ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: ENERGETYKA z. 131 Nr kol. 1427

Stanisław OCHĘDUSZKO , Stanisław Jerzy GDULA
Politechnika Śląska

WYPŁYW ADIABATYCZNY PŁYNU ZE ZBIORNIKA[1)]

Streszczenie. W artykule tym w sposób najbardziej ogólny potraktowano naukowo jeden z przypadków nieodwracalnego zjawiska, jakim jest dławienie czynnika przy wypływie ze zbiornika. Rozpatrzono wypływ adiabatyczny. Z kolei zastosowano prawa ogólne do różnych czynników termodynamicznych i przeprowadzono szczegółowe obliczenia stopnia wyładowania zbiornika przy takim samym spadku ciśnienia wewnątrz niego.

THE ADIABATIC FLOW OUT THE FLUID OF A VESSEL

Summary. In this paper the throttling a fluid during flow out of adiabatic vessel was analised. General dependencies were obtained and then applied to determining the ratio of discharge a vessel for various thermodynamic substances at the same pressure drop.

1. Prawa ogólne

Szybki wypływ czynnika ze zbiornika do otoczenia jest jednym ze sposobów obniżania temperatury (np. gazu) wewnątrz zbiornika lub jest wykorzystywany do wytwarzania pary (w tzw. cieplarkach). Jeżeli wypływ czynnika jest prędki, to przemianę termodynamiczną zachodzącą wewnątrz układu, którego ograniczeniem są ściany wewnętrzne zaizolowanego

---

[1)] Praca wykonana w 1960 r., została zaprezentowana dnia 7 czerwca 1960 r. na wspólnym posiedzeniu Komisji Nauk Technicznych Krakowskiego Oddziału PAN i Gliwickiego Oddziału PTMTiS. W *Sprawozdaniach z posiedzeń PAN Oddz. Kraków (1960 r.)* zamieszczono jedynie streszczenie pracy. Niniejszy pełny tekst nie był publikowany i jest on przedstawiony w oryginalnej postaci, przygotowanej do druku przez prof. Stanisława Ochęduszkę. Powszechnie przyjmowany wówczas sposób zapisu równań termodynamicznych był dostosowany do tzw. *technicznego układu jednostek*. M.in. równoczesne używanie dwóch jednostek energii: *kpm* (kilopondometr) i *kcal* skutkowało wprowadzeniem do równań przelicznika A tych jednostek.

zbiornika, można uważać za adiabatę otwartą w tym sensie, że masa G czynnika wewnątrz układu podczas wypływu maleje, $\mathrm{d}G < 0$, bez dopływu ciepła z zewnątrz, $Q_o = 0$.

Parametry początkowe dotyczące czynnika przed otwarciem zaworu na początku wyładowania zbiornika oznaczone są za pomocą wskaźnika 1, np.: G_1 - ładunek początkowy masy w zbiorniku, p_1 - ciśnienie początkowe, t_1 - temperatura początkowa czynnika. To, co dotyczy układu po wyładowaniu, oznaczone będzie indeksem 2, a więc: G_2, p_2 i t_2. Parametry określające stan czynnika w przewodzie rurowym, przez który odbywa się wypływ, otrzymują indeks r. Natomiast parametry dotyczące czynnika wewnątrz zbiornika (układu) oznaczane są przez wskaźnik u.

Celem niniejszej rozprawy jest wyznaczenie ilości masy

$$G_1 - G_2 = \Delta G \tag{a}$$

która wypłynie na zewnątrz, jeżeli ciśnienie w zbiorniku spadnie z p_1 na p_2.

Czynnikiem w zbiorniku może być gaz lub para mokra. Drugi przypadek zachodzi w tzw. cieplarce Ruthsa [2] [1]. Ze względu na istnienie dwóch faz w parze mokrej wyładowanie czynnika może przebiegać w trojaki sposób, ze zbiornika bowiem może wypływać:

a) faza gazowa z przestrzeni parowej lub

b) faza ciekła z przestrzeni ciekłej lub

c) mieszanina obu faz (para mokra).

