

Stefan JONIAK  
Instytut Mechaniki Stosowanej  
Politechnika Poznańska

## O PEWNYM PROBLEMIE STATECZNOŚCI PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ

Streszczenie. W pracy rozwiązano zagadnienie utraty stateczności cienkiej płyty pierścieniowej, obciążonej na brzegu wewnętrznym momentem obrotowym. Oparto się na teorii Levy-Misesa, dotyczącej materiału o modelu sztywno-plastycznym ze wzmocnieniem. Do rozwiązania równania wyoboczenia płyty zastosowano metodę ortogonalizacyjną. Ma ono postać związku między amplitudą maksymalnego ugięcia a czasem i obciążeniem.

## SOME PROBLEMS OF RING PLATE STABILITY

Summary. The paper deals with the solution of the instability problem concerning a thin plate loaded on the internal boundary by a rotational moment. The Levy - Mises theory of plastic flow of a rigid-plastic material with reinforcing has been using. The solution has been obtained with the help of the orthogonalisation method.

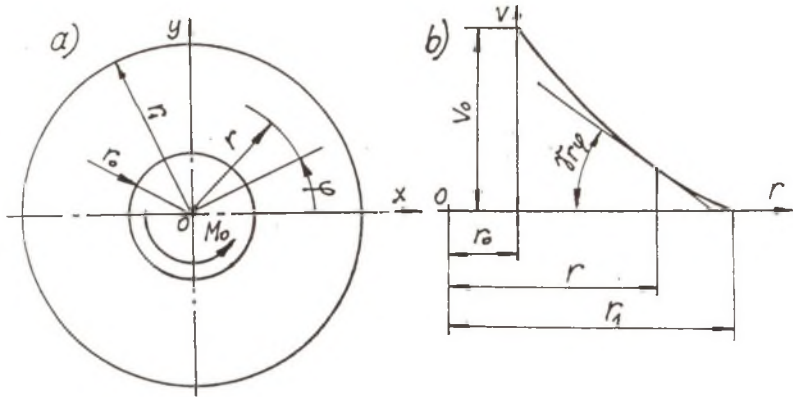
## ПРОБЛЕМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Резюме. В работе решена проблема потери устойчивости пластины, которой материал отвечает требованиям модели Леви - Мисеса пластического течения. Уравнение потери устойчивости решается методом Бубнова - Галеркина.

### 1. WSTĘP

Płyta jest sztywno zamocowana na brzegu zewnętrznym, natomiast brzeg wewnętrzny ma jedynie możliwość obrotu wokół punktu O (rys.1). Z takim przypadkiem płyty mamy do czynienia w jednej z prób wyznaczania zdolności do odkształceń plastycznych różnych metali, zwanej próbą Marciniaka. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano teorię

plastycznego płynięcia, opartą na prawie plastycznego płynięcia Levy-Misesa. Dotyczy to materiału o modelu sztywno-plastycznym ze wzmocnieniem liniowym. Zależności charakteryzujące taki materiał oraz równania wyoboczenia płyt przy obciążeniach dynamicznych można znaleźć w [1]. W pracy wykorzystane zostaną te równania po ich odpowiednich przekształceniach i przystosowaniu do warunków zadania.



Rys.1, Fig.1

## 2. PODSTAWOWE RÓWNANIA ZAGADNIENIA I ICH ROZWIĄZANIE

Płyta jest cienka i dlatego zakłada się istnienie w niej płaskiego stanu naprężenia. Jednym z parametrów opisujących zachowanie materiału płyty jest współczynnik skalarowy w stowarzyszonym prawie płynięcia, które przedstawia się następująco:

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = \lambda \tau_{xy}, \quad (1)$$

gdzie:  $\dot{\epsilon}_{xy}$  - prędkość odkształceń postaciowych.

Współczynnik skalarowy w prawie płynięcia ma postać:

$$\lambda = \frac{3v_i}{2\sigma_i}, \quad (2)$$

gdzie:  $v_i$  - intensywność prędkości odkształcenia,

$\sigma_i$  - intensywność naprężeń.

W przypadku rozpatrywanej płyty jest:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{r\phi} = \frac{M_0}{2\pi r^2 h} \quad h - \text{grubość płyty} \quad (3)$$

oraz

$$\dot{\epsilon}_z = 0, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = v_{xy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{r\phi},$$

przy czym  $r_0 \leq r \leq r_1$ .

