ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Andrzej ICHA
Zakład Dynamiki Morza
Instytut Oceanologii
Polska Akademia Nauk w Gdańsku

PRZESTRZENNY OPIS TURBULENTNEJ KONWEKCJI TERMOHALINOWEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono statystyczne podejście do problemu turbulentnej konwekcji termohalinowej przy wykorzystaniu formalizmu funkcjonalnego. Otrzymano funkcjonalne równanie typu Hopfa oparte na linearyzowanym, w sensie Oseena, układzie równań Oberbecka-Boussinesqa. Udowodniono twierdzenie o istnieniu rozwiązania zagadnienia początkowego dla tego równania.

SPATIAL DESCRIPTION OF TURBULENT THERMOHALINE CONVECTION

Summary. A statistical approach to turbulence in a thermally and salt-stratified medium is considered on the basis of functional formalism. The functional Hopf's type equation based on the linearized set of Oberbeck-Boussinesq equations in the sense of Oseen is obtained. An existence theorem of the initial problem for this equation is given.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕРМОХАЛИННОЙ КОНВЕКЦИИ

Резюме. В работе представлено статистическое описание турбулентности в стратифицированной по температуре и солености среде используя функциональный подход. Получено функциональное уравнение типа Хопфа, которое базирует на линеаризованной, в смысле Оссена, системе уравнений Обербека-Буссинеска. Доказано теорему существования решения начальной проблемы дла этого уравнения.

1. WSTĘP

Występowanie nawet słabej stratyfikacji ośrodka znacząco wpływa na procesy turbulentnego transportu w cieczy i prowadzi do jakościowych różnic w porównaniu z dynamiką turbulencji w akwenie jednorodnym. Dlatego matematyczny opis przepływów turbulentnych w ośrodkach stratyfikowanych (tzn. niejednorodnych gęstościowo przepływów zachodzących w polu siły ciężkości g) wymaga analizy znacznie bardziej złożonego układu równań uwzględniających wpływ pól - temperatury i zasolenia - na dynamikę przepływu. Podstawową rolę w takim opisie odgrywa układ równań termohydrodynamiki zapisany w przybliżeniu Oberbecka-Boussinesqa (O-B) (zob. np. [1]).

Rozwiązanie problemu turbulentnej konwekcji termohalinowej w ośrodku nieograniczonym ($D = R^3$), przy wykorzystaniu układu równań O-B, wymaga analizy odpowiedniego układu równań funkcjonalnych spełnianych przez przestrzenno-czasowy funkcjonał charakterystyczny pól prędkości, temperatury i zasolenia (zob.[2,3]). Znalezienie pełnego rozwiązania tego zagadnienia napotyka, jak dotąd, nieprzezwyciężone trudności matematyczne. W zastosowaniach może być użyteczne rozważenie prostszego, niż układ (O-B), układu równań zapisanych w przybliżeniu Oseena

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} + d_j(t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + g_i(t)(\beta_s - \alpha_t\theta) + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j x_j}\,, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + d_j(t)\frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= k_t\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}\,, \\
\frac{\partial s}{\partial t} + d_j(t)\frac{\partial s}{\partial x_j} &= k_s\frac{\partial^2 s}{\partial x_j \partial x_j}\,, \\
\frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie przyjęliśmy umowę sumacyjną Einsteina oraz $x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3$, $t \in [t_0; \infty)$; $u_i(x,t)$ - jest polem prędkości cieczy, $\pi(x,t) = [p(x,t) - p_0]\rho_0^{-1}$; $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$; $s(x,t) = S(x,t) - s_0$, gdzie p, T, S i ρ są - odpowiednio - ciśnieniem, temperaturą, zasoleniem i gęstością cieczy. Indeks "zero" wzkazuje na wartości tych parametrów w stanie równowagi hydrostatycznej, przy czym $\pi\rho_0 p_0^{-1} \ll 1$, $\theta_0^{-1} \ll 1, s_0^{-1} \ll 1$. Wielkości - α_t, β_s, ν, k_t i k_s oznaczają - odpowiednio - współczynniki rozszerzalności cieplnej, ściśliwości zasoleniowej, lepkości kinematycznej, molekularnego przewodnictwa temperaturowego oraz molekularnej dyfuzji soli. W układzie równań (1) $d(t)$ jest zadanym, nielosowym ciągłym polem wektorowym określonym dla $t \geq 0$. Zakładając, że przepływ turbulentny ma miejsce w obszarze $D = R^3$ oraz przyjmując, że pole losowe $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$ spełnia powyższy układ równań, sformułujemy problem konwekcji wykorzystując przestrzenny funkcjonał charakterystyczny pola $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU KONWEKCJI