Niezależnie od rodzaju czynnika dla przemiany wyładowania w czasie $\mathrm{d}\tau$ ważne jest równanie I zasady termodynamiki [1] [2]

$$0 = -\mathrm{d}(Gu_u) + i_r \mathrm{d}G \tag{1}$$

które wyraża, że energia $i_r\mathrm{d}G$ odprowadzana z czynnikiem równa się ubytkowi energii wewnętrznej układu. Po różniczkowaniu iloczynu Gu_u otrzymuje się

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} = \frac{\mathrm{d}u_u}{i_r - u_u} \tag{1a}$$

Jeżeli w zbiorniku (układzie) zawarta jest para mokra, to i_r i u_u mogą dotyczyć różnych faz.

[1] str. 307
[2] str. 137

Jeżeli różniczkę zupełną $\mathrm{d}u_u$ energii wewnętrznej przedstawi się za pomocą pochodnych cząstkowych

$$\mathrm{d}u_u = \left(\frac{\partial u_u}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial u_u}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T$$

to równanie (1a) przybierze postać

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} = \frac{\left(\frac{\partial u_u}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial u_u}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T}{i_r - u_u} \tag{2}$$

W szczególnym wypadku, gdy układ wypełnia para mokra, energia wewnętrzna zależy tylko od ciśnienia (lub tylko od temperatury), przy znanym stopniu suchości x i wówczas równanie (2) upraszcza się do

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} = \frac{\frac{\mathrm{d}u_u}{\mathrm{d}p}}{i_r - u_u}\mathrm{d}p \tag{2a}$$

które można scałkować w granicach od p_1 do p_2 zmiennej niezależnej

$$\ln\frac{G_2}{G_1} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{\mathrm{d}u_u}{\mathrm{d}p}}{i_r - u_u}\mathrm{d}p \tag{3}$$

czyli

$$\frac{G_2}{G_1} = \exp\int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{\mathrm{d}u_u}{\mathrm{d}p}}{i_r - u_u}\mathrm{d}p \tag{3a}$$

a stąd stopień wyładowania

$$\frac{\Delta G}{G_1} = \frac{G_1 - G_2}{G_1} = 1 - \exp \int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{\mathrm{d}u_u}{\mathrm{d}p}}{i_r - u_u} \mathrm{d}p \tag{4}$$

Równanie (2) nie wystarcza do rozwiązania zagadnienia w ogólnym przypadku, gdy figurują w nim dwie zmienne niezależne p i T. Wprowadzenie termicznego równania stanu nie polepsza sytuacji, gdyż pojawia się wówczas objętość właściwa. Dlatego konieczne jest zastosowanie II zasady, która głosi, że przyrost entropii Π wszystkich ciał towarzyszących zjawisku rzeczywistemu musi być dodatni, $\Pi > 0$. Jedynie w przypadku odwracalnego przebiegu zjawiska wspomniany przyrost jest równy zeru, $\Pi = 0$.

Aby móc skorzystać z tego ostatniego prawa, zakłada się, że czynnik opuszczający układ dostaje się do zbiornika, w którym taki sam płyn zmienia swe ciśnienie i temperaturę tak jak w badanym układzie; wówczas w każdej chwili entropia właściwa płynu opuszczającego układ i w zbiorniku zewnętrznym jest taka sama. Uczynione założenie nie ma żadnego wpływu na jakość zjawiska w układzie. Jedynie czas wypływu czynnika przy skończonym spadku ciśnienia w układzie jest nieskończenie długi i kierunek przepływu w każdej chwili, bez jakiegokolwiek wkładu energii, może być odwrócony.

Dla przepływu odwracalnego w czasie $\mathrm{d}\tau$ można więc napisać [1] [3]

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{d}S_u + \mathrm{d}S_{zb} + \mathrm{d}S_{zr} = 0 \tag{5}$$

Przyrost entropii czynnika w układzie podczas wyładowania

$$\mathrm{d}S_u = -\mathrm{d}(Gs_u)\,, \tag{b}$$

przyrost entropii zbiornika zewnętrznego, który pochłonął masę $\mathrm{d}G$

$$\mathrm{d}S_{zb} = s_r \mathrm{d}G, \tag{c}$$

przyrost entropii źródeł ciepła

[3] str. 176

$$dS_{zr} = 0 \tag{d}$$

gdyż układ jest adiabatyczny.

