ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Wiesław GRZESIKIEWICZ
Instytut Pojazdów, Politechnika Warszawska
Elżbieta JARZĘBOWSKA
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, Politechnika Warszawska
Andrzej WAKULICZ
Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk w Warszawie

NIEKLASYCZNY OPIS RUCHU UKŁADÓW MECHANICZNYCH Z OGRANICZENIAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis dynamiki układu skrępowanego więzami jednostronnymi. Opis sformułowano z wykorzystaniem pojęć analizy wypukłej. Więzy przedstawiono za pomocą zbiorów dopuszczalnych położeń, prędkości i przyspieszeń. Przyspieszenia układu nieswobodnego wyznaczono na podstawie zasady Gaussa. Proponowana metoda jest nieklasycznym sposobem analizy dynamicznej układów nieswobodnych, dla których więzy wymagają uwzględnienia obszaru dopuszczalnych przyspieszeń.

A NONCLASSICAL METHOD OF CONSTRAINED SYSTEMS DESCRIPTION

Summary. The method of description of a system constrained with unilateral constraints has been presented in the paper. These principles have been formulated with the use of convex analysis concepts. Constraints are described by sets of permissible positions, velocities and accelerations. Constrained system accelerations have been determined on the base of the Gauss principle. The proposed method is the nonclassical way of dynamical analysis of constrained systems, where constraints require to take a domain of permissible accelerations into accout.

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Резюме. В работе представлено динамический анализ системы связанной односторонными связьями. Принципы сформулировано с использованием понятий выпуклого анализа. Связьи представлено как собрания допустимых положений, скорости и ускорений. Ускорения системы определено на основании принципа Гаусса. Представленный метод это неклассический способ динамического анализа несвободной системы, где требуют учтения пространства допустимых ускорений.

1. CHARAKTERYSTYKA UKŁADU MECHANICZNEGO

Rozważamy układ mechaniczny złożony z punktów materialnych lub ciał sztywnych. Ruch układu analizujemy w przestrzeni fizycznej, którą jest czasoprzestrzeń Galileusza. Przestrzeń położeń ma postać jedno-, dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej. W przestrzeni tej obieramy inercjalny, kartezjański układ odniesienia. Konfigurację układu opisuje N współrzędnych, określających jego ruch w przestrzeni konfiguracji R^N.

Rozważamy układ, którego ruch skrępowany jest różnorodnymi więzami. Mogą to być więzy geometryczne, kinematyczne, dynamiczne, jedno- lub dwustronne, quasi-więzy.

2. OPIS RUCHU UKŁADU BEZ OGRANICZEŃ

Rozważamy układ mechaniczny swobodny; jego ruch jest opisany następująco:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}), \tag{1}$$

gdzie:
$\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}} \in R^N$ - wektory współrzędnych, prędkości, przyspieszeń uogólnionych,
$\mathbf{F} \in R^N$, $\mathbf{F} : R^{2N+1} \to R^N$ - wektor uogólnionych sił zewnętrznych działających na układ,
$\mathbf{M} \in R^{N \times N}$ - macierz bezwładności, symetryczna, dodatnio określona.

Dla układu (1) rozwiązujemy dwa zadania dynamiki:
- "pierwsze" zadanie dynamiki polega na wyznaczeniu przyspieszenia układu

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\mathbf{X}} = \phi(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \phi(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \end{array}\right\}, \tag{1a}$$

- "drugie" zadanie dynamiki polega na wyznaczeniu skończonych kinematycznych równań ruchu

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{X} \in W_1^2([0, T), R^N) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{V}_0 \end{array}\right\}. \tag{1b}$$

3. OPIS OGRANICZEŃ RUCHU UKŁADU

Na ruch układu (1) nakładamy więzy:

— $\mathbf{X}(t) \in \Omega_0(t)$ — więzy geometryczne, (2a)

— $\dot{\mathbf{X}}(t) \in \Omega_1(t, \mathbf{X}(t))$ — więzy kinematyczne, (2b)

— $\ddot{\mathbf{X}}(t) \in \Omega_2(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t))$ — więzy dynamiczne, (2c)

Zbiory Ω_0, Ω_1, Ω_2 nazywamy odpowiednio zbiorem dopuszczalnych położeń, prędkości, przyspieszeń. Więzy (2) nakładają następujące ograniczenia na ruch układu:

$$\mathbf{X}(t) \in \Omega_0(t), \tag{3a}$$

$$\mathbf{X}(t) \in \Omega_0(t), \qquad (3a)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) \in \mathcal{D}\Omega_0(t, \mathbf{X}(t)) \cap \Omega_1(t, \mathbf{X}(t)), \tag{3b}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) \in \mathcal{D}^2\Omega_0(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)) \cap \mathcal{D}\Omega_0(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)) \cap \Omega_2(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)), \tag{3c}$$

gdzie:

$$\mathcal{D}\Omega_0(t, \mathbf{X}(t)) := \left\{\dot{\mathbf{X}} \in R^N : \lim_{\tau \to 0+} \inf d\left(\mathbf{V}, \frac{1}{\tau}\Omega_0(t+\tau) - \mathbf{X}\right) = 0\right\}.$$

