

Marian Ostwald

Instytut Mechaniki Stosowanej

Politechnika Poznańska

OPTYMALNE PROJEKTOWANIE TRÓJWARSTWOWYCH POWŁOK WALCOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie zadania optymalizacji wielokryterialnej trójwarstwowej powłoki walcowej obciążonej siłą osiową i ciśnieniem zewnętrznym. Model uwzględnia dwa kryteria: minimalną masę i minimalną odwrotność sztywności powłoki na zginanie. Zbiór ograniczeń zawiera 9 lub 11 ograniczeń. Najlepsze rozwiązanie optymalne wyznaczono za pomocą funkcji preferencji.

Резюме. В работе представлено решение задачи многоцелевой оптимизации трехслойной цилиндрической оболочки при осевом сжатии и при внешнем давлении. Модель оболочки принимает во внимание два критерия: минимум веса и минимум обратной жесткости при изгибе оболочки. Множество ограничений принимает во внимание 9 или 11 ограничений. Самое лучшее оптимальное решение получено при помощи функций предпочтений.

Summary. In the paper a solution of multicriterion optimization of a sandwich cylindrical shell under axial compression and external pressure is presented. A model is formulated by adopting the two objectives like minimum of weight and minimum of the reciprocal of shell bending rigidity. A set of constraints contains 9 or 11 constraints. The best optimal solution is obtained with the aid of the preference functions.

1. WSTĘP

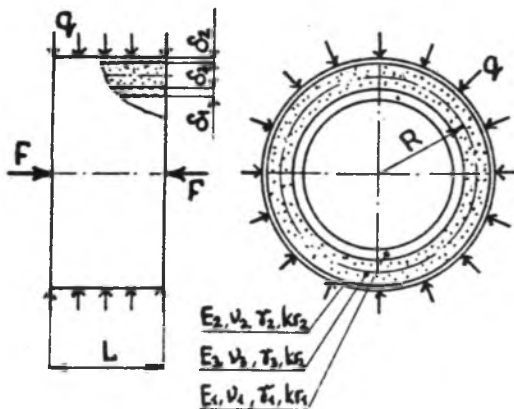
Trójwarstwowe konstrukcje cienkościenne typu płyty, powłoki, charakteryzują się korzystnym stosunkiem przenoszonego obciążenia do masy konstrukcji. Odpowiednia konstrukcja wypełniacza może zapewnić wymagana sztywność konstrukcji, jej zdolność do tłumienia drgań mechanicznych lub akustycznych, własności termoizolacyjne. Zalety konstrukcji trójwarstwowych powodują, że są one bardzo atrakcyjnym obiektem inżynierskim o szerokich możliwościach praktycznego zastosowania.

W konstrukcji trójwarstwowej (rys.1) każdy element spełnia rolę, która pozwala na najlepsze wykorzystanie jego właściwości. Warstwy nośne wykonane z materiału o wysokich własnościach mechanicznych, przedzielone warstwą wypełniacza, zapewniają odpowiednią wytrzymałość i sztywność konstrukcji. Wypełniacz może zapewnić konstrukcji te cechy, o jakich była mowa powyżej. Konstrukcję trójwarstwową z natury rzeczy można zaliczyć do konstrukcji optymalnych. Zastosowanie tych konstrukcji ograniczone jest przez dwie grupy czynników:

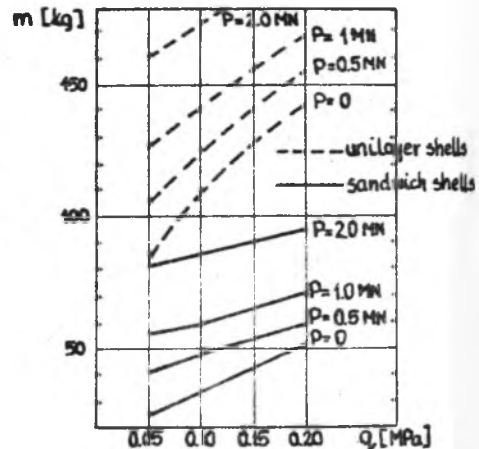
- trudności technologiczne wykonania konstrukcji,
- złożony model matematyczny opisujący zachowanie się konstrukcji, a zwłaszcza utratę stateczności (cienkościenność konstrukcji).