Podstawiając 3 ostatnie równania do zależności (5) otrzymuje się

$$-d(Gs_u) + s_r dG = 0 \tag{6}$$

Po wykonaniu różniczkowania iloczynu równanie (6) zmieni się na

$$(s_r - s_u)dG - Gds_u = 0 \tag{6a}$$

Jeżeli czynnik jest jednofazowy lub jeżeli skład masy opuszczającej układ jest identyczny z chwilowym składem czynnika w układzie, to

$$s_r = s_u = s \tag{e}$$

$$i_r = i_u = i \tag{f}$$

$$u_r = u_u = u \tag{g}$$

W tym przypadku równanie (6a) przyjmuje postać

$$-Gds = 0 \tag{6b}$$

Ponieważ masa czynnika jest większa od zera, przeto

$$ds = 0 \tag{7}$$

czyli

$$s = \text{idem} \tag{7a}$$

Zatem czynnik w układzie rozpręża się izentropowo, tzn. parametry czynnika wewnątrz zbiornika zmieniają się tak jak podczas odwracalnej, zamkniętej ekspansji adiabatycznej.

Natomiast, jeżeli masa czynnika odpływająca co do fazy lub składu różni się od masy czynnika w zbiorniku, to

$$s_r \neq s_u$$

i równanie (6a) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} = \frac{\mathrm{d}s_u}{s_r - s_u} \tag{6b}$$

Postępując podobnie jak przy wyprowadzeniu równania (2), dostaje się stopień wyładowania

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp \int_{p_1}^{p_2} \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T}{s_r - s_u} \tag{8}$$

Równań (2) i (8) można używać oddzielnie, niezależnie od siebie, tylko w przypadku wypływu pary mokrej (o znanym x), gdyż wówczas wielkości właściwe (energia wewnętrzna, entalpia i entropia) są funkcjami tylko ciśnienia. Ponieważ wielkości właściwe dla innych czynników termodynamicznych są funkcjami ciśnienia i temperatury, przeto należy stosować równocześnie równania (2) i (8), aby wyrugować występującą w nich temperaturę.

Dodatkowe warunki, które muszą być spełnione przy wyładowaniu zbiornika z parą mokrą, są omówione w podrozdziale 2.2.2.

2. Przypadki szczególne

Poniżej będą omówione szczególne przypadki wyładowania zbiornika wypełnionego różnymi czynnikami termodynamicznymi.

2.1. Gazy

Wychodząc z równania (1a), po zastosowaniu oznaczeń (e), (f) i (g), otrzymuje się

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} = \frac{\mathrm{d}G}{APv} \tag{1b}$$

gdyż $i - u = APv$ [1] [4)]. Z równania (7) po uwzględnieniu [1] [5)] wynika

$$ds = \frac{du + APdv}{T} = 0$$

czyli

$$du = -APdv$$

Równanie (1b) przyjmuje więc postać

$$\frac{dG}{G} = -\frac{dv}{v} \tag{9}$$

Całkując powyższe równanie w granicach od p_1 do p_2, otrzymuje się

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{v_1}{v_{2s}} \tag{10}$$

gdzie v_{2s} oznacza objętość właściwą gazu przy końcu rozprężania izentropowego od p_1 do p_2. Stąd wynika

$$\frac{\Delta G}{G} = 1 - \frac{v_1}{v_{2s}} \tag{11}$$

2.1.1. Gaz doskonały

Po uwzględnieniu równania izentropy [1] [6)] dla gazu doskonałego

$$\frac{v_1}{v_{2s}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \tag{h}$$

---

4) str. 40
5) str. 174
6) str. 196

równanie (11) zmienia się na

$$\frac{\Delta G}{G} = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \tag{11a}$$

2.1.2. Gaz półdoskonały

Przyjmując liniową zależność ciepła właściwego od temperatury

$$c_v = c_{vo} + aT$$

$$c_p = c_{po} + aT$$

otrzymuje się równanie [1] [7)]

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}P}{P} + \frac{a}{c_{vo}R}\mathrm{d}(Pv) = 0 \tag{12}$$

z którego można wyznaczyć końcową objętość właściwą v_{2s}, znając ciśnienia p_1 i p_2 oraz początkową objętość właściwą v_1.

