

Zbigniew ORŁOŚ, Kazimierz TOMASZEWSKI  
Katedra Mechaniki Teoretycznej i Wytrzymałości Materiałów  
Wojskowa Akademia Techniczna w Warszawie

### NIKTÓRE PROBLEMY MODELOWANIA NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono podstawy metody modelowania naprężeń cieplnych, doświadczalne badanie odkształceń cieplnych oraz zastosowanie metody elementów skończonych. Podano wyniki badań naprężeń cieplnych w obszarze połączenia dwóch rur wykonanych z różnych materiałów.

### SOME PROBLEMS OF MODELING THERMAL STRESSES

Summary. Some remarks on the methods of modeling of thermal stresses, experimental thermal strains investigation and the application of finite element method have been presented. The results of investigation of thermal stresses in the vicinity of the junction between two tubes made of two dissimilar materials have been described.

### НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Резюме. В статье представлены некоторые проблемы моделирования температурных напряжений, экспериментальных измерений температурных деформаций и применения метода конечных элементов. Представлены результаты исследований температурных напряжений в случае соединения цилиндров изготовленных из разных материалов.

### 1. WSTĘP

Wyznaczanie naprężeń cieplnych ma ważne znaczenie techniczne w ocenie wytrzymałości elementów konstrukcyjnych maszyn i różnych urządzeń energetycznych (kotły, turbiny parowe i gazowe, rurociągi, elementy siłowni jądrowych). W modelowaniu wymienionych stanów

naprężenia można wyróżnić metody doświadczalne i metody teoretyczne. W pierwszej grupie metod znajdują zastosowanie metody pomiarów optycznych ze szczególnym uwypukleniem termoelastoptyki oraz interferometrii holograficznej. W tej dziedzinie badań na uwagę zasługuje metoda pomiarów odkształceń cieplnych oparta na zastosowaniu tensometrii elektrozestancyjnej.

W badaniach teoretycznych naprężeń cieplnych wykorzystuje się obecnie w szerokim zakresie metodę elementów skończonych. W kompleksowo ujętych badaniach tych naprężeń należy zalecić równoległe stosowanie metod doświadczalnych oraz adekwatnych schematów modeli teoretycznych przy uwzględnieniu kryteriów podobieństwa modelowego.

W analizie pomiarowej odpowiednich pól temperatury podstawową rolę odgrywają kryteria wyrażone liczbami podobieństwa Biota  $Bi$  i Fouriera  $Fo$  określonymi wzorami

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (1)$$

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{l^2}, \quad (2)$$

gdzie:  $l$  - charakterystyczny rozmiar liniowy modelu,

$\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła,

$\alpha$  - współczynnik przejmowania ciepła,

$\alpha$  - współczynnik wyrównywania temperatury,

$\tau$  - czas.

## 2. WARUNKI BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

W badaniach doświadczalnych naprężeń cieplnych pomiary prowadzone są na modelach geometrycznie podobnych do obiektu rzeczywistego. Często model wykonuje się z tworzywa sztucznego, np. żywicy epoksydowej. Wynika to z korzystnego faktu możliwości zmniejszenia prędkości zmian temperatury w modelu w porównaniu z prędkością tych zmian zachodzących w obiekcie rzeczywistym w przypadku, gdy obiekt ten jest wykonany z materiału o dużym współczynniku przewodzenia ciepła w porównaniu ze współczynnikiem przewodzenia ciepła tworzywa epoksydowego. Uzasadnia to postać wzoru (2).

W badaniach niestacjonarnych stanów konieczne jest prowadzenie równoczesnych pomiarów temperatury w możliwie dużej liczbie punktów za pomocą miniaturowych termoelementów (przeważnie miedź - konstantan) oraz, co jest oczywiste, stosowanie automatycznej rejestracji wyników przy wykorzystaniu komputerów. Pomiary odkształceń prowadzi się za pomocą tensometrów o małych bazach pomiarowych w stosunku do promieni krzywizn występujących w modelu karbów i w zależności od charakteru rozkładów temperatury w danej chwili czasowej w badanym obszarze modelu. W badaniu stanów niestacjonarnych niezbędne jest wykonywanie prób wzorcujących dla poszczególnych tensometrów naklejonych na modelu, przy różnych ustalonych wartościach temperatury w przyjętym przedziale temperatury badań modelowych. Próby wzorcujące potrzebne są do określenia wartości rzeczywistego odkształcenia w danym punkcie modelu i wyznaczonej tam temperaturze. W omawianym przypadku wymagana jest również automatyczna rejestracja wyników pomiarów odkształceń. Do obliczenia wartości naprężeń cieplnych na podstawie wyznaczonych odkształceń należy znać charakterystyki własności mechanicznych materiałów modelowych, określone w wyniku odpowiednich badań laboratoryjnych prowadzonych w różnych temperaturach. W przypadku możliwości przyjęcia upraszczającego założenia, że rozpatrywany obiekt jest wykonany z jednorodnego izotropowego materiału podlegającego prawu Hooke'a do określenia składowych stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$  na podstawie znanych składowych małych odkształceń wykorzystuje się zależności:

$$\sigma_{ij} = 2G \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\beta(T - T_0)] \delta_{ij} \right\}, \quad (3)$$

gdzie:  $G$  - moduł sprężystości poprzecznej,

$\nu$  - współczynnik Poissona,

$\beta$  - współczynnik rozszerzalności liniowej,

$\varepsilon_{ij}$  - składowe stanu odkształcenia,

$e = \varepsilon_{kk}$

$T$  - temperatura,

$T_0$  - temperatura początkowa,

$\delta_{ij}$  - symbol Kroneckera.

Dla ciał anizotropowych, niejednorodnych oraz wykazujących odkształcenia o charakterze reologicznym problemy badań naprężeń cieplnych są bardziej złożone. Często też problemy te prowadzą do zagadnienia naprężeń własnych, które występują po wyrównaniu temperatury wewnątrz rozpatrywanego ciała.

Istotnym problemem w badaniach modelowych jest określenie współczynnika przejmowania ciepła. W celu wyznaczenia tego współczynnika można wykorzystywać wyniki pomiarów rozkładów temperatury w modelu wzdłuż normalnej do powierzchni granicznej, przez którą następuje wymiana ciepła. Należy jednak zauważyć, że jest to problem skomplikowany, w szczególności gdy współczynnik ten zmienia się w czasie i zależy od położenia punktu na powierzchni modelu. W prostszych przypadkach do wyznaczenia współczynnika przejmowania ciepła korzysta się z odpowiednich wzorów empirycznych.

### 3. BADANIA TEORETYCZNE

W analizie naprężeń cieplnych wykorzystuje się obecnie głównie metodę elementów skończonych. W praktycznych zastosowaniach tej metody należy zwrócić uwagę na następujące problemy: dobór rodzaju i wielkości oczek siatki elementów skończonych, określenie warunków brzegowych i początkowych, określenie kroku czasowego. Ze względu na to, że wynik obliczeń zależy od rozmiarów oczek siatki dla lepszej oceny dokładności wyników w miejscach spodziewanych spiętrzeń naprężeń wskazane jest prowadzenie obliczeń przy kilku różnych rozmiarach tych oczek.

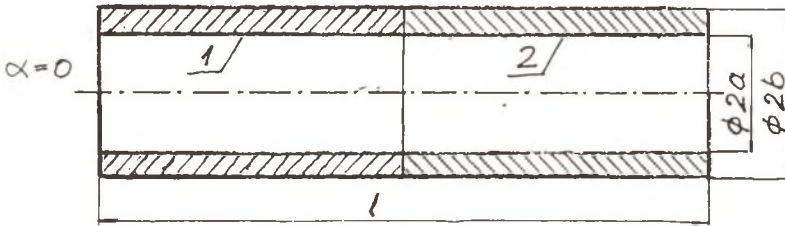
### 4. PRZYKŁAD BADANIA NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

Przykładem ilustrującym problematykę analizy naprężeń cieplnych mogą być badania naprężeń cieplnych w połączeniu dwóch rur wykonanych z materiałów o różniących się własnościach fizykalnych. Na rys. 1 przedstawiono schematycznie przekrój osiowy modelu złożonego z części 1, wykonanej z kompozycji epoksydowej typu Araldit i części 2 z kompozycji epoksydowej typu Epidian. W tablicy 1 zestawiono stosunki odpowiadających sobie charakterystyk własności fizykalnych. Części 1 i 2 oznaczone odpowiednio wskaźnikami 1 i 2