Wprowadzenie zmiennej bezwymiarowej  $\rho = r/r_0$  daje:

$$\tau_{r\phi} = \frac{M_0}{2\pi r_0^2 h} \frac{1}{\rho^2} = \frac{\tau_0}{\rho^2}, \quad (4)$$

przy czym  $1 \leq \rho \leq k = r_1/r_0$ .

Intensywność naprężenia jest równa:

$$\sigma_i = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \tau_{r\phi}. \quad (5)$$

Intensywność prędkości odkształceń:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (v_x - v_y)^2 + (v_y - v_z)^2 + (v_z - v_x)^2 + \frac{3}{2} (v_{xy}^2 + v_{xz}^2 + v_{yz}^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4} \dot{\gamma}_{r\phi}. \end{aligned} \quad (6)$$

W [1] podane jest za Goodierem wyprowadzenie równania wybożenia płyty. Przy jego wyprowadzaniu założono małe przyrosty naprężeń, obejmujące krótki odcinek charakterystyki  $\sigma_i - \epsilon_i$  oraz brak odciążeń. W równaniu wybożenia D.89 w [1] pominięto człon bezwładnościowy, gdyż zagadnienie to jest zagadnieniem statycznym. Dla naszego przypadku po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych i zmiennej bezwymiarowej równanie ma postać:

$$\begin{aligned} &\frac{h^2}{6\lambda r_0^4} \left( \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \rho^4} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^4} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \rho \partial \phi^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \rho^2 \partial \phi^2} \right) + \frac{E_h h^2}{18r_0^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{6}{\rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{\rho^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^2 \partial \phi^2} \right) - 2 \frac{\tau_0}{\rho^2} \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \rho \partial \phi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \phi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:  $\hat{w} = w + w_0$  - ugięcie całkowite,  
 $w_0$  - ugięcie początkowe (imperfekcje),

$E_h$  - moduł wzmocnienia,

$\dot{w} = \partial w / \partial t$ ,

Na brzegach płyty muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$r = r_0 \quad i \quad r = r_1 \quad \dot{w} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

lub po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej

$$\rho = 1 \quad i \quad \rho = k \quad \dot{w} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} = 0 \quad (9)$$

Spełniają takie warunki funkcje  $w$  i  $w_0$  postaci:

$$w = A(t) (\rho - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{k} \rho \sin\left(\frac{\pi}{k} \rho + m \varphi\right), \quad (10)$$

$$w_0 = A_0 (\rho - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{k} \rho \sin\left(\frac{\pi}{k} \rho + m \varphi\right), \quad (11)$$

gdzie:  $A(t)$  - nieznana funkcja czasu,

$A_0$  - stała.

Równanie (7) rozwiązywano metodą Bubnowa-Galerkina. Wprowadzono więc w lewą stronę tego równania wyrażenia (10) i (11), a następnie ortogonalizowano je czynnikiem

$$(\rho - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{k} \rho \sin\left(\frac{\pi}{k} \rho + m \varphi\right) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

W wyniku ortogonalizacji otrzymano równanie:

$$H_1 \frac{1}{6\lambda} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \frac{dA}{dt} + H_2 \frac{E_h}{18} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 A + \tau_0 H_3 (A + A_0) = 0 \quad (12)$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu amplitudy funkcji ugięcia  $w$ . Można je rozwiązać metodą rozdzielu zmiennych. Przedtem jednak należy ustalić parametr  $\lambda$ . W tym celu przyjęto funkcję przemieszczeń obwodowych w postaci:

$$v = \frac{v_0 r_0}{r_1 - r_0} \left(\frac{r_1}{r} - 1\right) \quad (\text{patrz rys. 1b})$$

Ostatnia zależność jest potrzebna do wyznaczenia kąta odkształcenia postaciowego  $\gamma_{r\varphi}$ . Zgodnie z rysunkiem 1b

$$\text{tg } \gamma_{r\varphi} = \frac{dv}{dr} = -v_0 \frac{r_1 - r_0}{r_1 r_0} r^{-2} \quad \text{lub po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej } \rho$$

$$\text{tg } \gamma_{r\varphi} = -\frac{v_0 k}{r_0 (k-1)} \rho^{-2}, \quad \text{a stąd}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \text{arc tg} \left( -\frac{v_0 k}{r_0 (k-1)} \frac{1}{\rho^2} \right) = \text{arc tg } x. \quad (13)$$

Kąt odkształcenia postaciowego jest funkcją czasu. W wyrażeniu (13) od czasu zależy tylko  $v_0$ . Przyjmując, że  $v_0 = ct$ , otrzymujemy:

$$\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{1+x^2} \left( -\omega_0 \frac{k}{k-1} \rho^{-2} \right) = -\omega_0 \frac{k}{k-1} \rho^{-2}, \quad (14)$$

gdzie:  $\omega_0 = c/r_0$  - prędkość kątowa obrotu brzegu wewnętrznego względem punktu O. W mianowniku wyrażenia (14) jest  $x^2 \ll 1$ .