2.1.3. Gaz rzeczywisty (para przegrzana)

Występującą w równaniu (11) objętość właściwą v_{2s} przy końcu rozprężania izentropowego od p_1 do p_2 można wyznaczyć graficznie za pomocą wykresów entropowych (np. i-s).

2.2. Para mokra

2.2.1. Wypływ pary nasyconej suchej

Zakłada się, że zbiornik napełniony jest prawie zupełnie cieczą w stanie nasycenia z niewielką ilością pary nasyconej suchej nad zwierciadłem cieczy. Jeżeli ciśnienie w zbiorniku jest znacznie niższe od ciśnienia krytycznego, to wskutek znacznej różnicy objętości właści-

---

[7)] Równ. [X,18a]

wych cieczy i pary nasyconej suchej, stopień suchości pary mokrej jest bardzo bliski zeru i niewiele zmienia się podczas wyładowania. Z niewielkim błędem można przyjąć, że $x_1 = x_2 = 0$, zatem

$$u_u = u' \tag{i}$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem, wypuszcza się parę nasyconą suchą, więc

$$i_r = i'' \tag{j}$$

Parametry kaloryczne cieczy i pary nasyconej suchej są funkcjami tylko ciśnienia, dlatego można stosować równanie (4), po uwzględnieniu równań (i) i (j)

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp\int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}}{i'' - u'}\mathrm{d}p \tag{13}$$

Przy niewielkich ciśnieniach w zbiorniku można przyjąć $u' \approx i'$ i ponieważ $i'' - i' = r$, przeto równanie (13) przybiera postać

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp\int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}}{r}\mathrm{d}p \tag{13a}$$

W literaturze można znaleźć wykresy oparte na równaniu (13), podające zależność stosunku $\Delta G/G_1$ w funkcji ciśnienia początkowego p_1 i końcowego p_2 [2] [8].

2.2.2. Wypływ cieczy

Jeżeli przyjmie się założenie $x_1 = x_2 = 0$ uczynione w punkcie poprzednim, to wobec tego, że

$$i_r = i' \tag{k}$$

[8] rys. 669

i że $i' - u' = APv'$, równanie (4) daje zależność

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp \int_{p_1}^{p_2} \frac{\frac{du'}{dp}}{APv'} dp \tag{14}$$

Założenie $x = 0$ w zbiorniku podczas wypływu cieczy jest słuszne tylko przy niewielkim spadku ciśnienia. W związku z tym równanie (14) na ogół daje wyniki obarczone dużym błędem.

W rozważanym przypadku należy przy obliczeniu energii wewnętrznej U_u układu uwzględnić energię wewnętrzną nie tylko cieczy, lecz także pary nasyconej suchej. Oznaczając przez G' masę cieczy otrzymuje się

$$U_u = G'u' + (G - G')u''$$

czyli

$$U_u = Gu'' + G'(u'' - u') \tag{15}$$

W celu wyrugowania dodatkowej zmiennej G' (będącej, podobnie jak G, funkcją ciśnienia) należy posłużyć się związkiem

$$G'v' + (G - G')v'' = V = \text{idem}$$

czyli

$$G' = \frac{Gv'' - V}{v'' - v'} \tag{16}$$

gdzie V oznacza objętość wyładowywanego zbiornika.

