процесс роста плоских трещин усталости. Обращено внимание на принципиальные проблемы, необходимые для математического определения этой модели. Осуществлено, по методу итерации, описание контура интегрального пространства исследуемого тела, изменявшегося вместе с ростом трещины. Принята во внимание возможность появления контакта между поверхностями трещины.

Summary. This paper is an introduction to a boundary element technique which allows discrete modelling of a planar fatigue crack propagation. The key features of a mathematical determination for the crack propagation model are discussed. The shifting boundary mesh which moves with the crack tip is used. The crack contact problems are considered.

1. WSTĘP

Przy złożonych warunkach obciążenia często powstają pęknięcia z załamaniem. Modelowanie pęknięć z załamaniem elementami skończonymi nie jest łatwym zadaniem, gdy zalecana jest drobiazgową dyskretyzacja, a także użycie specjalnych, osobliwych elementów w najbliższym otoczeniu pęknięcia i w miejscach załamania jego linii. Jeszcze bardziej uciążliwe

jest stosowanie metody elementów skończonych w modelowaniu propagacji pęknięcia, ponieważ oprócz drobniagowej dyskretyzacji specjalne elementy skończone muszą przemieszczać się wraz z wierzchołkami pęknięcia. Alternatywna do metody elementów skończonych metoda elementów brzegowych BEM (z ang. Boundary Element Method) jest bardziej wydajna w rozwiązywaniu zagadnień związanych z propagacją pęknięć z załamaniami. Metoda elementów brzegowych dyskretyzuje jedynie brzeg obszaru całkowania badanego ciała. Dzięki temu rozmiar zagadnienia do rozwiązania może być znacznie zredukowany. Bezpośrednie zastosowanie BEM do modelowania problemów pęknięcia nie daje w pełni pozytywnych rezultatów. Geometryczne pokrywanie się górnej i dolnej linii pęknięcia często prowadzi do nierozwiązywalnych układów równań. Można tego uniknąć przez przecięcie rozpatrywanego obszaru całkowania wzdłuż linii pęknięcia [5] na dwie części. Takie podejście jednak wprowadza nowe niewiadome wzdłuż linii pęknięcia, które mogą zna-



Rys. 2.1. Model propagacji pęknięć zmęczeniowych

Fig. 2.1. Fatigue Crack Propagation Model

cznie zwiększyć czas obliczeń numerycznych. Najbardziej efektywną metodą, rozwiązującą dwuwymiarowe pęknięcia z zagięciami, okazała się metoda elementów brzegowych, wykorzystująca równania całkowe dla sił wypadkowych [3,7] wzdłuż linii pęknięcia.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Rysunek 2.1 przedstawia schemat blokowy modelu propagacji pęknięć zmęczeniowych za pomocą elementów brzegowych. W modelu tym wykorzystano definicję współczynnika intensywności naprężeń M.L. Williamsa [1], uwzględniającą gęstość dyslokacji w wierzchołku pęknięcia

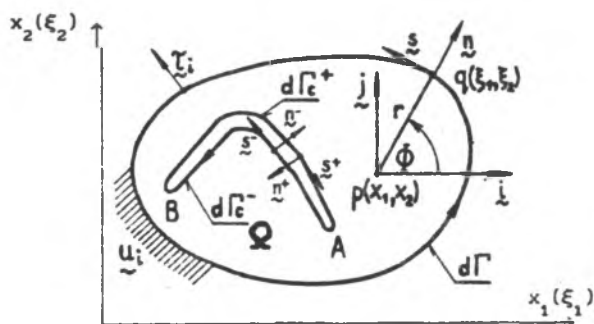
$$K_I = \frac{2\mu}{1+\kappa} \lim_{x \rightarrow a} [2(x-a)]^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} [\theta(x, 0^+, 0) - \theta(x, 0^-, 0)] \quad (2.1)$$

gdzie: μ , κ - stałe sprężyste,

$\frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial x}$ - gęstość dyslokacji pęknięcia,

$\theta(x, 0^+, 0), \theta(x, 0^-, 0)$ - odpowiednio przemieszczenie górnej i dolnej linii pęknięcia.