Niech $\Omega = \{\omega\}$ będzie przestrzenią fazową przepływu turbulentnego, tzn. zbiorem, którego elementami są pola wektorowe $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$, spełniające układ równań (1) i określone warunki brzegowe. Przyjmiemy, że na przestrzeni Ω_0 początkowych pól wektorowych $[u(x,t_0), \theta(x,t_0), s(x,t_0)]$ zadana jest miara probabilistyczna $\mu_0(\omega_0)$ określająca prawdopodobieństwo, z którym pole $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$ należy do borelowskiego podzbioru $\omega_0 \subset \Omega_0$. Miarę $P(\omega)$ skoncentrowaną na zbiorze rozwiązań układu równań (1), taką, że jej zwężenie dla t_0 jest równe mierze $\mu_0(\omega_0)$, nazywamy przestrzenno-czasowym statystycznym rozwiązaniem układu równań (1). W sytuacji, kiedy rozpatrujemy tylko wartości wielkości termohydrodynamicznych, odpowiadające tej samej chwili czasu, problem turbulencji sprowadza się do znalezienia jednoparametrowej rodziny miar $\mu(t,\omega_0)$, przy czym $\mu(t,\omega_0) = P([u,\theta,s] : [u(t,\cdot), \theta(t,\cdot), s(t,\cdot)] \in \omega_0)$ jest zwężeniem miary $P(\omega)$ przy ustalonym $t \in [t_0;\infty)$ i która jest jednoznacznie wyznaczona przez zadany rozkład prawdopodobieństwa μ_0 w chwili początkowej [4].

Przestrzenne statystyczne rozwiązanie układu równań (1) (rodzina rozkładów $\mu(t,\omega_0)$) jest w zupełności wyznaczone przez funkcjonał charakterystyczny pola $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$, tzn. przekształcenie Fouriera miar $\mu(t,\omega_0)$). Taki funkcjonał spełnia pewne liniowe równanie różniczkowe o pochodnych wariacyjnych (funkcjonalnych), którego rozwiązanie byłoby tożsame z rozwiązaniem problemu konwekcji (w przestrzennym sformułowaniu). Wprowadzimy zatem do rozważań następujący funkcjonał

$$\begin{aligned}\Phi[a(x), b(x), c(x) : t] &= \langle exp(i\{a,b,c; u,\theta,s : t\})\rangle = \int exp(i\{a,b,c;u,\theta,s:t\})d\mu = \\ &= \int exp\Big(i\int_{R^3}[a_j(x)u_j(x,t) + b(x)\theta(x,t) + c(x)s(x,t)]dx\Big)d\mu\,, \qquad (2)\end{aligned}$$

gdzie pole $[a(x), b(x), c(x)]$ jest ciągłym polem wektorowym na R^3 o nośniku zwartym w R^3. W dalszym ciągu, wygodniej jest operować widmową reprezentacją tego funkcjonału, zdefiniowaną następująco [5]:

$$\begin{aligned}\Psi[\alpha(k), \beta(k), \gamma(k) : t] &= \Phi\Big[(2\pi)^{-3}\int \alpha(k)exp(ikx)dk, (2\pi)^{-3}\int \beta(k)exp(ikx)dk, \\ &\quad (2\pi)^{-3}\int \gamma(k)exp(ikx)dk : t\Big]. \qquad (3)\end{aligned}$$

