

Krzysztof ARCZEWSKI  
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej  
Politechnika Warszawska

### ZASTOSOWANIE GRAFÓW W ANALIZIE KINEMATYCZNEJ UKŁADÓW WIELOCZŁONOWYCH

**Streszczenie.** Wyprowadzono wzory na bezwzględne prędkości kątowe dla ciał układu wieloczłonowego. Istotą tych wzorów jest jawna zależność tych prędkości od nośników informacji o strukturze topologicznej układu i strukturze pomiarowej wprowadzonej w układzie.

### AN APPLICATION OF GRAPHS IN KINEMATICS OF MULTIBODY SYSTEMS

**Summary.** The formulae for absolute angular velocities of bodies of a multibody system have been derived. The essence of the formulae is their evident relationship on the system structure and on the measurement structure which has been introduced within a system.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФОВ В КИНЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МНОГОЧЛЕННЫХ СИСТЕМ

**Резюме.** В работе выведены формулы для определения абсолютной скорости тел которые являются частью открытой кинематической цепи. Особенностью этих формул является зависимость от носчиков информации о топологической структуре системы и измерительной структуре заданной в системе.

## 1. WSTĘP

Dwie podstawowe charakterystyki kinematyczne ciała sztywnego, umożliwiające wyznaczenie jego energii kinetycznej, to prędkość bezwzględna wybranego punktu tego ciała i bezwzględna prędkość kąтова ciała. Dla ciała wchodzącego w skład pewnego łańcucha kinematycznego, charakterystyki te zależą od struktury układu i sposobu odmierzenia współrzędnych uogólnionych rozważanego ciała i jego nośników, tzn. ciał poprzedzających rozważane ciało w łańcuchu kinematycznym. O ile własności strukturalne analizowanego układu, jak liczba ciał, ich wzajemne połączenia (czyli tzw. **struktura topologiczna układu**)

są z góry dane, o tyle sposób wprowadzenia współrzędnych uogólnionych (czyli tzw. struktura pomiarowa) zależy od nas.

W celu potwierdzenia powyższych spostrzeżeń rozważmy prosty przykład układu wielocłonowego (UW). Niech ciało  $j$  będzie nosicielem bezpośrednim ciała  $j$  (por. na rys.1, nosicielem bezpośrednim ciał 2 i 3 jest ciało 1, tzn.  $2 \sim 1$  oraz  $3 \sim 1$ ). Prędkość bezwzględna  $v_j$  wybranego punktu  $P_j$  należącego do ciała  $j$  może być wyrażona wzorem:

$$v_j = v_{j-} + \Omega_{j-} \times r_j + w_j, \quad (1)$$

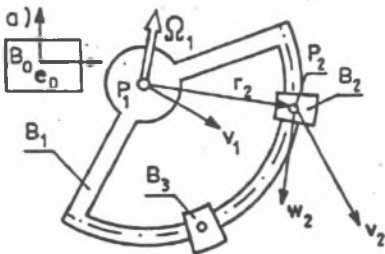
gdzie  $v_{j-}$  i  $\Omega_{j-}$  to absolutne prędkości, odpowiednio, liniowa punktu  $P_j$  i kątowa ciała  $j$ -, zaś  $w_j$  jest prędkością względną punktu  $P_j$  mierzona w ruchomej bazie  $e_{j-}$ .

Już ze wzoru (1) widać, że prędkość  $v_j$  zależy od struktury topologicznej układu (gdyż  $v_j$  zależy od  $v_{j-}$  i  $\Omega_{j-}$  swego nosiciela bezpośredniego), jak również od struktury pomiarowej wprowadzonej arbitralną decyzją badacza.

W zagadnieniach dynamiki, w szczególności przy wyznaczaniu energii kinetycznej układu, potrzebne są zarówno bezwzględne prędkości kątowe  $\Omega_j$  ciał, jak i bezwzględne prędkości liniowe  $v_j$  wybranych punktów ciała, a więc jak wynika z (1), potrzebne są bezwzględne prędkości kątowe  $\Omega_{j-}$  nosicieli bezpośrednich ciała  $j$ .

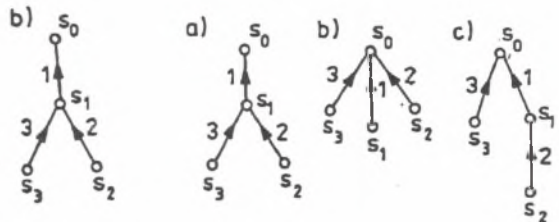
Celem tego artykułu jest ujawnienie owej podwójnej zależności charakterystyk kinematycznych od obu struktur. Sprawę tę prześledzimy na przykładzie prędkości kątowej ciał tworzących otwarty łańcuch kinematyczny. Mając wszakże na uwadze zastosowanie otrzymanych zależności do wyznaczania energii kinetycznej układu, policzymy nie tylko prędkości  $\Omega_{j-}$ , ale także prędkości  $\Omega_{j-}$ .

