

Edward KOSTOWSKI

Institut Techniki Ciepłej Politechniki Śląskiej

## MODEL GAZU SZAREGO I MODEL PASMOWY PROMIENIOWANIA GAZU

**Streszczenie.** W obliczeniach technicznych promieniowania gazów powszechnie jest jeszcze używany model gazu szarego, z jego odmianą zwaną gazem nieszarym. Od pewnego czasu stosowany jest także model pasmowy promieniowania gazów. Związki pomiędzy tymi modelami oraz pewne procedury ułatwiające ich stosowanie przedstawiono w niniejszym artykule.

## THE GRAY GAS - AND THE BAND MODEL OF RADIATING GAS

**Summary.** In technical calculations of gas radiation, the gray gas model is still used, with its variation called a gray-non-gray gas. In the recent time, the band model of gas radiation is applied as well. The relationships between these models and some procedures easing their application have been presented in this paper.

### 1. Wstęp; model gazu szarego

Gazy ze swej natury fizycznej mają ograniczoną zdolność emisji i absorpcji energii przez promieniowanie. Praktycznie biorąc, promieniają tylko niektóre gazy, a na dodatek jest to promieniowanie selektywne, to znaczy zachodzi ono tylko w pewnych wybranych pasmach. Dla ułatwienia obliczeń wprowadzono [1, 2, 3] różne modele gazu promieniującego, z których najprostszym jest model *gazu szarego*. W modelu tym *emisyjność gazu*, zależna od jego gęstości optycznej i temperatury, jest uśredniana na całe widmo, nie jest więc zależna od długości fali, a na dodatek zakłada się, że *absorpcyjność gazu* jest równa jego emisyjności. Sama emisyjność gazu jest odczytywana z odpowiednich wykresów. Na przykład, dla  $\text{CO}_2$  i  $\text{H}_2\text{O}$  powszechnie znane są wykresy podane przez Hottela i Egberta, podobne wykresy dla innych

gazów można spotkać w literaturze [2, 3]. Wykresy te wykonano, przy założeniu że ciśnienie roztworu gazów, w skład którego wchodzi  $\text{CO}_2$  lub  $\text{H}_2\text{O}$ , wynosi 101,3 kPa (1 atm) oraz dodatkowo, że ciśnienie składowe pary wodnej jest bliskie zeru. Jeżeli zachodzą odstępstwa od tych warunków, to odczytane z wykresów wartości emisyjności  $\varepsilon_{gi}$  należy pomnożyć przez odpowiednie poprawki  $C_i$ , które również można znaleźć na stosownych wykresach. Tak więc rzeczywista emisyjność gazu wynosi:

$$\varepsilon_{gi}(T_g, p_i L) = \varepsilon_{gi}'(T_g, p_i L) \cdot C_i(p_i L, p), \quad (1)$$

zaś absorpcyjność gazu *szarego* jest z założenia równa jego emisyjności:

$$A_g(T_g, p_i L) = \varepsilon_g(T_g, p_i L). \quad (1a)$$

W przypadku gazu *szarego-nieszarego* (krótko — *nieszarego*) uwzględnia się fakt, że jego absorpcyjność zależy dodatkowo od temperatury  $T_w$  pochłanianego promieniowania (czyli temperatury jego źródła). Wówczas zasadniczo

$$A_{gn} = A_g(T_g, T_w, p_i L) \neq \varepsilon_g(T_g, p_i L). \quad (a)$$

Zgodnie z prawem Kirchhoffa z emisji ciała o temperaturze  $T_w$  gaz pochłania tyle, ile by sam wyemitował mając tę temperaturę. Należy więc uwzględnić dwa ważne czynniki:

- zmianę ciśnienia składowego gazu przy zmianie temperatury,
- przesunięcie widma promieniowania gazu i ciała o temperaturze  $T_w \neq T_g$ .

Pierwszy z nich uwzględnia się, traktując przemianę gazu jako *izochoryczną*, czyli przyjmując skorygowaną wartość *gęstości optycznej*:

$$(p_i L)' = p_i L \cdot (T_w/T_g). \quad (b)$$

Drugi czynnik uwzględnia pasmową strukturę promieniowania, gdyż zależnie od temperatury emisja gazu w tych samych pasmach stanowi inny ułamek gęstości emisji  $\varepsilon_{gi}$ . Wpływ przesunięcia widma promieniowania Hottel [1, 2] ujął mnożnikiem:

$$(T_g/T_w)^n, \quad (c)$$

gdzie dla  $\text{CO}_2$  jest:  $n = 0,65$ , dla  $\text{H}_2\text{O}$  —  $n = 0,45$ , zaś dla  $\text{SO}_2$  —  $n = 0,5$ .

Tak więc dla gazu nieszarego przyjmuje się:

$$A_g(T_g, T_w, p_i L) = \epsilon_g \left( T_w, p_i L \frac{T_w}{T_g} \left( \frac{T_g}{T_w} \right)^n \right). \quad (2)$$

W przypadku małych różnic temperatur (tj. dla stosunku  $T_g/T_w$  zawartego w przedziale  $0,9 \div 1,1$ ) chętnie przyjmuje się model gazu szarego, dla którego  $\epsilon_{gi} = A_{gi}$ , gdyż upraszcza to obliczenia. Zobaczmy jednak dalej, że te dwie odmiany dla  $T_w = T_g$  dają różne wyniki (i nie przechodzą jedna w drugą), stanowią więc dwa różne modele promieniującego gazu.

Typowym roztworem gazów promieniujących (i przezroczystych) są np. spaliny, w których promieniają  $\text{CO}_2$  i  $\text{H}_2\text{O}$ . Zwykle przyjmuje się, że ciśnienie spalin jest zbliżone do atmosferycznego; wówczas dla  $\text{CO}_2$  poprawka wynosi 1, a dla  $\text{H}_2\text{O}$  jest ona oznaczana przez  $\beta$  [6]. Emisyjność spalin wyznacza się za pomocą wzoru:

$$\epsilon_g \equiv \epsilon_{\text{CO}_2} + \beta \epsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \epsilon_{\text{CO}_2} \beta \epsilon_{\text{H}_2\text{O}}, \quad (3)$$

gdzie poprawka  $\beta$  uwzględnia wpływ ciśnienia (spalin i cząstkowego pary) na odczytaną z wykresu emisyjność pary wodnej. Absorpcyjność spalin wyznacza się analogicznie jak ich emisyjność, podstawiając  $A_{gi}$  w miejsce  $\epsilon_{gi}$  (z tym że absorpcyjności składników wyznacza się za pomocą wzoru (2)). Taka procedura jest potrzebna tylko dla modelu gazu nieszarego, gdyż dla gazu szarego zgodnie z (1a) przyjmuje się wprost ich równość.