Wstawiając równania (16) do równania (15) otrzymuje się

$$U_u = G\frac{u'v'' - u''v'}{v'' - v'} + V\frac{u'' - u'}{v'' - v'} \tag{15a}$$

Jeżeli zastosuje się oznaczenia

$$X(p)=\frac{u'v''-u''v'}{v''-v'}$$

$$Y(p)=\frac{u''-u'}{v''-v'} \tag{l}$$

to

$$U_u = GX + VY \tag{15b}$$

różniczka zaś energii wewnętrznej wynosi

$$\mathrm{d}U_u = X\mathrm{d}G + G\mathrm{d}X + V\mathrm{d}Y \tag{17}$$

W przypadku wypływu cieczy równanie I zasady termodynamiki ma postać

$$\mathrm{d}U_u = i'\mathrm{d}G \tag{1c}$$

i równanie (17) zmienia się na

$$(i'-X)\mathrm{d}G = G\mathrm{d}X + V\mathrm{d}Y \tag{18}$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - G\frac{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}p}}{i'-X} = V\frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p}}{i'-X} \tag{18a}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$F(p) = -\frac{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}p}}{i'-X}$$

$$\Phi(p) = V\frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p}}{i'-X} \tag{m}$$

równanie (18a) przyjmuje postać równania różniczkowego znanego typu

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{dp}} + GF(p) = \Phi(p) \tag{18b}$$

Rozwiązanie tego równania, po uwzględnieniu warunków brzegowych:
$G = G_1$ dla $p = p_1$ i $G = G_2$ dla $p = p_2$, jest następujące [3] [9]

$$G_2 = \Psi(p_2)\left[G_1 + \int_{p_1}^{p_2} \Phi(p)\Psi(p)\mathrm{d}p\right] \tag{19}$$

gdzie

$$\Psi(p) = \exp\int_{p_1}^{p} F(p)\mathrm{d}p \tag{n}$$

Po wprowadzeniu równań (l) i (m) do równania (19) otrzymuje się

$$G_2 = \Psi(p_1)\left[G_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{V}{i' - \dfrac{u'v'' - u''v'}{v'' - v'}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{u'' - u'}{v'' - v'}\right)\Psi(p)\mathrm{d}p\right] \tag{19a}$$

Równanie to, po uwzględnieniu zależności

$$V = G_1 v_1 \tag{p}$$

gdzie v_1 oznacza znaną początkową objętość właściwą pary mokrej w zbiorniku, zmienia się na

$$\frac{G_2}{G_1} = \Psi(p_1)\left[1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{v_1}{i' - \dfrac{u'v'' - u''v'}{v'' - v'}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{u'' - u'}{v'' - v'}\right)\Psi(p)\mathrm{d}p\right] \tag{20}$$

[9] str. 49

$$\left.\begin{aligned} F(p) &= -\frac{\frac{dX}{dp}}{i'-X} \\ \Phi(p) &= V \, \cancel{} = V\,\frac{\frac{dY}{dp}}{i'-X} \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

równanie (18a) przyjmuje postać równania różniczkowego znanego typu

$$\frac{dG}{dp} + G\,F(p) = \Phi(p) \qquad (18b)$$

Rozwiązanie tego równania, po uwzględnieniu warunków brzegowych (dla $p = p_1$ $G = G_1$) i (dla $p = p_2$ $G = G_2$) jest następujące [3] 9)

$$G_2 = \psi(p_2)\left[G_1 + \int_{p_1}^{p_2} \Phi(p)\,\psi(p)\,dp\right] \qquad (19)$$

gdzie

$$\psi(p) = \exp \int_{p_1}^{p} F(p)\,dp \qquad (m)$$

Po wprowadzeniu równań (k) i (l) do równania (19) otrzymuje się

$$G_2 = \psi(p_2)\left[G_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{V}{i' - \frac{u'v''-u''v'}{v''-v'}}\,\frac{d}{dp}\left(\frac{u''-u'}{v''-v'}\right)\psi(p)\,dp\right] \qquad (19a)$$

Równanie to po uwzględnieniu zależności

$$V = G_1\,v_1 \qquad (n)$$

gdzie v_1 oznacza znaną początkową objętość właściwą pary mokrej w zbiorniku zmienia się na

$$\frac{G_2}{G_1} = \psi(p_2)\left[1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{v_1}{i' - \frac{u'v''-u''v'}{v''-v'}}\,\frac{d}{dp}\left(\frac{u''-u'}{v''-v'}\right)\psi(p)\,dp\right] \qquad (20)$$

~~Podobnie można wyprowadzić dokładny wzór na wykondensowaną masę pary nasyconej suchej. Różni się on od równania (20) tylko tym, że w miejscu i' figuruje i" dlatego, że w równaniu (10) I zasady termodynamiki zamiast i' ma być i".~~

9) str. 49.