Zalety konstrukcji trójwarstwowych sprawiają jednak, że warto jest pokonywać te trudności ze względu na wymierne korzyści ekonomiczne wynikające z zastosowania tych konstrukcji. Niniejsza praca przedstawia sposób projektowania związany ze stworzeniem modelu matematycznego konstrukcji oraz odpowiedniego programu optymalizacyjnego.

Zastosowanie metod programowania matematycznego pozwala wykorzystać zalety konstrukcji trójwarstwowych w możliwie najszerszym zakresie (rys.2).



Rys.1 Model powłoki trójwarstwowej
Fig.1 Model of sandwich shell



Rys.2 Porównanie powłoki jedno- i trójwarstwowej
Fig.2 Comparison of unilayer and sandwich cylindrical shell

przedstawia porównanie optymalizowanej ze względu na minimum masy powłok walcowych jedno- i trójwarstwowych, spełniających identyczne warunki. Z porównania tego wynika, że konstrukcja trójwarstwowa jest 1.5-3 razy lżejsza od równoważnej konstrukcji jednowarstwowej [1].

Przyszłość optymalnego projektowania związana jest z optymalizacją wektorową, która oceniając konstrukcję z punktu widzenia kilku kryteriów, pozwala na lepszy opis rzeczywistej konstrukcji. Jednakże optymalizacja wektorowa powoduje, że wybór najlepszej optymalnej konstrukcji nie jest tak prosty, jak w optymalizacji jednokryterialnej (skalarnej), gdyż:

- 1^o znalezienie optymalnej konstrukcji wymaga zastosowania bardziej skomplikowanych procedur optymalizacyjnych,
- 2^o wybór konstrukcji najlepszej dokonywany jest najczęściej ze zbioru konstrukcji optymalnych - stąd też projektant przy podejmowaniu decyzji musi korzystać z dodatkowych preferencji.

2. MODEL TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI WALCOWEJ

Trójwarstwowa powłoka walcowa (rys. 1) obciążona jest osiową siłą ściskającą F oraz ciśnieniem zewnętrznym q . Wzory opisujące stateczność powłoki przy ściskaniu, ciśnieniu oraz ściskaniu i ciśnieniu oraz wzory opisujące stan naprężenia przedstawione są w [1] i [2].

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI WEKTOROWEJ

Zadanie optymalizacji wektorowej polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych \vec{x}^* , należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych Ω , minimalizującego wektorową funkcję celu

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})] \longrightarrow \text{minimum.} \quad (1)$$

Ze względów praktycznych, wektorową funkcję celu (1) przekształca się w funkcję skalarną za pomocą współczynników wagowych:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k w_i \tilde{f}(\vec{x}) \longrightarrow \text{minimum,} \quad w_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1, \quad (2)$$

gdzie: $\tilde{f}(\vec{x})$ - znormalizowana funkcja celu

$$\tilde{f}_i(\bar{x}) = \frac{f_i(\bar{x}) - f_{i\min}(\bar{x})}{f_{i\max}(\bar{x}) - f_{i\min}(\bar{x})}, \quad (3)$$

$f_{i\min}(\bar{x})$, $f_{i\max}(\bar{x})$ - minimalne i maksymalne wartości funkcji celu, określone poprzez minimalizację każdego kryterium oddzielnie (wyznaczają one również położenie rozwiązania idealnego), w_i - współczynniki wagi.

Minimalizacja (2) dla różnych w_i z uwzględnieniem zbioru ograniczeń pozwala na otrzymanie zbioru optymalnych rozwiązań kompromisowych (optymalnych w sensie Pareto). Zbiór ten stanowi podstawę do wyznaczenia rozwiązania najlepszego dzięki przyjęciu dodatkowych kryteriów w postaci różnych funkcji preferencji. Projektant ze zbioru rozwiązań preferowanych może wybrać najlepsze rozwiązanie optymalne, przeznaczone do realizacji. Projektant w swoim ostatecznym wyborze może kierować się również ocenami subiektywnymi.

Przedstawiony skrótowo model postępowania realizowany jest przez program komputerowy MOST, którego schemat blokowy przedstawiono w [3].