Dla spalin i dla określonego urządzenia (pieca, kotła, komory spalania itp.) zastępcza grubość warstwy  $L_m$  jest określona. Zwykle także skład spalin oraz ich ciśnienie nie zmieniają się, można więc przyjąć, że emisyjność jest funkcją tylko ich temperatury. Okazuje się, że jest to zależność prawie liniowa [5], taka też może być zastosowana aproksymacja:

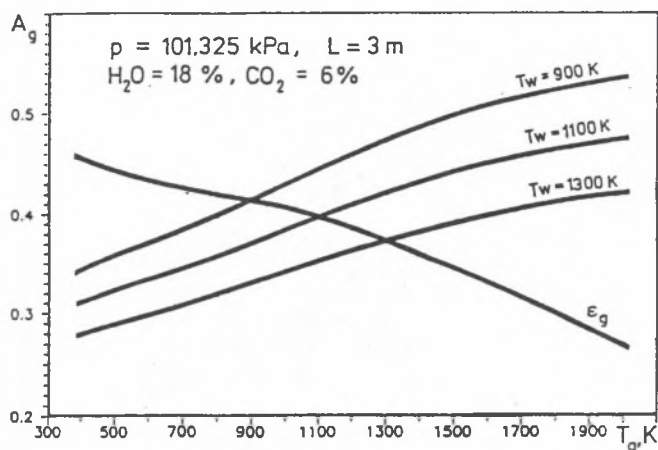
$$\epsilon_g = a + b t_g. \quad (4)$$

Absorpcyjność spalin zależy dodatkowo od temperatury  $T_w$  ścian (źródła promieniowania), dla  $T_w > T_g$  jest ona mniejsza, natomiast dla  $T_w < T_g$  jest ona większa od  $\epsilon_g$  (rys.1).

Wzajemną współzależność emisyjności i absorpcyjności spalin, traktowanych jako gaz nieszary, można ująć [5] równaniem:

$$A_g = \epsilon_g + k(T_g - T_w), \quad (5)$$

w którym współczynnik  $k$  dla każdego rozważanego przypadku należy wyznaczyć. Ten wzór okaże się przydatny w dalszej analizie.



Rys.1. Absorpcyjność i emisyjność gazu nieszarego (przykład)  
 Fig.1. The absorptivity and emissivity of a nongray gas (example)

## 2. Wzory przybliżone i aproksymacje

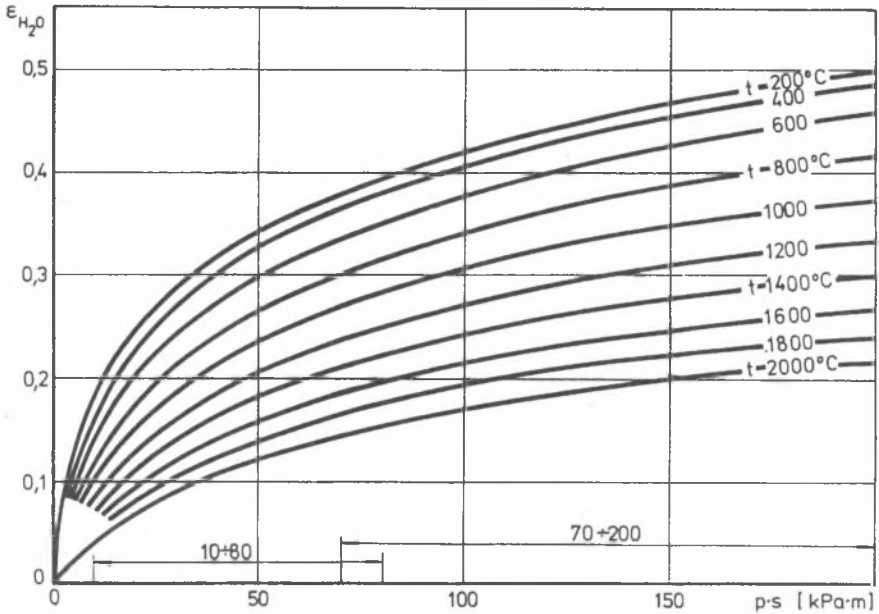
Do określenia emisyjności poszczególnych gazów promieniujących wykorzystuje się przeważnie wykresy Hottela, co jest niewygodne i mało dokładne. Znacznie dogodniejsze są wzory analityczne służące do tego celu. Zależność emisyjności gazu (składnika promieniującego) od temperatury i jego gęstości optycznej w normalnym układzie współrzędnych pokazano na rysunku 2; widać wyraźnie, że jest to zależność typu wykładniczego. Taką funkcję można przybliżyć w różny sposób; o wyborze decyduje dokładność oraz prostota użytych algorytmów. Raczej małym powodzeniem cieszy się tzw. model zastępczego gazu realnego [1, 2], w którym emisyjność gazu jest wyrażona następująco:

$$\epsilon_g = \sum_{i=1}^n a_i [1 - \exp(-k_i p_i L)], \quad (6)$$

gdzie:  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  oraz

$$a_0 + \sum_i a_i = 1. \quad (6a)$$

W równaniu tym wyraz  $a_0$  oznacza transmisyjność nieskończenie grubej warstwy gazu, natomiast podana suma  $a_i$  jest emisyjnością takiej warstwy. Przy aproksymacji obliczonej emisyjności określonego gazu zwykle uwzględnia się trzy do czterech składników sumy (6).