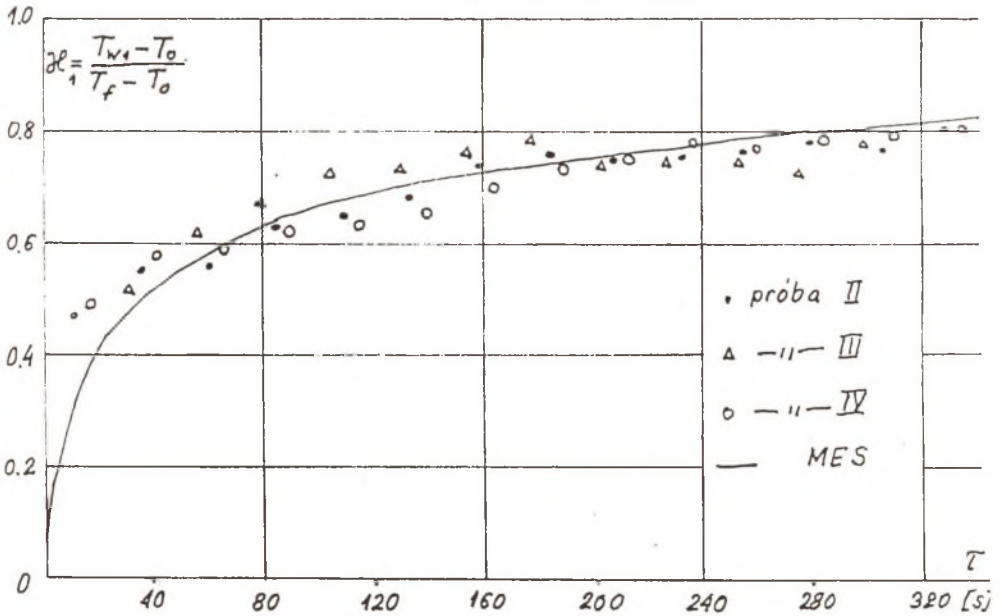
Tablica 1  
Stosunki własności mechanicznych i ciepłych materiałów 1 i 2

| $\frac{E_1}{E_2}$ | $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ | $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ | $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ | $\frac{c_{p1}}{c_{p2}}$ | $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ |
|-------------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 1.564             | 0.872                 | 1.00                    | 0.654                     | 0.838                   | 1.194                         |

$\alpha = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$



Rys. 1. Schemat przekroju osiowego modelu  
a=31.45mm, b=42.35mm, l=330mm  
Fig. 1. The geometry of the axial section of the model  
a=31.45mm, b=42.35mm, l=330mm



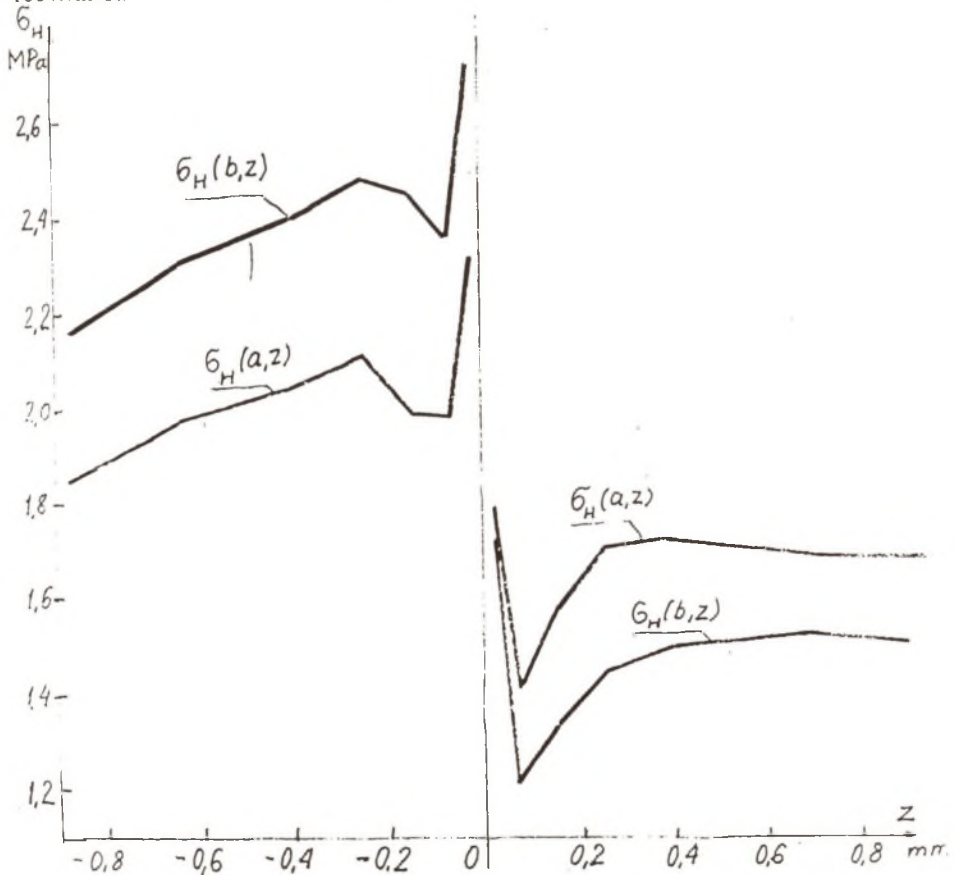
Rys.2. Zależność parametru  $\kappa_1$  od czasu  $\tau$   
Fig. 2. Variation of the parameter  $\kappa_1$  with time  $\tau$

Na obu częściach modelu były umieszczone termoelementy i tensometry. Model był obciążony cieplnie na zewnętrznej cylindrycznej ścianie przepływem oleju parafinowego o temperaturze  $T_f = 50^\circ\text{C}$ . W badaniach przebiegów niestacjonarnych wyznaczano zależne od czasu  $\tau$  temperatury różnych punktów modelu. Na rysunku 2 przedstawiono dla ustalonego punktu ścianki zewnętrznej modelu zmianę temperatury  $T_{w1}$  w tym punkcie, określoną współczynnikiem  $\kappa_1$  w postaci czasu  $\tau$

$$\kappa_1 = \frac{T_{w1} - T_0}{T_f - T_0}, \quad (4)$$

gdzie  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  - temperatura początkowa modelu.