Rys.1. Strona oryginalna tekstu z odręcznie napisanymi przez Profesora Ochęduszkę wzorami i poprawkami

Wzór (20) jest ważny dopóty, dopóki w zbiorniku jest jeszcze ciecz wrząca. Od pewnej granicznej wartości ciśnienia p_{2g}, przy którym w zbiorniku znajduje się już tylko para nasycona sucha, zjawisko wypływu gwałtownie zmienia swój charakter. Od tego ciśnienia począwszy, do ciśnienia końcowego $p_2 < p_{2g}$ stopień wyładowania określa równanie (11b). W związku z tym linia obrazująca zależność stopnia wyładowania $\Delta G/G_1$ od ciśnienia p_2 będzie miała w punkcie określonym przez $p_2 = p_{2g}$ załamanie.

Wartość granicznego ciśnienia p_{2g} można znaleźć wykreślnie. W tym celu należy nakreślić wykres zależności objętości właściwej

$$v_2 = \frac{V}{G_2} = \frac{G_1 v_1}{G_2} = \frac{v_1'}{\frac{G_2}{G_1}} = \frac{v_1'}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}}$$

pary mokrej znajdującej się w zbiorniku od jej ciśnienia p_2 oraz linię obrazującą zależność objętości właściwej v_2'' pary nasyconej suchej od ciśnienia p_{2g}.

Podobnie można wyprowadzić dokładny wzór na wyładowaną masę pary nasyconej suchej. Różni się on od równania (20) tylko tym, że w miejscu i' figuruje i'' dlatego, że w równaniu (1c) I zasady termodynamiki zamiast i' ma być i''. Ponieważ jednak założenie $x_2 = x_1 = 0$ przy niezbyt dużym spadku ciśnienia wewnątrz układu nie odbiega wiele od rzeczywistości, prościej jest użyć wzoru (13).

2.2.3. ***Wypływ pary mokrej***

Układ napełniony jest parą nasyconą suchą o początkowym stopniu suchości x_1 i ciśnieniu p_1, przy czym zakłada się, że stopień suchości jest taki sam w każdym punkcie zbiornika przez cały czas wyładowania. W związku z tym ważny jest wzór (11)

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \frac{v_{x1}}{v_{x2s}} \qquad (11b)$$

Stopień wyznaczania końcowej objętości właściwej v_{x2s} na wykresach entropowych jest taki sam jak dla pary przegrzanej. Można przy tym odczytać również końcowy stopień suchości pary x_{2s}.

Inne ścisłe rozwiązanie zagadnienia wyładowania adiabatycznego zbiornika napełnionego cieczą wrzącą podają *Seibert, Trumpfheller* i *Rögener* [5]. Zależność pomiędzy stosunkiem $G_2/G_1 = 1 - \Delta G/G_1$ i ciśnieniem w zbiorniku uzyskali oni pośrednio, poprzez określenie zależności tzw. *objętościowej wilgotności* $\varphi = v'/v$ pary w zbiorniku od jej ciśnienia p.

3. Przykłady liczbowe

W zbiorniku napełnionym płynem zachodzi spadek ciśnienia od p_1 = 20 ata do p_2 = 10 ata. Obliczyć stopień wyładowania $\Delta G/G_1$, w przypadku gdy płyn w zbiorniku stanowi:

1. gaz, a to
   a) powietrze, które należy traktować jak gaz doskonały ($\kappa = 1{,}4$),
   b) przegrzana para wodna o temperaturze początkowej $t_1 = 350^{\circ}C$,
2. para mokra
   a) głównie woda wrząca ($x_1 \approx 0$) i gdy wypływa para nasycona sucha,
   b) głównie ciecz wrząca ($x_1 \approx 0$) i gdy wypływa ciecz,
   c) o stopniu suchości $x_1 = 0{,}95$, w której nie występuje rozdział faz.