Rys.2. Emisyjność pary wodnej  
Fig.2. The emissivity of the water vapor

W literaturze znane są także inne funkcje analityczne służące do określania emisyjności spalin lub gęstości emisji [7, 8]. Na przykład, podane jeszcze przez A. Schacka [8] wzory na gęstość emisji  $\text{CO}_2$  i  $\text{H}_2\text{O}$ , po konwersji do układu jednostek *SI*, mają postać:

$$\dot{e}_{\text{CO}_2} = 0,873 (p_{\text{CO}_2} L / \text{kPa} \cdot \text{m})^{1/3} (T/100\text{K})^{3,5} \quad \text{W/m}^2, \quad (7a)$$

$$\dot{e}_{\text{H}_2\text{O}} = 1,012 (p_{\text{H}_2\text{O}} L / \text{kPa} \cdot \text{m})^{0,6} (p_{\text{H}_2\text{O}} / \text{kPa})^{0,2} (T/100\text{K})^3 \quad \text{W/m}^2. \quad (7b)$$

Obowiązują one w zakresie:

$$t = 0 + 2000 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad p_{\text{CO}_2} L = 0 + 40, \quad p_{\text{H}_2\text{O}} L = 0 + 70 \text{ kPa} \cdot \text{m};$$

po przekształceniu można z nich wyliczyć emisyjności gazów [3, 4].

Autor [9] przybliżył wykresy emisyjności dla  $\text{CO}_2$  i  $\text{H}_2\text{O}$  zależnością:

$$\epsilon_{gi} = 1 - \exp \left[ -k_i(t_g) \cdot (p_i \text{ L/kPa} \cdot \text{m})^n \right], \quad (8a)$$

gdzie

$$k_i(t_g) = a + b(t_g/1000 \text{ K}); \quad (8b)$$

do wzoru (8b) temperaturę należy podstawiać w  $^{\circ}\text{C}$ . Współczynniki tego wzoru dla najczęściej spotykanego zakresu temperatury przypomniano w tablicy 1, pełny ich zestaw można znaleźć w literaturze [3, 20].

Tablica 1

Współczynniki funkcji aproksymacyjnej (8) dla  $t = 800 \div 1400 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Zakres ( $p_i L$ ) kPa·m	$n$ –	Współczynniki wzoru (8b)	
		$a$	$b$
<i>a) dwutlenek węgla – <math>\text{CO}_2</math></i>			
70 ÷ 200	0,310	0,07350	– 0,02081
10 ÷ 80	0,314	0,07791	– 0,02573
4 ÷ 10	0,374	0,07613	– 0,03038
0,93 ÷ 5	0,391	0,07814	– 0,03321
0,1 ÷ 1	0,614	0,08697	– 0,04108
<i>b) para wodna – <math>\text{H}_2\text{O}</math></i>			
70 ÷ 200	0,395	0,09700	– 0,03809
10 ÷ 80	0,530	0,05729	– 0,02375
4 ÷ 10	0,692	0,04210	– 0,01979
0,93 ÷ 5	0,814	0,03892	– 0,02027
0,1 ÷ 1	0,945	0,04433	– 0,02552

Występujący we wzorze (3) czynnik  $\beta$  można obliczyć za pomocą zależności:

$$\beta = 1 + \left[ 0,6225 - 0,1346 \lg \left( \frac{p_{\text{H}_2\text{O}} L}{\text{kPa} \cdot \text{m}} \right) \right] \left( \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{100 \text{ kPa}} \right)^{0,86}, \quad (9)$$

przy czym dla  $p_{\text{H}_2\text{O}} L \leq 1 \text{ kPa} \cdot \text{m}$  należy przyjąć  $p_{\text{H}_2\text{O}} L = 1 \text{ kPa} \cdot \text{m}$ , co daje:

$$\beta = 1 + 0,6225 \left( \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{100 \text{ kPa}} \right)^{0,86}. \quad (9a)$$

Wzór (9) obowiązuje w zakresie:

$$p_{\text{H}_2\text{O}} L = 0 + 300 \text{ kPa} \cdot \text{m}, \quad p_{\text{H}_2\text{O}} = 0 + 40 (50) \text{ kPa}.$$

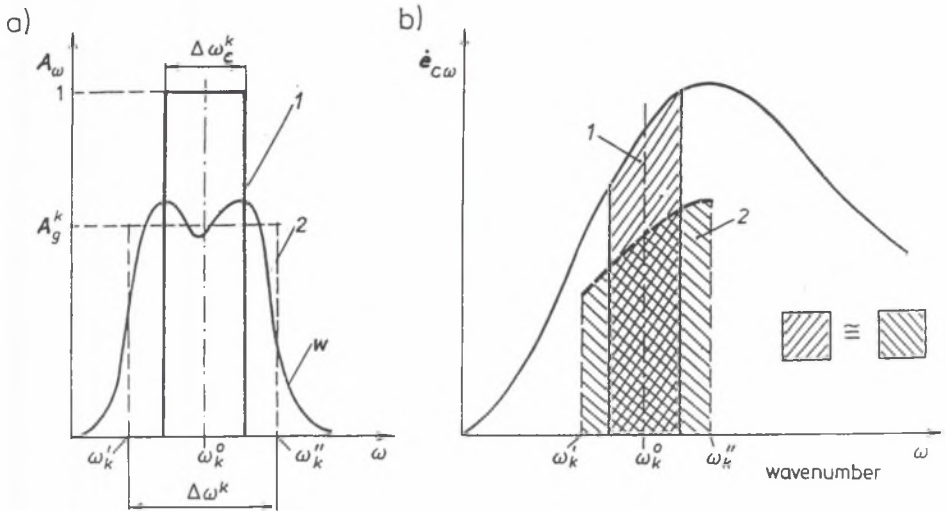
Spotyka się również inne wersje wzorów analitycznych [3, 4].