Zależność (3c) zapisujemy w postaci:

$$\ddot{\mathbf{X}} \in \Omega(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}). \tag{4}$$

Zbiór Ω jest wypukły, nazywamy go zbiorem dopuszczalnych przyspieszeń. Odgrywa on podstawową rolę w opisie ruchu układu nieswobodnego.

4. POSTULATY RELACJI

Jeżeli ruch układu jest ograniczony więzami (2), wtedy działa na niego dodatkowa siła — siła reakcji więzów, która powoduje, że przyspieszenie układu osiąga wartość należącą do zbioru Ω. Wobec tego układ równań ruchu układu skrępowanego więzami ma postać:

$$\left.\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{r}\ \ddot{\mathbf{X}} \in \Omega(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\right\} \tag{5}$$

Istnieje zatem taki zbiór sił reakcji, że

$$\mathbf{r} \in \mathbf{M}\Omega - \mathbf{F}.$$

W przyrodzie więzy realizowane są za pomocą siły reakcji doskonałej, to znaczy

$$\mathbf{r} \in \mathcal{K}(\ddot{\mathbf{X}}, \Omega). \tag{6}$$

Relacja (6) jest odwzorowaniem wielowartościowym, $\mathcal{K}$ jest stożkiem normalnym do zbioru Ω w punkcie $\ddot{\mathbf{X}}$ oraz

$$\mathcal{K}(\ddot{\mathbf{X}}, \Omega) := \left\{\mathbf{r} \in R^N : \mathbf{r}^T(\xi - \ddot{\mathbf{X}}) \geq 0\ \forall\ \xi \in \Omega\right\}, \tag{6a}$$

Wobec tego "pierwsze" zadanie dynamiki układu z więzami opisuje jednoznacznie układ zależności (5) i (6), z których wyznaczamy wartości dopuszczalnych przyspieszeń i sił reakcji.

5. SFORMULOWANIE RÓWNOWAŻNE

Zadanie dynamiki opisane zależnościami (5) i (6) sformułowano na bazie zasady dynamicznej równowagi sił. Zadanie to można sformułować inaczej, opierając się na zasadzie Gaussa. Zasadę tę przedstawiamy w nieklasycznym sformułowaniu. Definiujemy funkcjonał Gaussa $\mathcal{Z} : \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \rightarrow \mathrm{R}^{1}$, czyli potencjał przyspieszeń:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{a} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ — wektor przyspieszeń.

Zgodnie z zasadą Gaussa, układ mechaniczny porusza się z przyspieszeniem, dla którego funkcjonał Gaussa osiąga minimum

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) := \arg \min_{\mathbf{a} \in \Omega(t,\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}})} \mathcal{Z}(\mathbf{a}). \tag{8}$$

Wobec tego zbiór sił reakcji $\mathbf{r}$ spełnia zależność

$$\mathbf{r} = \arg \min_{\rho \in (\mathbf{M}\Omega - \mathbf{F})} \frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1}\rho.$$

Oba sformułowania, to znaczy zależności (5) i (6) oraz (7) i (8) są równoważne. Wzory (5) i (6) są to warunki Kuhna–Tuckera dla zadania optymalizacji (8).

W niniejszej pracy przedstawione zostały podstawowe formuły opisujące ruch układu z więzami jednostronnymi holonomicznymi lub nieholonomicznymi. Opis został przedstawiony w nieklasycznym sformułowaniu z wykorzystaniem podstawowych pojęć analizy wypukłej. Szczególnie ważny w tym sformułowaniu jest sposób opisu ograniczeń za pomocą zbioru dopuszczalnych położeń, prędkości i przyspieszeń, do których muszą należeć analogiczne wielkości osiągane w trakcie ruchu układu nieswobodnego. Powyższa metoda ułatwia sformułowanie i analizę dynamiczną nieklasycznych zadań mechaniki, to znaczy takich, w których występują więzy jednostronne (2), siły opisywane za pomocą funkcji wielowartościowych, np. siły tarcia suchego.

