

Krzysztof P. ARCZEWSKI, Wiesław J.J. MICHALSKI, Józef A. PIETRUCHA
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

MODELOWANIE RACJONALNE MATERIAŁÓW ADAPTACYJNYCH

Streszczenie. Przedstawiono metodę racjonalnego wyprowadzania praw konstytutywnych (PK) materiałów adaptacyjnych (MA). Wykorzystano podejście Colemana i Nolla, w którym kluczową rolę odgrywa nierówność Clausiusa-Duhema. Metodę zastosowano do wyprowadzania PK materiału sprężystego z efektami termo piezo elektrycznymi.

RATIONAL MODELLING OF ADAPTIVE MATERIALS

Summary. A rational method of constitutive laws derivation for adaptive materials is presented. It adopts the Coleman and Noll approach along with a crucial use of the Clausius-Duhem inequality. The method is applied to the derivation of constitutive laws for an elastic material with thermo-piezo-electric effects.

РАЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Резюме. Выведено рациональным методом определяющие соотношения адаптивных материалов. Этот метод использует подход Колемана и Нолла вместе с решительным неравенством Клаузиуса-Дюгема. Выведено определяющие соотношения упругого материала с термопъезоэлектрическими эффектами.

1. WSTĘP

Od wielu lat do poprawiania charakterystyk dynamicznych statków powietrznych, a w szczególności do zapobiegania stanom krytycznym, takim jak flatter lub przeciągnięcie, stosowana jest technika sterowania czynnego. Standardowym rozwiązaniem tej techniki jest przyjęcie liniowej zależności wektora sterowania u od wektora stanu x

$$u = Fx, \quad (1)$$

gdzie macierz sprzężenia zwrotnego F jest wyznaczana różnymi sposobami - na przykład w zagadnieniu liniowo-kwadratowym [2]. Zauważmy, że za pomocą odpowiedniego doboru macierzy F możemy wpływać na stan (dynamikę) statku powietrznego opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu = Lx, \quad L = A + BF, \quad (2)$$

gdzie A i B są macierzami, odpowiednio, stanu i sterowania.

Prawo sterowania (1) było dotąd realizowane za pomocą powierzchni sterownych (tradycyjnych lub dodatkowych) - zmiennymi sterującymi były wychylenia tych powierzchni. Okazało się jednak, że dla samolotów bojowych o podwyższonej manewrowości (tzw. zwinnych), które operują na dużych kątach natarcia, powierzchnie sterowe są mało efektywne.

Z chwilą pojawienia się nowych materiałów, zwanych inteligentnymi lub adaptacyjnymi, powstała nowa możliwość realizacji prawa sterowania. Z materiałami tymi wiąże się duże nadzieje nie tylko zresztą w lotnictwie. Świadectwem roli nowych materiałów są takie fakty: (1) zaczęły wychodzić nowe czasopisma: *Jornal of Intelligent Materials, Systems and Structures*, *Journal of Intelligent Materials* (w.j. japońskim); (2) powstały nowe ośrodki badawcze, np. *Center for Intelligent System & Structures* (Blacksburg, USA); (3) w roku 1992 odbyła się w Glasgow pierwsza konferencja "Smart Structures & Materials". Krótka historia tej dziedziny wiedzy jest przyczyną, dla której brak jest ugruntowanej terminologii. Z tego powodu przyjmujemy, posługując się analogią z teorii sterowania, że MA to taki materiał, który ma zdolność przystosowania się do zmiennych warunków otoczenia.

Kluczową sprawą przy stosowaniu MA jest uzyskanie PK, które opisują zachowanie się takiego materiału.

2. DWA PODEJŚCIA DO TWORZENIA PRAW KONSTITUTYWNYCH

Jak wiadomo, do utworzenia modelu matematycznego przyczynowego jakiegoś zjawiska niezbędne jest użycie nie tylko równan generowanych przez fundamentalne prawa fizyki (np. równanie ciągłości czy równanie Cauchy'ego). Prawa fundamentalne nie zawierają bowiem żadnych informacji o materiale, z którego jest zrobiona konstrukcja uczestnicząca w rozważanym zjawisku. Należy więc równania podstawowe, generowane przez fundamentalne prawa przyrody, uzupełnić związkami wyrażającymi własności fizyczne konstrukcji.

Zasadniczą sprawą dla nowych materiałów jest problem, jak dobrać PK materiału, aby konstrukcja z niego utworzona miała pożądane cechy. Oczywiście, wytworzenie takiego materiału jest zadaniem inżynierii materiałowej. Zaprojektowanie, czyli synteza PK, należy jednak do mechaniki stosowanej.