Rozwiązanie jest następujące:

1a) We wzorze (11a) wstawia się podane wartości p_1 i p_2

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \left(\frac{10}{20}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 1 - \frac{1}{1{,}606} = 0{,}367$$

1b) Na wykresie (i,s) odczytuje się $v_1 = 0{,}142$, $v_{2s} = 0{,}244$ m^3/kg, $t_2 = 260^{\circ}C$. Wzór (11) daje $\Delta G/G_1 = 1 - 0{,}142/0{,}244 = 1 - 0{,}582 = 0{,}418$

2a) Oznaczając w równaniu (13)

$$\frac{\dfrac{du'}{dp}}{i'' - u'} = f(p)$$

otrzymuje się stopień wyładowania

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp \int_{p1}^{p2} f(p) dp \tag{13b}$$

Ponieważ zależność u' i i'' od ciśnienia p podana jest w tablicach parowych, więc i funkcję $f(p)$ można również stabelaryzować, jeżeli zestawi się w formie tabeli pochodną $\mathrm{d}u'/\mathrm{d}p$. W tym celu można wykorzystać jeden ze wzorów na pochodną funkcji stabelaryzowanej [4][10)]

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_n} = \frac{1}{12\Delta p}\left(3u_{n+1} + 10u_n - 18u_{n-1} + 6u_{n-2} - u_{n-3}\right)$$

lub

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_n} = \frac{1}{12\Delta p}\left[\left(u_{n-2} - u_{n+2}\right) - 8\left(u_{n-1} - u_{n+1}\right)\right]$$

lub też

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_n} = \frac{1}{12\Delta p}\left(u_{n+3} - 6u_{n+2} + 18u_{n+1} - 10u_n - 3u_{n-1}\right)$$

Przed użyciem któregokolwiek z powyższych wzorów należy dany przedział zmiennej niezależnej p podzielić na k równych części wynoszących Δp i poszczególne punkty podziału ponumerować $n = 1, 2, \ldots, k$.

Mając stabelaryzowaną funkcję $f(p)$ można całkę oznaczoną obliczyć jedną ze znanych metod numerycznych całkowania (np. .metodą Simpsona). Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymuje się $G_2/G_1 = 0{,}9293$ i $\Delta G/G_1 = 0{,}0807$, co odpowiada wartości odczytanej na wykresie [2].

2 b) W przypadku wypływu cieczy na wstępie należy użyć równania (14). Po wprowadzeniu funkcji

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}}{APv'} = \varphi(p)$$

oblicza się całkę

$$\frac{\Delta G}{G_1} = 1 - \exp\int_{p_1}^{p_2} \varphi(p)\mathrm{d}p$$

W wyniku szczegółowych obliczeń $\Delta G/G_1 = 1 - 2{,}44.10^{-40} \approx 1$.

---

10) równ. (9,13)

Jak wykazują obliczenia, już przy spadku ciśnienia z p_1 = 20 ata na p_2 = 19,5 ata, $G_2/G_1 = 0,00775$, $\Delta G/G_1 \approx 1$, a więc już przy minimalnym spadku ciśnienia następuje prawie całkowite opróżnienie zbiornika.

Wyniki obliczone odbiegają od rzeczywistych dlatego, że już przy niewielkim spadku ciśnienia nie jest zachowany warunek $x = 0 = \text{idem}$. W rzeczywistości stosunek G_2/G_1 będzie większy i dokładnie można by go wyznaczyć za pomocą wzoru (20).

2 c) Na wykresie i,s odczytuje się $v_{x1} = 0,095$ m^3/kg, $v_{x2s} = 0,178$ m^3/kg, $x_{2s} = 0,90$. Wstawiając powyższe do wzoru (11), otrzymuje się stopień wyładowania

$$\Delta G/G_1 = 1 - 0,095/0,178 = 0,468.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że przy wyładowaniu zbiornika, w którym nie ma osobnej przestrzeni parowej i ciekłej (przykłady 1a, 1c, 2c), stopień wyładowania jest tym większy, im mniejszą wartość ma wykładnik κ izentropy płynu.