Mając  $\gamma_{r\varphi}$  wyznaczamy intensywność prędkości odkształcenia

$$v_i = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\partial \dot{\gamma}_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_0 k}{k-1} \rho^{-2}. \quad (15)$$

Do wyznaczenia  $\lambda$  należy wykorzystać jeszcze intensywność naprężeń  $\sigma_i = \sqrt{3} \tau_{r\varphi}$  i wtedy

$$\lambda = \frac{3k\omega_0}{8\tau_0(k-1)}. \quad (16)$$

Po uwzględnieniu  $\lambda$  równanie (12) przyjmie postać:

$$C_1 \tau^* \frac{dA}{dt_0} + C_2 A + C_3 \tau^* (A + A_0) = 0, \quad (17)$$

gdzie:  $\tau^* = \tau_0 \sigma_p^{-1}$ ,  $t_0 = \omega_0 t$

$C_i$  - stałe zależne od  $m$  i właściwości materiału płyty.

Wykorzystanie warunku początkowego  $t_0 = 0$ ,  $A = A_0$  daje następującą całkę równania (17):

$$A = A_0 \left[ \frac{a + 2\tau^* \exp\left(-\frac{a + \tau^*}{b\tau^*} t_0\right) - \frac{\tau^*}{a + \tau^*}}{a + \tau^*} \right], \quad (18)$$

gdzie:  $a, b$  - stałe.

W równaniu powyższym znajduje się parametr czasu  $t_0 = 0$ , który wymaga osobnego określenia. Ze względu na zmienność naprężeń  $\tau_{r\varphi}$  wzdłuż promienia płyty również intensywność naprężeń  $\sigma_i$  jest zmienna. Mamy więc  $\sigma_i = \sqrt{3} \tau_0 \rho^{-2}$  oraz z drugiej strony charakterystykę materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym  $\sigma_i = \sigma_0 + E_1 \epsilon_i$ . Warunkiem uplastycznienia jest osiągnięcie przez intensywność naprężeń w płycie intensywności wynikającej z charakterystyki materiału. Dzięki temu mamy:

$$\epsilon_i = \frac{1}{E_h} (\sqrt{3} \tau_0 \rho^{-2} - \sigma_p) \quad (19)$$

Ta sama intensywność wynosi z drugiej strony

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{r\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{k}{k-1} t_0 \rho^{-2} \right). \quad (20)$$

Z porównania wyrażeń (19) i (20) otrzymujemy:

$$t_0 = -\frac{k-1}{k} \rho^{-2} \operatorname{tg} \left[ \sigma_p \frac{2}{E_h} \left( \tau^* \rho^{-2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (21)$$

W ostatnim wzorze należy wstawić  $\rho = k$ , gdyż jest to warunkiem uplastycznienia całej płyty i w takiej postaci wprowadzić  $t_0$  do amplitudy maksymalnego ugięcia płyty w funkcji parametru obciążenia brzegu wewnętrznego  $\tau$ . Należy w tym celu przyjąć wymiary płyty oraz dane materiałowe.

Na podstawie następujących danych:  $r_0 = 21$  mm,  $h/r_0 = 0.03$  oraz charakterystyki materiału  $\sigma_i = 300 + 1680 \epsilon_i$ , dla różnych wartości  $k$  przeprowadzono obliczenia pozwalające ustalić krytyczną liczbę  $m$  fal wyboczenia w kierunku obwodu płyty oraz wyznaczyć w sposób wykreślony odpowiadającą danej amplitudzie ugięcia wartość parametru  $\tau$ .

## LITERATURA

- [1] Gryboś R.: Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym. Warszawa - Poznań: WNT, 1980.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Świtoński  
Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

**Abstract**

The problem of the plastic instability of a ring plate (Fig.1) was considered within the Levy-Mises plastic flow theory. The basic equation (7) was solved with the help of the orthogonalization method using exact forms of the deflection (10) and imperfection (11) functions. These functions have to satisfy the boundary conditions (9). The parameter  $\lambda$  in (7) which comes from the associated plastic flow rule must be determined. It may be done using particular form of the circumferential displacement function and determination of the shear strain (13) as well as determination of the stress intensity. As a result of the solution of (7) we obtain the equation (17). The integral of latter one gives the deflection amplitude as a function of the internal loading.