### 3. Model pasmowy promieniowania gazów

Wspomniany wcześniej selektywny charakter promieniowania gazów ma swoje podstawy fizyczne. Obserwuje się *pasma emisji* i *absorpcji*, pomiędzy którymi znajdują się pasma dla promieniowania prawie całkowicie przezroczyste, zwane *oknami*. Wewnątrz pasm emisji występują dość regularne węższe pasma – prążki promieniowania. Położenie i szerokość głównych pasm emisji są zdeterminowane przez energię oscylacji atomów w cząsteczce gazu, natomiast o intensywności prążków decydują zwykle energie rotacji całej cząsteczki. Wymienione rodzaje energii są skwantowane, tzn. ich wartości i zmiany mogą przyjmować tylko określone wielkości, przy czym energie oscylacji są w przybliżeniu o rząd wielkości większe od energii rotacji. Z tego właśnie powodu oscylacje decydują o położeniu pasm, natomiast rotacje w dużym stopniu określają ich zasięg i „rozmycie”. W zakresie średniej i dalekiej podczerwieni (większe  $\lambda$ , mniejsza energia fotonu) mogą się pojawiać prążki rotacyjne tworzące całe pasmo (tak jest np. dla  $\text{H}_2\text{O}$ ). Ponieważ skwantowane energie są proporcjonalne do częstotliwości  $\nu$ , w rozważaniach dogodnie jest używać liczby falowej  $\omega$  ( $\nu = c/\lambda = c\omega$ ), gdyż wówczas wielokrotnościom  $h\nu$  odpowiadają stałe zmiany  $\omega$ . Liczbę falową wyraża się przeważnie w  $\text{cm}^{-1}$ ; jest to liczba fal mieszczących się na odcinku o długości 1 cm.

#### 3.1. Model pasm szerokich Edwardsa – Balakrishnana

W zagadnieniach technicznych ważną rolę odgrywa tzw. *model pasm szerokich*. Rzeczywiste pasma promieniowania gazu z nieostryimi granicami są zastępowane przez pasma czarne lub szare (rys. 3). Każde pasmo  $k$  jest ściśle zlokalizowane i scharakteryzowane przez długość fali jego środka, podawaną w  $\mu\text{m}$  (np. pasmo 2,7  $\mu\text{m}$  dla  $\text{CO}_2$ ), której odpowiada liczba falowa  $\omega_k^0$  (tabl. 2). Jeżeli znana jest szerokość pasma: szarego –  $\Delta\omega^k$  lub czarnego –  $\Delta\omega_c^k$ , to można określić jego granice:



Rys. 3. Zamiana pasma rzeczywistego w na równoważne pasmo czarne 1 lub szare 2  
 Fig.3. The change the real band w by equivalent black band 1 or gray band 2

$$\omega_k^{ii} = \omega_k^0 + \Delta\omega^k/2, \quad \omega_k^i = \omega_k^0 - \Delta\omega^k/2, \quad \Delta\omega^k = \omega_k^{ii} - \omega_k^i, \quad (10)$$

podobnie, podstawiając  $\Delta\omega_c^k$ , wyznacza się granice pasma czarnego.

Problem wyznaczania szerokości poszczególnych pasm i ich położenia rozwiązali z powodzeniem dopiero Edwards i Balakrishnan [10]. Zostały przyjęte odpowiednie *stałe, współczynniki* oraz *funkcje*, za pomocą których można wyznaczyć granice *pasem czarnych*. Szerokość pasma zależy od wielu parametrów, głównie od ciśnienia (całkowitego i cząstkowego) gazu promieniującego, grubości warstwy oraz od temperatury. Niektóre z wymienionych wcześniej wielkości są dla danego pasma zależne tylko od temperatury, można je więc wyznaczyć i przedstawić na wykresach lub zastąpić odpowiednimi aproksymacjami.

Wielkościami charakterystycznymi, od których zależy szerokość danego pasma, są:

$\alpha(T)$  – *masowy współczynnik absorpcji*,

$\beta(T)$  – *bezwymiarowy parametr szerokości pasma (linii)*,

$\delta\omega(T)$  – *standardowa szerokość pasma*,

$P_e$  – *bezwymiarowe ciśnienie efektywne*,

$X_1$  – *masowa gęstość optyczna*.



Bezwymiarowe ciśnienie efektywne jest określane wzorem:

$$P_e = \left[ p/p_0 + (p_i/p_0)(b-1) \right]^n, \quad (\text{gdzie } p_0 = 101,325 \text{ kPa}), \quad (11)$$

a masowa gęstość optyczna promieniującego gazu wynosi

$$X_i = \rho_i L. \quad (12)$$

Złożony sposób wyznaczania wielkości  $\alpha(T)$  i  $\beta(T)$  oraz potrzebne dane można znaleźć w cytowanej wyżej publikacji lub w [3]. Następnie określa się dwa bezwymiarowe czynniki:

$$\eta = P_e \cdot \beta(T) \quad - \text{parametr wzmocnienia pasma}, \quad (13)$$

$$\tau_H = \alpha(T) \cdot X_i / \delta\omega(T) \quad - \text{parametr grubości optycznej}. \quad (14)$$

Przyjmuje się, że szerokość standardowa pasma zmienia się z temperaturą:

$$\delta\omega(T) = \delta\omega_0 \sqrt{T/100}. \quad (15)$$

Wartości czynników  $b$  i  $n$ , ponadto  $\delta\omega_0$  dla  $T = 100 \text{ K}$  oraz  $\omega_0^k$  dla poszczególnych pasm podano w tabelicy 2. Do  $X_i$  podstawia się równanie Clapeyrona

$$\rho_i = p_i / (R_i T), \quad (16)$$

gdzie  $R_i$  jest indywidualną stałą gazową, dzięki czemu parametr grubości optycznej można wyrazić następująco:

$$\tau_H = \frac{\alpha(T) p_i L}{R_i T \delta\omega_0 \sqrt{T/100}}. \quad (17)$$

Dla określonej gęstości optycznej:  $p_i L = p_1 L_1 = 101,325 \text{ kPa} \cdot \text{m}$  ( $= 1 \text{ atm} \cdot \text{m}$ ) można  $\tau_H$  obliczyć i oznaczyć przez  $\tau_{H1}(T)$ :

$$\tau_{H1}(T) = \frac{p_1 L_1}{R_i \delta\omega_0} \cdot \frac{\alpha(T)}{T \sqrt{T/100}}. \quad (18)$$

Dla innej niż  $p_1 L_1$  gęstości optycznej stosuje się przeliczenie:

$$\tau_H = \tau_{H1}(T) \cdot (p_i L_i) / (101,325 \text{ kPa} \cdot \text{m}), \quad (19)$$

gdzie ciśnienie składnikowe  $p_i$  jest wyrażane w kPa oraz grubość  $L$  w metrach.