Otrzymamy równanie dla funkcjonału Ψ. W tym celu założymy, że losowe pole $[u(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$ znika na zewnątrz zwartego obszaru D_t [6] i dokonamy transformacji Fouriera układu równań (1). Oznaczając obrazy Fouriera pola $[u(x,t), \pi(x,t), \theta(x,t), s(x,t)]$ – odpowiednio – przez $[v(k,t), q(k,t), \vartheta(k,t), \sigma(k,t)]$, gdzie, np. $u(x,t) = \int exp(ikx)v(k,t)dk$, otrzymamy w miejsce układu (1) następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_i(k,t)}{\partial t} &= -id_j(t)k_j v_i(k,t) - ik_i q(k,t) - \nu k^2 v_i(k,t) - \alpha_t g_i(t)\vartheta(k,t) + \beta_s g_i(t)\sigma(k,t)\,, \\
\frac{\partial \vartheta(k,t)}{\partial t} &= -id_j(t)k_j\vartheta(k,t) - ik_t k^2\vartheta(k,t)\,, \\
\frac{\partial \sigma(k,t)}{\partial t} &= -id_j(t)k_j\sigma(k,t) - ik_s k^2\sigma(k,t)\,, \\
k_j v_j(k,t) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ponieważ $\Psi[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k):t] = \left\langle exp\{i\int[\alpha_i(k)v_i(k,t)+\beta(k)\vartheta(k,t)+\gamma(k)\sigma(k,t)]dk\}\right\rangle$, to, jak łatwo zobaczyć, funkcjonał Ψ spełnia następujące równanie funkcjonalne:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int \alpha_i(k)[-id_k(t)k_k - \nu k^2]\frac{\delta\Psi}{\delta\alpha_i}dk \;+\; \alpha_t\int g_j(t)\alpha_i(k)P^*_{ij}(k)\frac{\delta\Psi}{\delta\beta}dk \;- \\
-\beta_s\int g_j(t)\alpha_i(k)P^*_{ij}(k)\frac{\delta\Psi}{\delta\gamma}dk \;-\; \int\beta(k)[id_k(t)k_k + k_t k^2]\frac{\delta\Psi}{\delta\beta}dk \;- \\
-\int\gamma(k)[id_k(t)k_k + k_s k^2]\frac{\delta\Psi}{\delta\gamma}dk\,,
\end{aligned} \tag{5}
$$

gdzie $P^*_{ij}(k) = -P_{ij}(k) = k_i k_j k^{-2} - \delta_{ij}$ - jest operatorem rzutu transwersalnego (δ oznacza symbol Kroneckera) oraz wykorzystaliśmy układ równań (4) i wyeliminowaliśmy wyraz odpowiadający ciśnieniu $q(k,t)$ za pomocą równania ciągłości.

Niech $\Psi_0[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k)]$ będzie zadanym funkcjonałem charakterystycznym losowego pola $[v(k,t_0),\vartheta(k,t_0),\sigma(k,t_0)]$. Rozważymy funkcjonał,

$$
\Psi[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k):t] = \Psi_0[\tau(k),v(k),\phi(k)]\,, \tag{6}
$$

którego argumenty są równe

$$
\begin{aligned}
\tau_i(k,t) &= exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k)\alpha_j(k)\,, \\
v(k,t) &= exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k)\alpha_t\int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_t)k^2(t'-t_0)]\alpha_i(k) + \\
&\quad + exp[-ik_kD_k(t) - k_t k^2(t-t_0)]\beta(k)\,, \\
\phi(k,t) &= exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k)\beta_s\int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_s k^2(t'-t_0)]\alpha_i(k) + \\
&\quad + exp[-ik_kD_k(t) - k_s k^2(t-t_0)]\gamma(k)\,,
\end{aligned} \tag{7}
$$

gdzie $D_j(t) = \int_{t_0}^{t} d_j(t')dt'$.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Funkcjonał charakterystyczny $\Psi[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k):t]$, którego argumenty są określone zależnościami (7), spełnia równanie (5) oraz następujący warunek początkowy:*

$$
\Psi[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k):t_0] = \Psi_0[\alpha(k),\beta(k),\gamma(k)]. \tag{8}
$$