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Program MOST został zastosowany do określenia optymalnych grubości warstw trójwarstwowej powłoki walcowej (δ_1 , δ_2 , δ_3 - zmienne decyzyjne). Kryteria optymalizacyjne są następujące:

$$- f_1(\bar{x}) = 2 \pi R L (\delta_1 \gamma_1 + \delta_2 \gamma_2 + \delta_3 \gamma_3) \longrightarrow \min \quad [\text{kg}] \quad (4)$$

gdzie: γ_i - masa właściwa materiału warstw powłoki.

$$- f_2(\bar{x}) = \frac{1}{E \delta_1 \delta_2 \left(\delta_3 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right)^2} \longrightarrow \min \quad \left[\frac{1}{\text{MNm}} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{(1 - \nu^2)(\delta_1 + \delta_2)}$$

Pierwsze kryterium określa minimalną masę powłoki, drugie określa minimalną wartość odwrotności sztywności powłoki na zginanie.

Zbiór ograniczeń był następujący:

1. Dopuszczalne obciążenie krytyczne jest większe od obciążenia powłoki:

$$L_{\text{kryt dop}} \geq (F, q, F + q), \quad L_{\text{kryt dop}} = \frac{L_{\text{kryt}} \alpha}{n}, \quad (6)$$

gdzie: L_{kryt} - górne obciążenie krytyczne dla danego obciążenia.
 α - współczynnik redukcyjny uwzględniający imperfekcje [1],
 n - współczynnik bezpieczeństwa [1].

2. Naprężenia zredukowane w każdej warstwie nie przekraczają wartości dopuszczalnych:

$$\sigma_{i \text{ red}} \leq k r_1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

3. W celu zachowania ważności wzorów opisujących stateczność i stan naprężeń w powłoce spełnione muszą być ograniczenia:

$$\frac{R}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3} > 20, \quad bL > 3, \quad b = \frac{(1 - \nu^2)^{1/4}}{(R \delta)^{1/2}} \quad (8)$$

3. Ze względów technologiczno-konstrukcyjnych rozpatrywano dwie grupy ograniczeń:

$$3.1. \delta_{1,2,3} > 0, \quad (\text{w sumie 9 ograniczeń}), \quad \text{lub} \quad (9.1)$$

$$3.2. 0.1 \text{ mm} \leq \delta_{1,2} \leq 3 \text{ mm}, \quad \delta_3 \geq 5 \text{ mm}, \quad (\text{w sumie 11 ograniczeń}). \quad (9.2)$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla powłoki o wymiarach $R=1$ m, $L=1$ m. Własności mechaniczne materiału powłoki przedstawione są w [1].

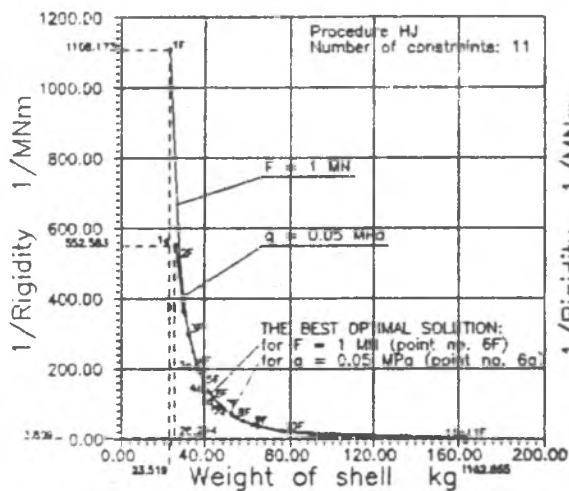
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3 i 4 oraz w tabelicy 1. Rysunki przedstawiają zbiory rozwiązań kompromisowych dla różnych obciążeń, położenie rozwiązania idealnego oraz najlepsze rozwiązanie optymalne wyznaczone za pomocą funkcji preferencji (funkcje dystansowe $p=1,2$, metoda min-max, funkcja użytkowa). Optymalne parametry powłoki podano w tabelicy 1. Górny wiersze pokazują wielkości otrzymane za pomocą procedury HJ (rozwiązania ścisłe), dolne - za pomocą procedury MESP, (rozwiązania praktyczne, do wykorzystania praktycznego).

Tabelica 1 zawiera wyniki dla zbioru zawierającego 11 ograniczeń. Dla 9 ograniczeń otrzymano $\delta_3 = 0$, co pozbawia konstrukcję zalet właściwych dla konstrukcji trójwarstwowej. Nałożenia na zmienne decyzyjne dodatkowych ograniczeń pozwoliło na zachowanie cech konstrukcji trójwarstwowej ($\delta_3 > 0$), a także spowodowało, że w sumie jest to konstrukcja lżejsza i sztywniejsza.