Istnieją dwie drogi wypracowania PK; doświadczalna i teoretyczna. Nie są one konkurencyjne, a komplementarne, co najlepiej wyraża pogląd Truesdella: "Każda teoria fizyczna musi opierać się na wynikach doświadczenia, lecz doświadczenie przeprowadza się raczej dla potwierdzenia (lub obalenia) jakiejś hipotezy, a nie dla jej stworzenia. Bez koncepcji teoretycznych nie można byłoby ani zaprojektować doświadczenia, ani zinterpretować jego wyników".

W nurcie doświadczalnym wykorzystuje się zazwyczaj wiedzę gromadzoną w różnych działach fizyki oraz wyniki eksperymentów dla konkretnych materiałów. Wiedzę tę organizuje się w postaci pewnych zależności, które zgodnie z terminologią wprowadzoną w pracy [2] można nazwać modelami empirycznymi. Jest to droga żmudna i niewdzięczna, która wymaga dużego doświadczenia.

W nurcie teoretycznym, zapoczątkowanym przez szkołę Truesdella w latach pięćdziesiątych, PK są rezultatem subtelnych zabiegów, w których kluczową rolę odgrywają aksjomaty Nolla i nierówności Clausiusa-Duhema. Aksjomaty Nolla są w istocie kryteriami, które musi spełniać dowolne PK. Innymi słowy, jeśli jakieś nowo kreowane PK narusza którykolwiek z aksjomatów, to należy je uznać za niepoprawne. Spośród wielu aksjomatów spotykanych w literaturze tylko trzy nie są kwestionowane. Są to:

- 1) aksjomat determinizmu (przyczynowości),
- 2) aksjomat lokalnego działania.
- 3) aksjomat obiektywności (niezależności materiałowej).

Celem niniejszej pracy jest uzyskanie PK na drodze teoretycznej. Sposób postępowania prześledzimy na przykładzie racjonalnego wyprowadzenia PK dla materiału sprężystego z uwzględnieniem efektu termopiezoelektrycznego.

3. WYKORZYSTANIE FUNDAMENTALNYCH PRAW MECHANIKI

Do wyprowadzenia PK dla termopiezoelektryka posłużymy się koncepcją zastosowaną przez Colemana i Nolla [3]. Podjęli się oni znalezienia termodynamicznej teorii substancji lepkosprężystych. Szukane równania były w tym przypadku znane skądinąd. Problem sprowadzał się zatem do ich uzyskania w sposób racjonalny - przy zastosowaniu odpowiednich zasad ogólnych. Zgodnie z tym podejściem zakładamy, że dysponujemy równaniem energii w postaci, którą otrzymujemy po wykorzystaniu fundamentalnych praw mechaniki ośrodków ciągłych (por. [4]):

$$\dot{U} = T \text{grad } \dot{x} - \text{div } \mathbf{q} + \mathbf{r} + E\dot{\mathbf{D}}, \quad (3)$$

gdzie: U - energia wewnętrzna właściwa, \mathbf{x} - położenie elementu ośrodka ciągłego, T - symetryczny tensor naprężenia, \mathbf{q} - wektor strumienia ciepła, \mathbf{r} - gęstość objętościowych źródeł ciepła, \mathbf{E} - wektor pola elektrycznego, \mathbf{D} - wektor indukcji elektrycznej.

Najistotniejszym ogniwem w racjonalnym modelowaniu PK jest nierówność Clausiusa-Duhema, która w formie różniczkowej ma postać

$$\dot{\eta} \geq -\text{div} \frac{\mathbf{q}}{\vartheta} + \frac{\mathbf{r}}{\vartheta}, \quad (4)$$

gdzie η oznacza entropię właściwą, a ϑ - temperaturę absolutną. Nierówność (4) po wykorzystaniu równania (3) przybiera postać:

$$\theta \dot{\eta} \geq \dot{U} - T \operatorname{grad} \dot{x} + \frac{q}{\theta} - E \dot{D}, \quad (5)$$

która posłuży nam do wyprowadzenia PK materiału adaptacyjnego.

4. PRAWA KONSTITUTYWNE MATERIAŁÓW ADAPTACYJNYCH

Efekty termoelektromagnetyczne łatwiej jest wyrazić za pomocą entalpii elektrycznej

$$H = U - \theta \eta - ED. \quad (6)$$

Teraz, zgodnie z podejściem Coleman'a i Nolla, postulujemy, że zmiennymi dynamicznymi są: odkształcenie, natężenie pola elektrycznego, temperatura i gradient temperatury.