Dla tak obliczonych  $\eta$  oraz  $\tau_H$  zgodnie z algorytmem podanym w tablicy 3 oblicza się parametr absorpcyjności  $A^*$ . Szerokość  $k$  – tego pasma czarnego wynosi:

$$\Delta\omega_c^k(T) = A^* \cdot \delta\omega(T), \quad (20)$$

gdzie  $\delta\omega(T)$  jest określone wzorem (15). Znając liczbę falową  $\omega_k^0$  określającą położenie środka pasma można ze wzorów (10) wyznaczyć granice pasma czarnego. W dwóch szczególnych przypadkach (widocznych w tablicy 2) wyznacza się tylko jedną granicę, gdyż druga granica ( $\omega_k'$  lub  $\omega_k''$ ) jest dana.

Pasmo może też być traktowane jako szare. Dla takiego pasma wyznacza się transmisyjność gazu  $\overline{D}_g^k$  (kreska nad  $D$  oznacza wielkość pasmową) ze wzoru:

$$\overline{D}_g^k = \frac{\tau_H \partial A^*}{A^* \partial \tau_H} (\leq 0,9) \quad (21)$$

podanego przez Edwardsa później [11]; zaleca on też przyjmować  $\overline{D}^k = 0,9$ , jeżeli z rachunku wyjdzie wartość większa (dotyczy to np. zakresów liniowych, dla których ze wzoru (21) wynika  $\overline{D}^k = 1$ ).

Tablica 2

Parametry do wyznaczania pasm emisji gazów

gaz/pasmo	$b$	$n$	$\delta\omega_0 \text{ cm}^{-1}$	$\omega_0 \text{ cm}^{-1}$
H <sub>2</sub> O – rot. (71,4) <sup>1</sup> 6,3 $\mu\text{m}$ . 2,7 1,87 1,38	$\frac{1}{2} + \frac{8,6}{\sqrt{x}}$ ( $x = T/100$ )	1	28,4	0 (= $\omega'$ )
		1	(57,1)	(140)
		1	56,4	1600
		1	60,0	3760
		1	43,1	5350
1	32,0	7250		
CO <sub>2</sub> – 15 10,4 $\mu\text{m}$ . 9,4 4,3 2,7 2,0	1,3	0,7	12,7	667
		0,8	13,4	960
		0,8	10,1	1060
		0,8	11,2	2410 (= $\omega''$ )
		0,65	23,5	3660
		0,65	34,5	5200

<sup>1</sup>Dotyczy wariantu określonego wzorem (24b)

Przyjmuje się, że szerokość pasma szarego wynosi:

$$\Delta\omega^k = \Delta\omega_c^k / (1 - \bar{D}^k), \quad (22)$$

a jego granice wyznacza za pomocą wzorów (10). Jeżeli dwa różne pasma, tego samego lub różnych gazów, pokrywają się, obowiązuje wzór na transmisyjność pasma wspólnego:

$$\bar{D}_{i,j}^k = \bar{D}_i^k \bar{D}_j^k. \quad (a)$$

Dla znanej transmisyjności wyznacza się absorpcyjność  $\bar{A}^k = 1 - \bar{D}^k$  lub emisyjność  $\bar{\epsilon}^k$  pasma, które są uzupełnieniem do jedności. W obliczeniach z reguły stosuje się model gazu szarego w paśmie, to znaczy przyjmuje  $\bar{\epsilon}^k(T_g) = \bar{A}^k(T_g, T_w)$ . Dla pasm czarnych w każdym przypadku jest  $\bar{A}^k = \bar{\epsilon}^k = 1$  (oraz  $\bar{D}^k = 0$ ).

Jak już wspomniano, autorzy podają dość skomplikowany sposób określania parametrów  $\alpha(T)$  i  $\beta(T)$ , a w konsekwencji także  $\tau_{H1}(T)$ . Korzystanie z wykresów nie jest dogodnie, ponadto nie zapewnia odpowiedniej dokładności. Wandrasz [12] zaproponował aproksymowanie wykresów obliczonych parametrów  $\beta(T)$  i  $\tau_{H1}(T)$  za pomocą funkcji o postaci:

$$F_k(T) = A_k \cdot (x)^{B_k} \cdot \exp(C_k x), \quad \text{gdzie } x = T/100, \quad (23)$$

a przez  $F_k(T)$  oznaczono  $\beta(T)$  lub  $\tau_{H1}(T)$  dla  $k$ -tego pasma.

Tablica 3

Wyznaczanie parametru absorpcyjności  $A^*$

Dla $\eta =$	oraz $\tau_H =$	jest: $A^* =$	$\partial A^* / \partial \tau_H$
$\eta \leq 1$	$0 \leq \tau_H \leq \eta$	$\tau_H$	1
	$\eta \leq \tau_H \leq 1/\eta$	$\sqrt{4\eta\tau_H} - \eta$	$\sqrt{\eta/\tau_H}$
	$1/\eta \leq \tau_H \leq \infty$	$\ln(\eta\tau_H) + 2 - \eta$	$1/\tau_H$
$\eta \geq 1$	$0 \leq \tau_H \leq 1$	$\tau_H$	1
	$1 \leq \tau_H \leq \infty$	$1 + \ln(\tau_H)$	$1/\tau_H$

Elementarna analiza wzoru (18) pokazuje, że dla  $\alpha(T) = \alpha_0$  (tak przyjmuje się dla niektórych pasm) jest:  $B_k = -1,5$  oraz  $C_k = 0$ , stałą zaś  $A_k$  można dla danego gazu obliczyć. Dla innych pasm funkcje te zostały obliczone, a następnie dobrano takie stałe, które dają najmniejsze odchylenia. Tak wyznaczone [13] współczynniki podano w tablicy 4.