Powyższe ogólne asymptotyczne wyrażenie jest zapisane dla pierwszego podstawowego przypadku rozwoju pęknięcia G.R. Irwina. Pęknięcie to leży w płaszczyźnie xz , a płaszczyzna xy jest prostopadła do brzegu pęknięcia w punkcie o współrzędnych $x=a, y=0, z=0$.



Rys. 2.2. Stosunki przestrzenne i układy współrzędnych

Fig. 2.2. Geometry and coordinate systems

2.1. Gęstość dyslokacji

Na rysunku 2.2 przedstawiono dwuwymiarowy obszar domknięty Ω ograniczony linią $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ z wewnętrzną łamaną linią pęknięcia $\Gamma_c = \Gamma_{c1} + \Gamma_{c2}$, który jest obciążony zadanymi siłami powierzchniowymi τ_j na określonej długości brzegu $\Gamma_1 + \Gamma_{c1}$ i zadanymi przemieszczeniami u_j w innej części brzegu $\Gamma_2 + \Gamma_{c2}$. Dla układu płaskiej deformacji przemieszczenia wewnętrznych punktów $u_i(p)$ mogą być wyrażone tożsamością Somigliany [2]

$$u_i(p) = \oint_{\Gamma} U_{ij} \tau_j d\Gamma - \oint_{\Gamma} T_{ij} u_j d\Gamma + \oint_{\Gamma_c} U_{ij} \tau_j d\Gamma_c - \oint_{\Gamma_c} T_{ij} u_j d\Gamma_c, \quad (2.1.1)$$

$$\text{gdzie: } U_{ij}(p, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}/r^2], \quad (2.1.2)$$

$$T_{ij}(p, q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right].$$

W powyższych wzorach G jest stałą sprężystości poprzecznej, ν współczynnikiem Poissona, δ_{ij} delta Kroneckera, n wektorem normalnym do Γ lub Γ_c w punkcie q , $r=r(p, q)$ odległością pomiędzy punktem źródłowym $p(x_1, x_2)$ a punktem pola $q(\xi_1, \xi_2)$. W celu uproszczenia zapisu matematycznego przyjęto następujące oznaczenia:

$$r = (r_{11}r_{21})^{1/2}, \quad r_{11} = \xi_1 - x_1, \quad r_{21} = r_{11}/r. \quad (2.1.3)$$

Uwzględniając całkę tylko wzdłuż linii pęknięcia można wyznaczyć udział pęknięcia w przemieszczeniach wewnętrznych punktów $u(p)$

$$u_i^c(p) = \int_{\Gamma_c^-} U_{ij}^- \tau_j^- d\Gamma_c^- - \int_{\Gamma_c^-} T_{ij}^- u_j^- d\Gamma_c^- + \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}^+ \tau_j^+ d\Gamma_c^+ - \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}^+ u_j^+ d\Gamma_c^+. \quad (2.1.4)$$

Górne indeksy $+$ i $-$ oznaczają odpowiednio górną i dolną linię pęknięcia. Założono, że linia pęknięcia jest obciążona symetrycznie t.j. $\tau_j^+ = -\tau_j^-$. Na podstawie równań (2.1.2) można wykazać, że $T_{ij}^+ = -T_{ij}^-$ i $U_{ij}^+ = U_{ij}^-$. Stąd równania (2.1.4) mogą być uproszczone do postaci

$$u_i^c(p) = \int_{\Gamma_c^-} \Gamma_{ij}^- \Delta u_j^c d\Gamma_c^-. \quad (2.1.5)$$

W celu uzyskania niższego rzędu osobliwości w równaniach całkowych przyjęto funkcje wpływu W_{ij} wzdłuż linii pęknięcia s^- , które można

wyznaczyć z następującej zależności:

$$\Gamma_{1j}^- = \frac{\partial}{\partial s} W_{1j}; \quad (2.1.6)$$

Funkcje wpływu W_{1j} zostały wyprowadzone przez Ghosha i innych [4] z ogólnych brzegowych równań całkowych za pomocą całkowania przez części.