6. PRZYKŁAD

Rozważmy układ, dla którego zbiór dopuszczalnych przyspieszeń Ω ma postać:

$$\Omega := \left\{\ddot{\mathbf{X}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}} : \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{d} = 0,\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{g} \geq 0\right\}. \tag{9}$$

Na mocy postulatu doskonalej realizacji więzów (6) mamy:

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}\lambda + \mathbf{G}\mu, \quad \mathbf{D} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N} \times n_1}, \quad \mathbf{G} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N} \times n_2}, \tag{10}$$

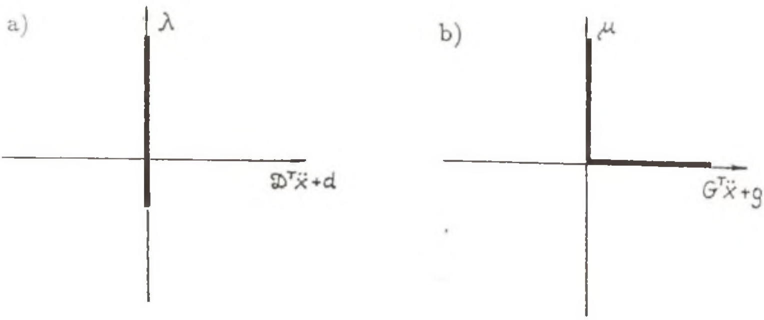
oraz

$$\lambda \in R^{n_1}, \quad \mu \in R_{+}^{n_2}, \quad \mu \geq 0.$$

Wobec tego przyspieszenia układu skrępowanego więzami (9) obliczamy z warunków:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}} = \mathrm{F}(t, \mathrm{X}, \dot{\mathrm{X}}) + \mathrm{D}\lambda + \mathrm{G}\mu \\ \mathrm{D}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{d} = 0 \\ \mathrm{G}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{g} \geq 0 \\ \mu^{\mathrm{T}}(\mathrm{G}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{g}) \geq 0 \\ \lambda \in \mathrm{R}^{m_1}, \quad \mu \in \mathrm{R}^{n_2}_{+}, \quad \mu \geq 0 \end{array}\right\} . \tag{11}$$

Zależności pomiędzy λ, μ i równaniami więzów (9) przedstawione są na rys. 1.



Rys. 1. a) więzy dwustronne; b) więzy jednostronne
Fig. 1. a) bilateral constraints; b) unilateral contraints

LITERATURA

[1] Grzesikiewicz W.: Computation of Forces Compressing Rail–Cars During Train Braking Process, The Archives of Transport, Vol. II, No. 4, 1990.

[2] Gutowski R.: Analytical Mechanics, PWN (in Polish), 1971.

[3] Jarzębowska E.: The Problem of Small Oscillations of Mechanical Systems with Arbitrary Order Nonholonomic Program Constraints, Nonlinear Vibration Problems. No. 24, 1991.

[4] Pars L.A.: Analytical Dynamics, Moscow (in Russian), 1971.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Buchacz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The method of description of rigid body systems constrained with various unilateral or bilateral holonomic or nonholonomic constraints has been presented in the paper. The principles presented herein have been formulated with the use of convex analysis concepts. Description of constraints (2) is presented with the use of sets of permissible positions, velocities and accelerations. On this basis the resultant set of permissible accelerations is determined, that is necessary for the complete dynamical description of a constrained system. This set has the form of multiple-valued mapping $\Omega : \mathrm{R}^1 \times \mathrm{R}^N \times \mathrm{R}^N \rightarrow \mathrm{cl}\,P(\mathrm{R}^N)$, it means that for each time $\mathrm{t} \in \mathrm{R}^N$ the relation $\ddot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) \in \Omega(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \dot{\mathrm{x}})$ has to be fulfilled. Inertial properties of bodies of a system has been described by a functional called the acceleration energy $S(\ddot{\mathrm{x}}; \mathrm{t}, \mathrm{x}, \dot{\mathrm{x}})$. On the basis of these values functional (7) called Gauss functional has been determined.

Acceleration values have been determined on the base of the Gauss principle according to it a dynamical system changes its states with the acceleration given by eq. (8) that minimalizes the Gauss functional.

It has also been shown that employing Kuhn–Tucker conditions the principle mentioned above can be presented in the form of conditions including: motion equations, contraint, acceleration and force descriptions and an ideal accomplishment of motion restrictions postulate.

An example illustrating the application of the proposed method has been shown in the paper.

The description method proposed herein is the nonconventional way of dynamical analysis of contrained systems where the variety of restrictions requires to take a domain of permissible accelerations into account. The above method gives possibility to consider also other constrained system when kinematical unilateral or bilateral constraints are imposed. The method lets understanding the analytical mechanics structure better and in many cases makes a formulation and dynamical analysis of systems with dry friction forces and nondifferential constraints easier.