Tablica 4

Współczynniki określonych wzorem (23) funkcji  $\beta(T)$  i  $\tau_{H1}(T)$   
dla  $T = 400 \div 2000$  K

gaz / pasmo	A	B	C
<i>a) współczynniki dla parametru <math>\beta</math></i>			
H <sub>2</sub> O – rot.	0,14311	-0,5	0
6,3 $\mu\text{m}$	0,033175	-0,06110	0,12178
2,7	0,101678	-0,28636	0,14185
1,87	0,025927	-0,03625	0,13240
1,38	0,047550	-0,29730	0,15160
CO <sub>2</sub> – 15,0	0,006709	1,65983	0,04187
10,4 $\mu\text{m}$	0,002240	1,98334	0,04153
9,4	0,006627	1,98370	0,04150
4,3	0,017836	1,78957	0,04481
2,7	0,006667	2,10461	0,03370
2,0	0,015824	2,31079	0,02490
<i>b) współczynniki dla parametru <math>\tau_{H1}</math></i>			
H <sub>2</sub> O – rot. <sup>1)</sup>	0,48396	+2,48239	-0,11257
6,3 $\mu\text{m}$	1603,7	-1,5	0
2,7	941,28	-1,54946	+0,00890
1,87	163,17	-1,67371	+0,04447
1,38	183,32	-1,59643	+0,01699
CO <sub>2</sub> – 15,0	8023,5	-1,5	0
10,4 $\mu\text{m}$	0,031185	+2,26930	-0,17255
9,4	0,04243	+2,26930	-0,17225
4,3	52673,0	-1,5	0
2,7	942,89	-1,68263	+0,05680
2,0	10,662	-1,81475	+0,10251

<sup>1)</sup>Dotyczy wariantu określonego wzorem (24a)

Dane zebrane w tablicy 4 wymagają komentarza dotyczącego pasma rotacyjnego H<sub>2</sub>O. Dla tego pasma autorzy podają różne wersje współczynnika  $\alpha(T)$  i dwa sposoby określania położenia pasma. Za najmniej dokładną uznano wersję  $\alpha(T) = \text{const}$  (5200 [cm<sup>-1</sup>·m<sup>2</sup>/g]), która daje zbyt duży udział pasma rotacyjnego w promieniowaniu H<sub>2</sub>O (szczególnie dla  $T < 600$  K), to znaczy zawyża emisyjność H<sub>2</sub>O [16]. Można dla tego pasma przyjąć jeden z dwóch wariantów określania parametru grubości optycznej i położenia pasma:

$$\tau_{\text{H}_1}(T) = 402004x^{-1,5} \cdot \exp(-17,6/\sqrt{x}) \text{ oraz } \omega_k' = 0 \text{ cm}^{-1}, \quad (24a)$$

$$\tau_{\text{H}_1}(T) = 399892x^{-1,5} \cdot \exp(-5/\sqrt{x}) \text{ oraz } \omega_k'' = 140 \text{ cm}^{-1}, \quad (24b)$$

gdzie  $x = T/100$  jak we wzorze (23). W obu przypadkach nie ma potrzeby stosować wzoru (23) do wyznaczania  $\tau_{\text{H}_1}$ . Dla wariantu (24b) można też przyjmować  $\omega_k' = 0$ , a ze wzoru (10) wyznaczać tylko  $\omega_k''$ . W tabelicy 2 zamieszczono dane dla obu wariantów; wynika z nich, że pasmo rotacyjne  $\text{H}_2\text{O}$  może być umownie traktowane jako pasmo  $71,4 \mu\text{m}$ .

Przedstawiony sposób określania wielkości charakteryzujących model pasmowy, który polega na zastosowaniu aproksymacji parametrów  $\beta$  i  $\tau_{\text{H}_1}$ , pozwala dość łatwo wyznaczyć interesujące nas wielkości dotyczące poszczególnych pasm promieniowania. Usunięto tutaj błędy spotykane w niektórych wcześniejszych publikacjach [12, 14, 15]. Zamieszczone w pracach Edwardsa oraz w [3] dane umożliwiają [13] określenie parametrów pasm promieniowania dla gazów zawierających  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{NO}$ ,  $\text{SO}_2$  i  $\text{CH}_4$ .

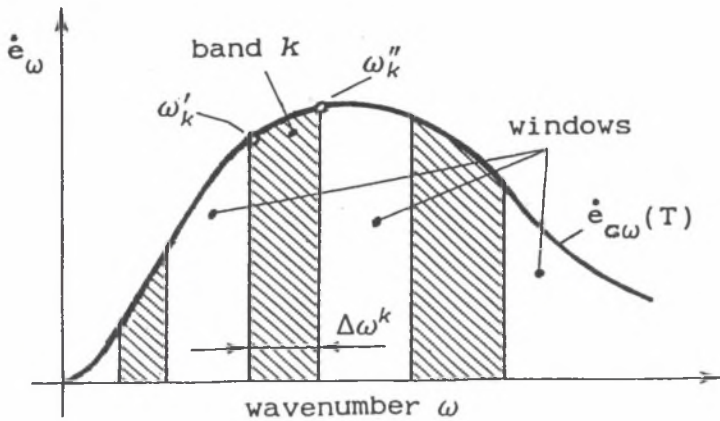
### 3.1.1. Zastosowanie modelu pasm szerokich

Algorytmy oraz odpowiednie programy obliczeniowe służące do wyznaczania granic pasm zostały opracowane głównie przez Tańczyka. Dostępne w ITC programy umożliwiają m.in. graficzną prezentację otrzymanych wyników, a tym samym łatwe śledzenie wpływu parametrów wyjściowych (temperatura, ciśnienie składnikowe gazu, gęstość optyczna, udziały składników promieniujących) na emisyjność gazu.

Wyznaczanie emisyjności (i absorpcyjności) to podstawowe zadanie rozwiązywane za pomocą tych programów [16, 21]. Postępowanie jest najprostsze dla pasm czarnych. Pasma promieniowania mają umowne ostre granice; pomiędzy nimi są przezroczyste okna (rys. 4). Dla pasma (lub okna) przyrost *funkcji promieniowania* wynosi:

$$\Delta f_p^k(T) = f_p(\lambda_k'' T) - f_p(\lambda_k' T) = f_p(T/\omega_k') - f_p(T/\omega_k'') \quad (25)$$

(w powyższym wzorze granice pasma ulegają odwróceniu:  $\lambda'' = 1/\omega'$  oraz  $\lambda' = 1/\omega''$ ), dla ustalonych granic wartość tego przyrostu zależy od temperatury.