Na wymienionym rysunku linią ciągłą przedstawiono wykres współczynnika  $\kappa_1$  uzyskany na podstawie obliczeń MES przy uprzednio określonym współczynniku przejmowania ciepła  $\alpha = 100\text{W/m}^2\text{K}$ .



Rys. 3. Rozkłady naprężenia zastępczego  $\sigma_H$  na zewnętrznej i wewnętrznej ścianie modelu połączenia rur

Fig. 3. Distributions of the effective stress  $\sigma_H$  at outer and inner surfaces of the model close to the junction of the tubes

Badania stanów naprężeń cieplnych wykazały nagłe zmiany wartości naprężeń w pobliżu przekroju połączenia rur 1 i 2. Przy ustalonej równomiernej zmianie temperatury o przyroście  $\Delta T=30\text{K}$  od temperatury początkowej  $T_0$  przedstawiono na rys. 3 uzyskane na podstawie obliczeń MES wykresy  $\sigma_{ii}$  według hipotezy Hubera wyznaczone na powierzchniach zewnętrznej i wewnętrznej modelu w pobliżu przekroju połączenia. Z rysunku 3 widać, że w pobliżu tego miejsca wymienione naprężenia osiągają znaczne wartości przy równoczesnym lokalnym zmniejszeniu ich wartości w bliskim sąsiedztwie miejsca spiętrzenia naprężeń.

Przytoczony przykład i inne wykonane przez autorów badania wskazują na celowość prowadzenia kompleksowej analizy naprężeń cieplnych przy wykorzystaniu metod doświadczalnych opartych na modelach fizycznych i metod obliczeń numerycznych ze szczególnym zastosowaniem MES. Zestawienie wyników uzyskanych eksperymentalnie z wynikami obliczeniowymi prowadzi w konsekwencji do doskonalenia omawianych sposobów badań modelowych naprężeń cieplnych.

## LITERATURA

- [ 1 ] Naprężenia cieplne. Praca zb. pod. red. Z. Orłosa. PWN, Warszawa 1991
- [ 2 ] Merend A., Slot T.: Stress Analysis of thick-walled Tube with Step Change in Thermal Expansion. *Experimental Mechanics*, March 1972, ss. 136-141.
- [ 3 ] Orłoś Z., Tomaszewski K.: Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych metodą tensometrii elektrozrezystancyjnej. *Mech. Teoret. i Stos.*, 4, 16(1978), ss. 467-481.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Jakubowicz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993r.

## Abstract

In this paper some remarks on the experimental and theoretical modeling of thermal strains and stresses have been considered. The modeling of the temperature distribution is based on the Biot number ( 1 ) and the Fourier modulus ( 2 ). It is assumed that the Biot number is kept constant over the duration of the test. Making use of Hooke's law, the thermal stresses may be determined from the stress-strain relation ( 3 ). To set an example of thermal stress problem some results of the investigation of these stresses that appear around the contact bonding of two circular cylinders made of dissimilar epoxy resins have been presented. Table 1 shows the ratios of the mechanical and thermal properties of these resins. The symbols in the Table 1 denote the following properties: E- modulus of elasticity,  $\nu$ - Poisson's ratio,  $\rho$  - specific gravity,  $\beta$  - coefficient of linear expansion,  $c_p$  - specific heat,  $\lambda$  - thermal conductivity.

The subscripts 1 and 2 denote the properties epoxy resin 1 and epoxy resin 2 correspondingly. The geometry of the axial section of the model made of two dissimilar resins 1 and 2 is shown in Fig. 1.



The external cylindrical surface of the model was suddenly heated by dropping into the testing tank containing hot paraffin oil circulated continuously. The temperature in selected points of the model was monitored with the aid of fine copper - constantan thermocouples. Fig. 2 shows the time variability of the dimensionless parameter  $\kappa_1$  defined by expression ( 4 ). The thermal stresses for constant increment of the temperature  $\Delta T=30K$  were determined using finite element. Distributions of the effective stress at outer and inner surfaces of the model close to the plane of the junction of the cylinders 1 and 2 are shown in Fig. 3.