## 2. GRAF UKŁADU, GRAF POMIAROWY I ICH REPREZENTACJE ALGEBRAICZNE



Rys.1. Układ czterech ciał i graf  $G$  struktury topologicznej tego układu

Fig.1. A four body system and its tree-structure system graph  $G$



Rys.2. Trzy różne grafy pomiarowe  $G_w$

Fig.2. Three different measurement graphs  $G_w$

Strukturę topologiczną układu wraz z arbitralnie wprowadzonymi połączeniami fikcyjnymi dogodnie jest przedstawić za pomocą grafu  $G$ , którego:

- (i) wierzchołki  $s_0, s_1, \dots, s_n$  reprezentują odpowiednio ciało odniesienia  $B_0$  i kolejne ciała układu, tzn. wierzchołek  $s_j$  reprezentuje ciało  $B_j$ ,
- (ii) krawędzie reprezentują wszystkie połączenia (tj. rzeczywiste i fikcyjne) układu, tzn. między wierzchołkami  $s_i$  oraz  $s_j$  występuje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy między ciałami  $B_i$  oraz  $B_j$  występuje połączenie.

Przyjmujemy, że zarówno ciała układu jak i sam graf  $G$  są regularnie zaetykietowane zgodnie ze schematem przedstawionym w [1]. Zakładamy ponadto, że wprowadzono regularną orientację krawędzi grafu (por. [2]). Na rys.1a przedstawiony jest układ złożony z czterech ciał, a na rys.1b graf reprezentujący strukturę topologiczną tegoż układu.

Przystępując do zdefiniowania grafu pomiarowego zauważmy na wstępie, że położenie katowe dowolnego ciała należącego do łańcucha kinematycznego względem układu inercjalnego (czyli w bazie  $e_0$ ) jest znane, jeśli (i) znane jest położenie jednego ciała układu w bazie  $e_0$  oraz (ii) określone są jednoznacznie względne położenia pozostałych ciał układu. Wynika stąd, że układ współrzędnych uogólnionych określających położenie katowe musi zawierać przynajmniej jedną współrzędną odmierzaną w bazie  $e_0$ . Inne współrzędne mogą być określane zarówno w bazie  $e_0$ , jak i w bazach lokalnych  $e_j$ .

Wiemy też, że położenie katowe ciało układu może być definiowane różnymi sposobami. Rozważmy dwie możliwości: (i) położenie katowe  $j$ -tego ciała jest definiowane względem nosiciela bezpośredniego  $j$ -, tzn. w bazie lokalnej  $e_j$ , (ii) położenie katowe  $j$ -tego ciała jest definiowane względem ciała odniesienia  $B_0$ , tzn. w bazie lokalnej  $e_0$ .

Sposób odmierzania współrzędnych katowych ciał układu może być reprezentowany za pomocą grafu  $G_m$  zdefiniowanego następująco:

- 1) wierzchołki  $s_0, s_1, \dots, s_n$  reprezentują odpowiednio ciała odniesienia i kolejne ciała układu, tzn. wierzchołek  $s_j$  reprezentuje  $j$ -te ciało,
- 2) łuki grafu  $G_m$  reprezentują pomiar współrzędnych katowych ciał układu, tzn. między wierzchołkami  $s_i, s_j$  istnieje łuk skierowany do  $s_j$ , jeśli położenie katowe ciała  $s_j$  mierzone jest w bazie  $e_i$ .

Wobec tego, że wierzchołki grafu  $G_m$  reprezentują ciała układu identycznie jak wierzchołki grafu  $G$ , więc wierzchołki o tych samych etykietach w  $G$  i  $G_m$  reprezentują to samo ciało. Ponadto przyjmować będziemy, że łuk wychodzący z wierzchołka  $s_i$  ma etykietę  $a_j$ .

Na rys.2 przedstawione są trzy różne grafy  $G_m$  dla układu z rys.1a. Graf z rys.2a reprezentuje sytuację, gdy położenia katowe każdego z ciał mierzone są w bazie nosiciela bezpośredniego i wtedy  $G_m = G$ . Graf z rys.2b reprezentuje sytuację, gdy konfiguracja katowa każdego ciała układu mierzona jest w bazie ciała odniesienia  $e_0$ . Graf z rys.2c przedstawia sytuację, gdy część współrzędnych katowych określających pozycję ciał mierzona jest w bazie  $e_0$ , zaś część w bazach nosicieli bezpośrednich.