Rys.4. Pasma promieniowania gazu i okna  
Fig. 4. The bands and windows for a radiating gas

Składowa część emisji energii pochodząca z danego pasma wynosi:

$$\bar{e}_c^k = \dot{e}_c \cdot \Delta f_p^k(T) = \epsilon^k \dot{e}_c \quad (26)$$

Przyrównano tutaj  $\Delta f_p$  do  $\epsilon^k$ , to znaczy określono składową emisyjność  $\epsilon^k$  danego pasma w całej emisyjności  $\epsilon_g$  gazu [3]. Suma  $\epsilon^k$  dla wszystkich pasm, określonych dla  $T = T_g$ , jest równa emisyjności gazu:

$$\epsilon_g = \sum_k \epsilon^k = \sum_k \Delta f_p^k(T) \quad (27)$$

Przy wyznaczaniu absorpcyjności gazu granice pasm są te same, ale przyrosty funkcji promieniowania są obliczane dla temperatury  $T_w$ . Z tego powodu każdy przyrost funkcji promieniowania, a także suma tych przyrostów dają inną wartość. Widzimy więc, że model pasmowy zawiera w sobie algorytm, który powoduje, że wyznaczona średnia absorpcyjność gazu jest różna od jego emisyjności, prowadzi on zatem do modelu gazu nieszarego.

W podobny sposób przeprowadza się obliczenia dla pasm szarych. Wówczas każdy przyrost funkcji promieniowania jest mnożony dodatkowo przez emisyjność  $\bar{e}^k$  danego pasma, ale równocześnie szerokość pasm jest większa. Ze względu na nieliniowość funkcji promieniowania obliczone emisyjności gazu dla obu modeli (pasm czarnych i szarych) nieznacznie się różnią.

Bardziej złożony jest problem obliczania radiacyjnej wymiany ciepła w ośrodkach wypełnionych gazem promieniującym. Najprostsze rozwiązania otrzymuje się dla gazu szarego [3, 4]. Rozwiązania dla gazu nieszarego są bardziej rozbudowane [5], gdyż taki gaz ma tyle absorpcyjności i transmisyjności, ile powierzchni ograniczających (o różnych temperaturach). Model pasmowy do obliczania radiacyjnej wymiany ciepła w piecu komorowym przedstawił najpierw Wandrasz [12], a według nowych procedur opracował go Wolski pod kierunkiem autora [17, 18]. Otrzymane rezultaty wskazują m.in. na to, że zarówno model gazu szarego, jak i model pasm czarnych mogą być mało dokładne, gdyż zbytnio odbiegają od rzeczywistego fizycznego zjawiska promieniowania gazów.

#### 4. Porównanie modeli gazu szarego i gazu nieszarego

Interesujące jest porównanie modelu gazu szarego i gazu szarego–nieszarego z punktu widzenia rezultatów radiacyjnej wymiany ciepła. Dla uchwycenia różnic jakościowych zostanie to przedstawione dla najprostszego układu gaz — ścianka (izotermiczna). Strumień ciepła wymieniany pomiędzy gazem (szarym) a ścianką można wyrazić wzorem:

$$\dot{q}_{g-w}^r = \varepsilon_{g-w} (\dot{e}_{cg} - \dot{e}_{cw}), \quad (28)$$

gdzie emisyjność wzajemna układu gaz — ścianka wynosi

$$\varepsilon_{g-w} = \frac{1}{1/\varepsilon_w + 1/\varepsilon_g - 1}. \quad (29)$$

Wzór (28), po podstawieniu prawa Stefana-Boltzmann'a

$$\dot{e}_{ci} = \sigma_c T_i^4 \quad (b)$$

można zlinearyzować, wprowadzając *radiacyjny współczynnik wnikania ciepła*

$$\dot{q}_{g-w}^r = \alpha_r (T_g - T_w). \quad (30)$$

Z porównania (28) i (30) wynika:

$$\alpha_r = \varepsilon_{g-w} \sigma_c (T_g + T_w) (T_g^2 + T_w^2). \quad (31)$$

Dla  $T_w \rightarrow T_g$  otrzymuje się wartość graniczną

$$\alpha_{rg} = 4\epsilon_{g-w} \sigma_c T_g^3. \quad (31a)$$

Dla gazu nieszarego absorpcyjność określa się wzorami (2) i (3a), w konsekwencji równanie wymiany ciepła w układzie gaz — ścianka przyjmuje postać:

$$\dot{q}_{gw}^r = \epsilon_{g-w} (\epsilon_g \dot{c}_{cg} - A_g \dot{c}_{cw}) / A_g, \quad (32)$$

gdzie w wyrażeniu (29) na  $\epsilon_{g-w}$  zamiast emisyjności  $\epsilon_g$  jest  $A_g$ . Dla  $T_w \rightarrow T_g$  absorpcyjność gazu szarego-nieszarego dąży do jego emisyjności określonej dla  $T_g$ , wydawałoby się więc, że wzór (32) daje wtedy takie same wyniki co wzór (28). Tymczasem obliczenia numeryczne [20] pokazują, że radiacyjny strumień ciepła wymienianego jest dla modelu gazu nieszarego mniejszy, to samo dotyczy współczynnika  $\alpha_r$ . Tę pozorną sprzeczność można łatwo wyjaśnić, jeżeli do wzoru (32) podstawimy zależność (5). Po dokonaniu odpowiednich przekształceń [19] otrzymuje się:

$$\alpha_r = \sigma_c (\epsilon_g \cdot \epsilon_{g-w} / A_g) (T_g + T_w) (T_g^2 + T_w^2) - k \cdot T_w^4 / \epsilon_g. \quad (33)$$

Występujący w powyższym oraz w równaniu (5) współczynnik  $k$  jest zwykle dodatni. Wartość graniczną otrzymuje się znów dla  $T_w \rightarrow T_g$ :

$$\alpha_r = 4 \sigma_c \epsilon_{g-w} T_g^3 \left( 1 - \frac{k T_g}{4 \epsilon_g} \right). \quad (34)$$

Wyrażenie przed nawiasem wzoru (34) jest wielkością graniczną dla gazu szarego. Okazuje się zatem, że w modelu gazu nieszarego, jeżeli jest spełniona zależność (5), istnieje wbudowane ograniczenie, które sprawia, że zarówno radiacyjny strumień ciepła, jak i strumień wymienianego ciepła są (dla  $k > 0$ ) zawsze *mniejsze* niż dla modelu gazu szarego. Są to więc dwa *różne* modele gazu szarego.

## 5. Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono rezultaty wybranych prac, prowadzonych na przestrzeni wielu lat w naszym ośrodku, głównie przez autora, ale również przez współpracowników. Pokazują one m.in. rozwój teorii oraz metod obliczeniowych, a także postęp w rozumieniu kwestii pro-



mieniowania ciepłego, zwłaszcza promieniowania gazów. Osiągnięte rezultaty umożliwiają nam, a także użytkownikom pracującym w przemyśle znacznie lepiej i dokładniej analizować i projektować wiele urządzeń cieplnych.