Dowód. Mamy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int \left\{ \frac{\delta \Psi_0}{\delta \tau_j}\frac{\partial \tau_j}{\partial t} + \frac{\delta \Psi_0}{\delta v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} dk \quad =$$

$$= \int \left\{ \frac{\delta \Psi_0}{\delta \tau_j}[-id_k(t)k_k - \nu k^2]P^*_{ij}(k)\alpha_j(k)exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)] \quad + \right.$$

$$+\frac{\delta \Psi_0}{\delta v}\Big[[-id_k(t)k_k - \nu k^2]P^*_{ij}(k)exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)] \quad \times$$

$$\times\ \alpha_l \int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_l)k^2(t'-t_0)]\alpha_i(k)dt' + exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)] \quad \times$$

$$\times P^*_{ij}(k)\alpha_i(k)\alpha_l g_j exp[(\nu - k_l)k^2(t'-t_0)] + [-id_k(t)k_k - k_l k^2] \quad \times$$

$$\times exp[-ik_kD_k(t) - k_l k^2(t-t_0)]\beta(k)\Big] \quad +$$

$$+\frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi}\Big[[-id_k(t)k_k - \nu k^2]P^*_{ij}(k)exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)] \quad \times$$

$$\times\ \beta_s \int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_s)k^2(t'-t_0)]\alpha_i(k)dt' + exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)] \quad \times$$

$$\times P^*_{ij}(k)\alpha_i(k)\beta_s g_j exp[(\nu - k_s)k^2(t'-t_0)] + [-id_k(t)k_k - k_s k^2] \quad \times$$

$$\left. \times\ exp[-ik_kD_k(t) - k_s k^2(t-t_0)]\phi(k)\Big] \right\} dk. \tag{9}$$

Wykorzystując reguły różniczkowania złożonych funkcjonałów, otrzymamy [7]:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta \alpha_i} = \int \left[\frac{\delta \Psi_0}{\delta \tau_j(k',t')}\frac{\delta \tau_j(k',t')}{\delta \alpha_i(k)} + \frac{\delta \Psi_0}{\delta v(k',t)}\frac{\delta v(k',t)}{\delta \alpha_i(k)} + \frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi(k',t)}\frac{\delta \phi(k',t)}{\alpha_i(k)} \right] dk',$$

oraz

$$\frac{\delta \Psi}{\delta \beta} = \int \frac{\delta \Psi_0}{\delta v(k',t')}\frac{\delta v(k',t')}{\delta \beta(k)} dk \;\; ; \;\; \frac{\delta \Psi}{\delta \gamma} = \int \frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi(k',t')}\frac{\delta \phi(k',t')}{\delta \gamma(k)} dk\,.$$

Następnie, wykorzystując (7), otrzymujemy:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta \alpha_i} = \frac{\delta \Psi_0}{\delta \tau_j(k,t)} exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k) \quad +$$

$$+\frac{\delta \Psi_0}{\delta v(k,t)} exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k)\alpha_l \int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_l)k^2(t'-t_0)]dt' \quad +$$

$$+\frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi(k,t)} exp[-ik_kD_k(t) - \nu k^2(t-t_0)]P^*_{ij}(k)\beta_s \int_{t_0}^{t} g_j(t')exp[(\nu - k_s)k^2(t'-t_0)]dt' \tag{10}$$

oraz

$$\frac{\delta \Psi}{\delta \beta} = \frac{\delta \Psi_0}{\delta v(k,t)} exp[-ik_kD_k(t) - k_l k^2(t-t_0)] \;\; ; \;\; \frac{\delta \Psi}{\delta \gamma} = \frac{\delta \Psi_0}{\delta \phi(k,t)} exp[-ik_jD_j(t) - k_s k^2(t-t_0)]\,. \tag{11}$$

Podstawiając wyrażenia (10) i (11) do równania (5) i porównując otrzymany rezultat z (9), widzimy, że funkcjonal (6) spełnia równanie (5). Zauważmy, że $\Psi[\alpha(k), \beta(k), \gamma(k) : t_0] = \Psi_0[\tau(k,t_0), v(k,t_0), \phi(k,t_0)]$, gdzie – odpowiednio – $\tau_i(k,t_0) = P^{*}_{ij}\alpha_j(k)$, $v(k,t_0) = \beta(k)$ i $\phi(k,t_0) = \gamma(k)$. Zatem funkcjonal (6) spełnia warunek początkowy (8), co kończy dowód.