Ze względów technicznych do tego miejsca będziemy posługiwali się zapisem wskaźnikowym. Oznacza to, że

$$T = [\sigma_{ij}], \quad \operatorname{grad} \dot{x} = [\dot{\epsilon}_{ij}] \quad (7)$$

oraz

$$H = H(e_{ij}, E_i, \theta, \theta_{,j}). \quad (8)$$

Nierówność (5), po wykorzystaniu wzoru (6), przybiera postać

$$\left[\sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial e_{ij}} \right] \dot{\epsilon}_{ij} - \left[D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i} \right] \dot{E}_i - \left[\eta + \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \dot{\theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta_{,j}} \dot{\theta}_{,j} - \frac{q_i \dot{\theta}_{,j}}{\theta} \geq 0. \quad (9)$$

Nierówność ta powinna być spełniona dla wszystkich stanów dopuszczalnych. Z tego żądania wynikają następujące wzory

$$a) \sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial e_{ij}}, \quad b) D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad c) \eta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad d) \frac{\partial H}{\partial \theta_{,j}} = 0 \quad (10)$$

oraz nierówność

$$-\frac{q_i \vartheta_{,j}}{\vartheta} \geq 0. \quad (11)$$

Ze wzoru (10d) wynika, że entalpia nie zależy od gradientu temperatury. Nierówność (11) może być spełniona przy założeniu, że

$$q_i = -k_{ij} \vartheta_{,j}, \quad k_{ij} > 0, \quad (12)$$

co jest znanym prawem Fouriera dla ośrodków anizotropowych.

Założmy teraz, że istnieje stan naturalny $H_0(e_{ij} = 0, E_i = 0, \vartheta = \vartheta_0)$. Po rozwinięciu entalpii H w szereg Taylora w otoczeniu tego stanu otrzymujemy:

$$H = H_0 + \eta \vartheta + \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j - (c_v / 2 \vartheta_0) \vartheta^2 - \gamma_{ij} e_{ij} \vartheta - e_{ijk} e_{kl} E_i - g_i E_i \vartheta, \quad (13)$$

Po podstawieniu (13) do wzorów (10a, b, c) otrzymujemy PK materiału adaptacyjnego:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl} - \gamma_{ij} \vartheta - e_{ijk} E_k, \\ D_i &= e_{ijk} e_{kl} + g_i \vartheta + \epsilon_{ijk} E_k, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\eta = \eta_0 + \gamma_{ij} e_{ij} + (C_v / \vartheta_0) \vartheta + g_i E_i.$$

Warto podkreślić, że z równań tych po pominięciu efektów cieplnych, można otrzymać prawa konstytutywne piezoelektryka spotykane w literaturze [5].

5. WERYFIKACJA PRAW KONSTITUTYWNYCH

Zgodnie z postępowaniem racjonalnym proces modelowania powinien zawierać sprawdzenie zgodności uzyskanego modelu z aksjomatami Nolla. Prawa konstytutywne (14) spełniają te aksjomaty, gdyż:

- 1) stan aktualny MA zależy od przeszłości, a nie od przyszłości (zob. równanie (3));
- 2) tensor naprężenia definiowany jest lokalnie;
- 3) są niezmiennicze względem zmian układu odniesienia, bowiem są relacjami tensorowymi.

Widzimy zatem, że powszechnie akceptowane aksjomaty są spełnione, co utwierdza nas w przekonaniu, iż model (14) jest racjonalny.

LITERATURA

- [1] Michalski W.J.J., Pietrucha J.A.: Sterowanie czynne własnościami dynamicznymi samolotu nieodkształcalnego. "Mechanika Teoretyczna i Stosowana", t. 28, Nr 3-4, 1990, s. 333-351
- [2] Arczewski K.P., Pietrucha J.A.: Mathematical Modelling of Complex Mechanical Systems. Vol. 1, First ed., New York, E. Horwood 1993
- [3] Coleman B.D., Noll W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. "Archive for Rational Mechanics and Analysis", Vol. 13, 1963, pp. 167-177
- [4] Nowacki W.: Postępy teorii sprężystości, Wyd. 1. PWN, Warszawa 1986
- [5] Song O. et al.: Application of adaptive technology to static aeroelastic control of wing structures. "AIAA Journal", Vol. 30, No. 12, 1992, pp. 2882-2889

Recenzent: prof. dr hab. inż. J. Świder

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.