Tak więc ostatecznie równania (2.1.1) przyjmują postać:

$$c_{1j}(p)u_j(p) = \int_{\Gamma_{1j}^-} U_{1j} \tau_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{1j}^-} \Gamma_{1j}^- u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_c} W_{1j} \frac{\partial}{\partial s} (\Delta u_j^c) ds, \quad (2.1.7)$$

gdzie: $\frac{\partial}{\partial s} (\Delta u_j^c)$ - gęstości dyslokacji pęknięcia.

Współczynniki $c_{1j}(p)$ dla punktów wewnętrznych są równe 1, natomiast dla punktów umieszczonych na brzegu zależą od lokalnego kształtu brzegu obszaru całkowania. Równania całkowe (2.1.7) służą do wyznaczania niewiadomych przemieszczeń $u_j(p)$, gdy wcześniej zostały określone gęstości dyslokacji $\frac{\partial}{\partial s} (\Delta u_j^c)$ wzdłuż linii pęknięcia Γ_c^- . Gęstości dyslokacji wzdłuż linii pęknięcia Γ_c^- wyznacza się przekształcając równania (2.1.7) tak, aby otrzymać dla linii pęknięcia zależności między siłami powierzchniowymi $\tau_j(p^-)$ i gęstościami dyslokacji. Wymagane zależności można zbudować na podstawie wzoru

$$\tau_j = \sigma_{1j} n_j, \quad (2.1.8)$$

gdzie: n_j - jednostkowe zewnętrzne wektory normalne do linii brzegu,
 σ_{1j} - tensor naprężeń.

Z kolei naprężenia w ośrodku izotropowym wyznacza się z uogólnionego prawa Hooke'a

$$\sigma_{1j} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{1j} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right). \quad (2.1.9)$$

i z równań (2.1.7), które służą do określenia pochodnych przemieszczeń w zależności (2.1.9).

Bardziej dokładne wyniki obliczeń można uzyskać budując równania dla sił wypadkowych $F_1^c(p^-)$ [3] i gęstości dyslokacji wzdłuż linii pęknięcia. Uwzględniając funkcje Muskhelishvili'ego [6] siły wypadkowe na brzegu Γ_c^- z ustalonym punktem źródłowym p i zmiennym punktem pola q mają postać

$$F_1 + i F_2 = \int_{\Gamma_c} [\tau_1(s) + i \tau_2(s)] ds, \quad (2.1.10)$$

gdzie s jest miarą długości brzegu Γ_c , $\tau_i = \sigma_{ij} n_j$ są siłami powierzchniowymi, a n_j oznaczają jednostkowe wektory normalne do brzegu całkowania.

Ostatecznie siły wypadkowe [7] z wierzchołka pęknięcia A do punktu p wzdłuż dolnej linii pęknięcia (rys. 2.2) wynoszą

$$F_i^c(p^-) = \int_A \tau_i(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_{ij}^T} F_{ij}^T \tau_j d\Gamma + \int_{\Gamma_{ij}^u} F_{ij}^u u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_c} F_{ij}^d \frac{\partial}{\partial s} (\Delta u_j^c) ds + C_i, \quad (2.1.11)$$

gdzie funkcje wpływu $F_{ij}^T, F_{ij}^u, F_{ij}^d$ są zamieszczone w pracach [3,7], a stałe całkowania C_i należy wyznaczyć metodą kolokacji.

Z równań (2.1.11) ustala się gęstości dyslokacji wzdłuż linii pęknięcia, które są potrzebne do określenia współczynnika intensywności naprężeń i niewiadomych przemieszczeń $u_i(p)$ w równaniach (2.1.7).