3. ZAKOŃCZENIE

Zaprezentowany w pracy formalizm funkcjonalny zastosowany do opisu problemu turbulentnej konwekcji termohalinowej (w przestrzennym sformułowaniu), przy założeniu, że układ równań O-B może być linearyzowany w sensie Oseena, pozwolił na otrzymanie jawnych, statystycznych rozwiązań tych równań, tzn. twierdzenia o istnieniu rozwiązania. Zakres stosowalności przybliżenia Oseena do analizy problemów turbulentnego transportu w cieczach nie jest obecnie znany i wymaga osobnych rozważań (zob. także [8,9]). Wydaje się, że analizowany układ równań (1) odzwiecierdla pewne cechy rzeczywistej konwekcji termohalinowej (trójwymiarowość, niestacjonarność, uwzględnienie procesów nierównowagowych, itp.) i może być traktowany jako jej realistyczne przybliżenie. Otrzymane wyniki zawierają, jako przypadek szczególny, rozwiązania uzyskane w pracach [6,10].

LITERATURA

[1] Joseph D. D: Ustojcziwost' dwiżenij żidkosti. Moskwa: Mir, 1981. (tłum. z j. ang.).
[2] Icha A: Functional formalism for equations of Oberbeck-Boussinesq type of the developed thermohaline turbulence. "Oceanologia", Nr 20, 1985, ss.17-28.
[3] Icha A: Solution of thermohaline turbulent convection equations in the Oseen approximation. "Physica Scripta". Vol. 42, 1990, ss. 231-234.
[4] Viszik M. I., Fursikov A. W.: Matematiczeskije zadaczi statisticzeskoj gidromechaniki. Moskwa: Nauka, 1980.
[5] Monin A. S., Yaglom A. M.: Statistical fluid mechanics. Vol. I. Massachussets: MIT Press, 1971. (tłum. z j. ros.).
[6] Szafirski B.: A functional-analytic approach to turbulent convection. "Annales Polonici Mathematici", Vol. XXIII, 1970, ss.7-24.
[7] Rzewuski J.:Field theory. Vol. II. London: Iliffe Books, 1969.
[8] Icha A.: Solution of a turbulent heat conductivity equation in the Oseen's approximation. W.: Kasprzak W., Weron A. (eds.):Stochastic methods in experimental sciences. Singapore-New Jersey-London-Hong-Kong:World Scientific, 1990, s.188-199.
[9] Icha A.: An application of first integrals method in magnetic diffusion problem. "Journal of Mathematical Physics", vol. 33(3), 1992, ss. 1216-1220.

Recenzent: Prof. dr hab. inż Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The study of the influence of density stratification on turbulent transport processes in liquids is one of the most important problems of Geophysical Fluid Dynamics. It is well known that the appearance of even a weak stratification, significantly affects the turbulence dynamics in a fluid and leads to quantitative differences when compared to the turbulence in density homogeneous medium. The above is a consequence of two facts, namely: (1) the apportionment of vertical direction leads to an anisotropy in motions of all scales, and (2) the set of dimensional parameters occurring in the problem is enlarged with additional quantities such as $\alpha_t g$ and $\beta_s g$ (see eqs. (1)).

In classical hydrodynamics models, dealing with a two-component stratified fluid, the Oberbeck-Boussinesq approximation is commonly employed for the description of turbulent convection. As it is well known, this convection necessitates statistical description which lead to formulation of the problem in a language of characteristic functionals of the velocity, temperature and salinity fields. However, adequate functional equations for the general case of the turbulent thermohaline convection are extremely complex. It is well known that no general analytical technique for solving the functional equations in turbulence theory exists at present. In this paper we consider the functional formalism for simplified eqs. (1), with the assumption that the basic O-B equations can be linearized in the sense of Oseen. Under this assumption, it becomes possible to treat this problem rigorously and obtain an explicit solution of the functional differential equation (5) based on the linearized set of eqs. (1) (see theorem 1). The ideas of constructing simplified mathematical models in the theory of turbulence possesses great traditions; we recall in this place classical papers of Burgers and Hopf and more recent papers [3,6,8,9]. It seems that the analysed set (1) reflects some properties of the real thermohaline convection (three-dimensionality, nonstationarity, taking account of nonequilibrium processes, etc.), and can be treated as a realistic approximation of reality. Finally note that the problem presented here can be extended to a case when the fluid field velocity depends on x;this paper indicates a possible direction for such a work, which is physically most realistic, but needs separate investigations.