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać trzy reprezentacje algebraiczne grafów, mianowicie macierze  $S_-$  i  $\hat{S}_-$ , które tworzymy na podstawie macierzy incydencji  $S$  grafu  $G$  oraz macierz ścieżek  $P_m$  grafu  $G_m$ . Pominiemy definicje macierzy  $S$  i  $P_m$ , są one bowiem powszechnie znane (zob. np. [1]). Skoncentrujemy się natomiast na zdefiniowaniu macierzy  $S_-$  i  $\hat{S}_-$ .

Macierz incydencji  $\hat{S}$  grafu  $G$  o  $n+1$  wierzchołkach ma postać  $\hat{S} = [S_0^T, S^T]^T$ , gdzie  $S_0 = [S_{01}, \dots, S_{0n}]$  jest wierszową macierzą reprezentującą wierzchołek odniesienia, zaś  $S$  jest zredukowaną macierzą incydencji o wymiarach  $n \times n$ .

Macierze  $\hat{S}$  oraz  $S$  możemy również przedstawić w postaci różnic

$$\hat{S} = \hat{S}_+ - \hat{S}_-, \quad S = S_+ - S_-, \quad (2)$$

gdzie macierz  $\hat{S}_+$  tworzymy z macierzy  $\hat{S}$  przez usunięcie wyrazów ujemnych, zaś macierz  $\hat{S}_-$  tworzymy z macierzy  $\hat{S}$  przez usunięcie wyrazów dodatnich i zmianę znaku wyrazów ujemnych na dodatni. W analogiczny sposób macierze  $S_+$  i  $S_-$  tworzymy z macierzy  $S$ .

### 3. PRĘDKOŚCI KĄTOWE CIAŁ UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO

Wprowadzone powyżej dwa rodzaje grafów i ich reprezentacje macierzowe wykorzystamy przy wyprowadzaniu wzoru na bezwzględne prędkości kątowe ciał tworzących otwarty łańcuch kinematyczny.

Oznaczmy symbolami:  $\omega_j$  - prędkość kątową  $j$ -tego ciała względem jego bazy pomiarowej,  $\Omega_j$  - bezwzględną prędkość kątową  $j$ -tego ciała,  $\Omega_{j-}$  - bezwzględną prędkość kątową nosiciela bezpośredniego ciała  $j$ -tego. Wprowadźmy też macierze kolumnowe:  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ ,  $\Omega = [\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n]^T$ ,  $\hat{\Omega} = [\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n]^T$  oraz  $\Omega_- = [\Omega_{1-}, \Omega_{2-}, \dots, \Omega_{n-}]^T$ . Między macierzami  $\Omega$  i  $\omega$  zachodzi prosty związek

$$\Omega = \omega_0 \mathbf{1}_n + P_\omega^T \omega, \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$  jest macierzą kolumnową złożoną z  $n$  jedynek. Wobec tego, że  $\Omega_0 = \omega_0$ , macierz  $\hat{\Omega}$  można zapisać jako

$$\hat{\Omega} = \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ \dots \dots \dots \\ \omega_0 \mathbf{1}_n + P_\omega^T \omega \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Z kolei macierz kolumnową  $\Omega_-$  otrzymujemy w wyniku mnożenia

$$\Omega_- = \hat{S}^T \hat{\Omega} \quad (5)$$

Biorąc pod uwagę (4) i budowę macierzy  $\hat{S}^T = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & S^T \end{bmatrix}$ , macierz  $\Omega_-$  może być wyrażona następująco:

$$\Omega_- = \omega_0 \mathbf{1}_n + S^T P_\omega^T \omega \quad (6)$$

Jeśli ciało odniesienia pozostaje nieruchome, wówczas  $\omega_0 = 0$  i wzór (6) przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$\Omega_{\omega} = S_{\omega}^T P_{\omega}^T \omega \quad (7)$$

#### 4. WNIOSEK

Ostatnie dwa wzory (6) i (7) potwierdzają powszechną, choć może nie dość dostatecznie wykorzystywaną przy modelowaniu układów wieloczłonowych teorię, że charakterystyki kinematyczne zależą zarówno od struktury topologicznej układu (macierz  $S_{\omega}$ ), jak i struktury pomiarowej wprowadzonej arbitralnie na użytek stworzenia modelu (macierze  $P_{\omega}$  i  $\omega$ ).

#### LITERATURA

- [1] Wittenburg J.: Dynamics of systems of rigid bodies. B.G. Teubner, Stuttgart 1977
- [2] Arczewski K.: Applications of graph theory to the determination of kinetic energy of rigid body system. Journal of Franklin Institute, v.324, 1987, pp. 351-367

Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr 504/864/4.

Recenzent: prof. dr hab. inż. A. Buchacz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.