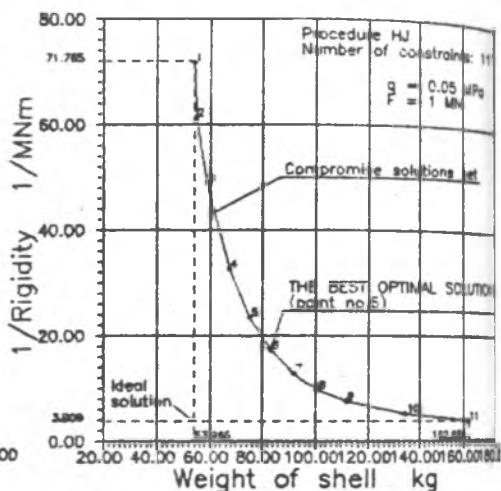
Tablica 1

Optymalne parametry walcowej powłoki trójwarstwowej

Lp	Obciążenie	Grubości optymalne [mm]			f_1 [kg]	f_2 [$\frac{1}{\text{MNm}}$]
		δ_1	δ_2	δ_3		
1.	F = 1 MN	0.437100	0.437110	21.829592	44.074	111.481
		0.4	0.4	23.0	44.322	115.255
2.	q = 0.05 MPa	0.518200	0.518200	25.881764	52.250	69.909
		0.5	0.5	26	51.773	71.894
3.	F = 1 MN q = 0.05 MPa	0.825710	0.826010	41.187905	83.197	17.317
		0.8	0.8	42	83.365	17.226



Rys.3 Zbiór rozwiązań kompromisowych dla obciążeń pojedynczych (osiowe ściskanie, ciśnienie)



Rys.4 Zbiór rozwiązań kompromisowych dla obciążenia złożonego (osiowe ściskanie + ciśnienie)

Fig.3 Compromise solutions set for single loads (axial compression, external pressure)

Fig.4 Compromise solutions set for combined load (axial compression + external pressure)

LITERATURA

- [1] Ostwald M.: Optimum weight design of sandwich cylindrical shells under combined loads. Computers and Structures, vol. 37, no.3, 1990.
- [2] Ostwald M.: Nieliniowe zagadnienie stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej przy obciążeniach złożonych. Rozprawy inżynierskie, 29, 2,
- [3] Ostwald M.: Optymalizacja wektorowa powłokowych konstrukcji trójwarstwowych. ZN Pol. Śl., ser. Mechanika, z.103, Gliwice 1991.

OPTIMAL DESIGN OF SANDWICH CYLINDRICAL SHELL

Multi layered thin-walled structures like plates and shells have profitable relation between the loads and the weight. The sandwich structures with properly chosen core structures and core properties may show thermo-insulating and vibro-insulating features. The advantages of sandwich structures can be better exploited if the basic geometric parameters and physical properties of material are calculated with the help of structural optimization. If an optimization method is applied, we can obtain the best optimal structures. Comparison of the optimal weight for the sandwich and for the unilayer shells show, that the weight of the sandwich cylinder is 1.5 - 3 times less than weight of the equivalent unilayer cylinder [see Fig. 1] [1]. Model of the sandwich cylindrical shell under combined loads is shown in Fig.2. The equations describing stability and stresses of the shell are presented in [1] and [2].

The problem of multi criterion optimization is solved by transformation of the vector function (1) to scalar one (2) (method of objective weighting). The normalized objectives (3) are applied. Solution of this problem is based on computer program MOST [3].

In the numerical example it is assumed, that the weight of the shell (4) is the first objective function, and that the reciprocal of the shell bending rigidity (5) is the second objective function.

The set of constraints contains the stability condition (6), the stresses conditions (7), the conditions considering the importance of shell stability equations (8) and the technological and constructional requirements (9.1) or (9.2).

The results of numerical calculations for the set of 11 constraints (9.2) are presented in Table 1 and Figures 1 and 2. In Table 1, for the load accepted, two solutions are demonstrated: the upper rows show the exact solutions, the lower rows show the standard solution (i.e. thicknesses of the shell are in agreement with the national standard). For the set of the 9 constraints (9.1) thickness of the core $\delta_3=0$, and this fact deprives the sandwich structures of his advantages.