Przykład 2a dotyczy cieplarki nieizobarycznej typu *Ruthsa* i wykazuje, że w przypadku wypływu pary nasyconej suchej stopień wyładowania przy takim samym spadku ciśnienia jest najmniejszy ($\Delta G/G_1 = 0,071$), co należy tłumaczyć tym, że ładunek zbiornika stanowi głównie ciecz, natomiast odpływa zeń znacznie lżejszy czynnik gazowy. Przeciwieństwem tego jest zjawisko wyładowania zbiornika zawierającego ciecz, wskutek wypływu cieczy (przykład 2b). Stopień wyładowania jest bardzo duży.

Należy jeszcze raz stwierdzić, że uzyskane w przykładach 2a i 2b wyniki liczbowe byłyby słuszne tylko wówczas, gdyby m.in. przestrzeń nad meniskiem cieczy wrzącej natychmiast była uzupełniana parą nasyconą suchą, będącą w równowadze z wrzącą fazą ciekłą.

WYKAZ OZNACZEŃ I INDEKSÓW

$A = \frac{1}{427}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kpm}}$	- cieplny równoważnik pracy,
G	kg	- masa w zbiorniku,
P	$\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$	- ciśnienie bezwzględne w zbiorniku,

R	$\frac{\text{kpm}}{\text{kg grd}}$	- indywidualna stała gazowa,
T	$^{\circ}$K	- temperatura bezwzględna,
U	kcal	- energia wewnętrzna,
V	m^3	- objętość zbiornika,
c_p, c_v	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg grd}}$	- ciepło właściwe,
i	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	- entalpia właściwa,
p	$\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$, ata	- ciśnienie bezwzględne,
r	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	- utajone ciepło parowania,
s	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg grd}}$	- entropia właściwa,
t	$^{\circ}$C	- temperatura,
u	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	- właściwa energia wewnętrzna,
v	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	- objętość właściwa,
x	-	- stopień suchości pary,
κ	-	- wykładnik izentropy,
τ	sec	- czas,
φ	-	- wilgotność objętościowa pary nasyconej,

Indeksy:

g	- parametry punktu granicznego przy wyładowaniu cieczy wrzącej,
r	- parametry w rurociągu, przez który odbywa się wyładowanie czynnika,
s	- parametry punktu końcowego ekspansji izentropowej,
u	- parametry czynnika znajdującego się w zbiorniku,
1	- parametry czynnika na początku wyładowania,
2	- parametry przy końcu wyładowania,
$)'$	- parametry dotyczące cieczy o temperaturze nasycenia,
$)''$	- parametry dotyczące pary nasyconej suchej.

LITERATURA

1. Ochęduszko S.: Teoria maszyn cieplnych, cz. I, wyd. 2, PWT 1957.
2. Ochęduszko S.: Teoria maszyn cieplnych, cz. III, PWT 1955.
3. Kamke E.: Differentialgleichungen. Loesungsmethoden und Loesungen, 1944, przekład rosyjski: Sprawocznik po obyknowiennym differencialnym urawnienijam. I.I.L Moskwa 1951.
4. Margenau H., Murphy G.M.: The Mathematics of Physics end Chemistry. New York 1950, przekład polski: Matematyka w fizyce i chemii. PWN 1956.
5. Seibert O., Trumpfheller R., Roegener H.: Zur Theorie der Entladung von Druckefaessen. B.W.K., 1955, s.268

Abstract

From adiabatic vessel initially containing mass G_1 the part $\Delta G = G_1 - G_2$ has flowed out. The pressure dropped from p_1 to p_2. The Eq.(4) repesents the energy balance and the second law of thermodynamics results in Eq.(8). Detailed equations were deduced: for ideal gas (Eq.(11a)), saturated vapour when the vapour phase (Eq.(13a)) or when the liquid phase (Eq(20)) flow out.