2.2. Kontakt powierzchni pęknięcia

W przypadku zaistnienia zjawiska kontaktu powierzchni pęknięcia, niewiadomymi w równaniach całkowych (2.1.11) są gęstości dyslokacji na odcinkach otwartych fragmentów pęknięcia i siły kontaktu w miejscach pęknięcia zamkniętego. Problem kontaktu powierzchni pęknięcia jest zagadnieniem nieliniowym, gdy długości zamkniętych odcinków pęknięcia nie są znane. Z tych względów należy zastosować odpowiedni proces iteracyjny. Aby uprościć zagadnienie, przyjmuje się, że nie ma tarcia między powierzchniami pęknięcia, znajdującymi się w kontakcie. Warunki brzegowe na otwartym odcinku linii pęknięcia mogą być zapisane w następujący sposób: $\tau_n^+ = \bar{\tau}_n^+$, $\tau_n^- = \bar{\tau}_n^-$, $\Delta u_n^+ \geq 0$, a na zamkniętym odcinku linii pęknięcia: $\Delta u_n^- = 0$, $\tau_n^+ = \bar{\tau}_n^+$, $\tau_n^- \leq 0$, gdzie Δu_n oznacza normalną składową skoku przemieszczenia wzdłuż linii pęknięcia, natomiast τ_n^+ i τ_n^- są odpowiednio stycznymi i normalnymi składowymi sił powierzchniowych wzdłuż linii pęknięcia. Górny indeks '+' wskazuje na przyjęte wielkości w danym kroku obliczeń.

3. WNIOSKI

W artykule zaprezentowano wprowadzenie do modelowania propagacji dwuwymiarowych pęknięć zmęczeniowych elementami brzegowymi. Zgodnie z zaleceniami Ghosha i innych [4] uzyskano niższy rząd osobliwości równań

całkowych ($O(1/R)$) dla naprężeń wzdłuż linii pęknięcia, które zostały wyprowadzone z ogólnych brzegowych równań całkowych (2.1.7). Całki w równaniach (2.1.11) wzdłuż zewnętrznego brzegu Γ nie zawierają osobliwości. Jedyną osobliwością w równaniach (2.1.11) jest wyrażenie logarytmiczne ($O(\ln r)$) w funkcjach wpływu F_{ij}^d [7]. Dwie pierwsze całki w równaniach (2.1.7) są takie same jak w standardowych równaniach (2.1.1) BEM. To czyni możliwym włączenie sformułowań problemów pęknięcia zmęczeniowego do istniejących programów BEM dla zagadnień elastostatyki.

LITERATURA

- [1] Atluri S.N.: Computation Methods in the Mechanics of Fracture. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1986, s.10.
- [2] Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.: Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag 1984.
- [3] Cheung Y.K., Chen Y.Z.: Solutions of Branch Crack Problems in Plane Elasticity by Using Integral Equation Approach. Engineering Fracture Mechanics 1987, Vol.28, s.31-41.
- [4] Ghosh N., Rajiyah H., Ghosh S., Mukherjee S.: A New Boundary Element Method Formulation for Linear Elasticity. Journal of Applied Mechanics 1986, Vol.53, s.69-76.
- [5] Lee K.Y., Won D.S., Choi H.J.: Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factor for Z-shaped crack. Engineering Fracture Mechanics 1987, Vol.27, s.75-82.
- [6] Muskhelishvili N.I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Groningen 1962.
- [7] Zang W.L., Gudmundson P.: An Integral Equation Method for Piece-Wise Smooth Cracks in an Elastic Half-Plane. Engineering Fracture Mechanics 1989, Vol.32, s.889-897.

MODELLING OF FATIGUE CRACK PROPAGATION PROBLEMS BY THE BEM

The purpose of this paper is to introduce a boundary element technique which calculates the stress intensity factor [1] at a planar crack tip, uses it to compute a new position for the crack front and automatically re-meshes to the new front (Fig. 2.1).

The integral eq. (2.1.7) for the displacements on the outer boundary, together with the integral eq. (2.1.11) for the resultant forces on the

crack line define the problem to be solved. Following the ideas developed by Ghosh et al. [4], lower order singular integral equations ($O(1/r)$) for the crack line stresses are derived from the general boundary integral eq. (2.1.7). The integrals in eq. (2.1.11) along the outer boundary Γ (Fig. 2.2) contain no singularity. The only singularity in eq. (2.1.11) is the logarithmic term in F_{ij}^d [7].

When crack contact occurs, the unknowns in eq. (2.1.11) will be dislocation densities at the open portion of the crack and contact tractions on the contact regions of the crack.