W zeszycie naukowym, ukazującym się z okazji Sesji Jubileuszowej, nie sposób nie wspomnieć profesora **Witolda Około-Kułaka** (1909÷1975), pierwszego doktoranta (1950 r.) wypromowanego przez prof. St. Ochęduszkę w zakresie teorii maszyn cieplnych. Profesor Około-Kułak był prekursorem prac w zakresie wymiany ciepła, w tym także dotyczących promieniowania ciepłego, i Jego pamięci autor niniejszą pracę poświęca.

## LITERATURA

1. Hottel H.C.: Radiant heat transmission. Rozdz. 4 w: Mc Adams W.H. Heat transmission. Mc Graw-Hill, New York 1954.
2. Hottel H.C., Sarofim A.F.: Radiative transfer. Mc Graw-Hill, New York 1967.
3. Kostowski E.: Promieniowanie ciepłe. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1993.
4. Kostowski E.: Przepływ ciepła. Skrypt Pol. Śl., Gliwice 1995.
5. Kostowski E.: Analiza czynników wpływających na zużycie paliwa podczas nagrzewania wsadu w piecu węglanym. ZN Pol. Śl., Energetyka z. 49, Gliwice 1973 (praca habilitacyjna).
6. Michiejew M.A.: Zasady wymiany ciepła. PWN, Warszawa 1953.
7. Gurwicz A.M., Mitor W.W.: Izłuczenije dymowych gazow. Tiepłoenetgetika (1955), nr 12.
8. Schack A.: Der Industrielle Wärmeübergang. Stahleisen Verlag, Düsseldorf 1969.
9. Kostowski E.: Analytische Bestimmung des Emissionsgrades von Abgasen. Gaswärme international 40 (1991), s. 529.
10. Edwards D.K., Balakrishnan A.: Thermal radiation by combustion gases. Int. J. Heat Mass Transfer, v. 16 (1973), s. 25.
11. Edwards D.K.: Molecular gas band radiation. W książce: Advances in heat transfer v. 12, Academic Press, New York 1976.
12. Wandrasz J.: Pasmowy model matematyczny przepływu energii przez promieniowanie w piecu komorowym. ZN Pol. Śl., Energetyka z. 58, Gliwice 1976 (praca habilitacyjna).

13. Kostowski E., Tańczyk M.: Uproszczony sposób określania wielkości charakteryzujących model pasmowy Edwardsa–Balakrishnana promieniujących gazów. Materiały V Sympozjum Wymiana ciepła i odnawialne źródła energii, Szczecin-Świnoujście 1994, s. 153.
14. Rudnicki Z.: Radiacyjny przepływ ciepła w piecach przemysłowych. Wyd. Politechniki Śl., Gliwice 1992.
15. Modelowanie numeryczne pól temperatury. Praca zbiorowa pod red. J. Szarguta, WNT, Warszawa 1992.
16. Kostowski E., Tańczyk M.: Określanie emisyjności gazów szarych na podstawie danych modelu pasmowego. Materiały V Sympozjum Wymiana ciepła i odnawialne źródła energii, Szczecin-Świnoujście 1994, s. 149-152.
17. Wolski J.: Obliczenia radiacyjnej wymiany ciepła w piecu komorowym przy zastosowaniu modelu pasmowego promieniowania gazów. Praca dyplomowa wykonana pod kier. autora, ITC, Gliwice 1993.
18. Kostowski E., Wolski J.: Zastosowanie modelu pasmowego do obliczania radiacyjnej wymiany ciepła w piecu komorowym. Materiały konferencji Procesy nagrzewania i chłodzenia metali, Częstochowa 1994.
19. Kostowski E.: Ograniczenia dotyczące strumienia ciepła wymienianego i radiacyjnego współczynnika wnikania ciepła dla modelu gazu nieszarego. Materiały VI Sympozjum Wymiana ciepła i odnawialne źródła energii. Szczecin-Świnoujście 1996, s. 123.
20. Kostowski E. (red.): Zbiór zadań z przepływu ciepła. Skrypt Pol. Śl., Gliwice 1996.
21. Kostowski E., Kucypera S., Tańczyk M.: A simplified method for determination of characteristic band parameters in Edwards – Balakrishnan gas-band model and its application. Materiały Seminarium New concept in the energy sector, Gliwice-Zakopane 1997.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zygmunt Kolenda

## Abstract

The gray gas model is still used in the calculations of the radiation of gases. For this model we assume, that the absorptivity of gas is equal to its emissivity and that both are independent from the wavelength. The value of emissivity of the radiating gas depends on its optical density and on the temperature and can be found in diagrams (given for example by Hottel and Egberts [2]). Using the gray-gas model we obtain the simplest relations, which enable to carry out the quality analysis of discussed phenomena.

For the most complicated variation, i.e. for the so called gray-non-gray gas model, the gas absorptivity depends additionally on the temperature of the radiation source. Thus, for a determined volume (for example in a furnace chamber) gas has as many absorptivities (and transmissivities) as temperatures of various walls, and only one emissivity. To make the calculations (determination of emissivity and absorptivities) easier and more objective, analytical functions are given. The algorithm of determination of the emissivity and absorptivity is given in equations (2), (8) and (9); in table 1 the necessary coefficients are given.

The width-band gas radiation model from Edwards and Balakrishnan [10, 11] approximate the gas radiation better as the both gray gas models. For this model, author with coworkers have made some procedures making its use most convenient, their are presented in part 3. This model as result give the non-gray gas model.

A comparison of both gray gas models is given in point 4. If we assume, that the relation (5) between the emissivity  $\epsilon_g$  and the absorptivity  $A_g$  is in force, then we can show, that both the radiative heat flux and the radiative heat transfer coefficient for the non-gray gas model are lower as for the gray gas model; the result is given in formulae (34).

Presented paper is devoted the memory of professor Około-Kuśak (1909-1975), the co-worker of professor Ochęduszek. Prof. Około-Kuśak worked in the field *heat transfer* and was one of the pioneers in this area in the Silesian Technical University of Gliwice.