

Marek KRAWCZUK, Wiesław OSTACHOWICZ, Arkadiusz ŻAK
Instytut Maszyn Przepływowych
Polska Akademia Nauk

KOMPOZYTOWY BELKOWY ELEMENT SKOŃCZONY Z PĘKNIĘCIEM

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę tworzenia kompozytowego belkowego elementu skończonego z pęknięciem poprzecznym. Element posiada trzy węzły i dwa stopnie swobody w węźle (przemieszczenie poprzeczne oraz obrót). Pęknięcie zmęczeniowe zastąpiono układem sprężyn o sztywnościach obliczonych na podstawie praw mechaniki pękania. Opracowany element może być stosowany do analizy wpływu pęknięć na zmiany charakterystyk statycznych i dynamicznych konstrukcji belkowych wykonanych z jednokierunkowych materiałów kompozytowych.

COMPOSITE BEAM FINITE ELEMENT WITH A CRACK

Summary. The paper presents the method of creating of a composite beam finite element with a transverse crack. The element has three nodes and two degrees of freedom per node (transverse displacement and rotation). The fatigue crack is substituted by a system of springs the stiffness of which is calculated on the basis of fracture mechanics. The elaborated element can be applied in analysis of influence of cracks on the changes in static and dynamic characteristic of the beam examined. The beams are made of unidirectional composite materials.

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ С ТРЕЩИНОЙ

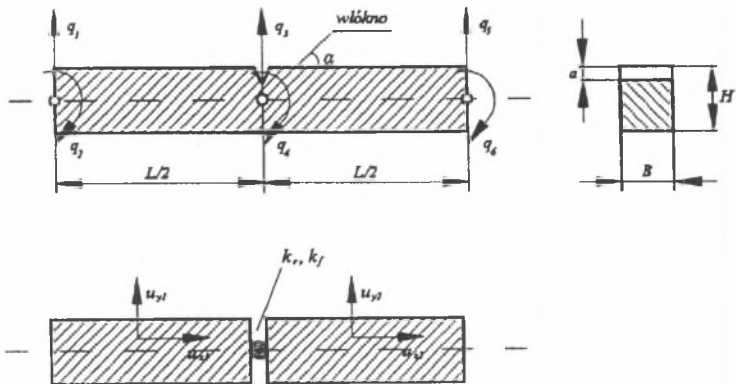
Резюме. В работе развит конечный элемент для композитной балки с поперечной трещиной. Элемент имеет три узла с двумя степенями свободы в каждом узле (поперечное перемещение и поворот). Усталостная трещина представляется системой пружин, жесткость которых определяется на основе законов усталостной механики. Разработанный элемент может быть использован для анализа влияния трещин на статические и динамические характеристики балок. Балки могут быть выполнены из однонаправленных композитных материалов.

1. WSTĘP

Materiały kompozytowe są w ostatnich latach coraz częściej stosowane w różnych dziedzinach techniki. Podobnie jak metale ulegają one zjawisku zmęczeniowego zniszczenia. Z tych też powodów istnieje konieczność opracowania metod analizy, które pozwoliłyby na ocenę wpływu pęknięć zmęczeniowych na zmiany charakterystyk statycznych i dynamicznych konstrukcji wykonanych z tego typu materiałów pod kątem wykorzystania tych zmian w systemach identyfikacji pęknięć [1]. W niniejszej pracy przedstawiono algorytm tworzenia belkowego elementu skończonego z pęknięciem poprzecznym, wykonanego z jednokierunkowego materiału kompozytowego (np. poliamid wzmocniony włóknami węglowymi). Omawiany element posiada trzy węzły i dwa stopnie swobody w węźle (przemieszczenie poprzeczne i obrót). Szczelina położona jest w środku rozpiętości elementu i pozostaje cały czas otwarta.

2. ALGORYTM TWORZENIA MACIERZY BEZWŁADNOŚCI I SZTYWNOŚCI ELEMENTU

Kompozytowy belkowy element skończony z pęknięciem poprzecznym przedstawiono na rys.1.



Rys.1. Kompozytowy belkowy element skończony z pęknięciem poprzecznym
Fig.1. The composite beam finite element with a transverse crack

Pola przemieszczeń dla lewej i prawej strony elementu można przedstawić w postaci:

$$u_{x1}(x,y) = -y\phi_1(x), \quad u_{y1}(x,y) = v_1(x), \quad (1.a)$$

$$u_{x2}(x,y) = -y\phi_2(x), \quad u_{y2}(x,y) = v_2(x), \quad (1.b)$$

gdzie: $\phi_i(x)$, ($i = 1,2$) oznacza obrót, podczas gdy $v_i(x)$, ($i = 1,2$) oznacza przemieszczenie poprzeczne.

Przemieszczenia poprzeczne po lewej i prawej stronie elementu można wyrazić w postaci wielomianu trzeciego stopnia, natomiast niezależne obroty można aproksymować wielomianami drugiego stopnia:

$$v_1 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3, \quad (2.a)$$

$$\phi_1 = a_5 + a_6x + a_7x^2, \quad (2.b)$$

$$v_2 = a_8 + a_9x + a_{10}x^2 + a_{11}x^3, \quad (2.c)$$

$$\phi_2 = a_{12} + a_{13}x + a_{14}x^2. \quad (2.d)$$

Przyjmując liniowy rozkład odkształceń stycznych [2] możemy równania (2.a-2.d) zapisać w postaci:

$$v_1 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3, \quad (2.a)$$

$$\phi_1 = a_5 + a_6x + 3a_6x^2, \quad (2.b)$$

$$v_2 = a_7 + a_8x + a_9x^2 + a_{10}x^3, \quad (2.c)$$

$$\phi_2 = a_{11} + a_{12}x + 3a_{10}x^2. \quad (2.d)$$

W celu wyznaczenia stałych $a_1 - a_{12}$ należy wykorzystać następujące warunki brzegowe w węzłach elementu (3.a-3.f) oraz w miejscu pęknięcia (3.g-3.l):

$$v_1(x=0) = q_1, \quad (3.a)$$

$$\phi_1(x=0) = q_2, \quad (3.b)$$

$$v_1(x=L/2) = q_3, \quad (3.c)$$

$$\phi_1(x=L/2) = q_4, \quad (3.d)$$

$$v_2(x=L) = q_5, \quad (3.e)$$

$$\phi_1(x=L) = q_6, \quad (3.f)$$

$$u_{x1}(x=L/2) - u_{x2}(x=L/2) = k_r u'_{x1}(x=L/2), \quad (3.g)$$

$$u'_{x1}(x=L/2) = u'_{x2}(x=L/2), \quad (3.h)$$

$$u_{y1}(x=L/2) = u_{y2}(x=L/2), \quad (3.i)$$

$$u'_{y1}(x=L/2) - u'_{y2}(x=L/2) = k_\mu u''_{y1}(x=L/2), \quad (3.j)$$

$$u''_{y1}(x=L/2) = u''_{y2}(x=L/2), \quad (3.k)$$

$$u'''_{y1}(x=L/2) = u'''_{y2}(x=L/2), \quad (3.l)$$

gdzie: k_r , k_μ są sztywnościami sprężyn modelujących pęknięcie.

Wykorzystując warunki brzegowe (3.a-3.l) można wyznaczyć wartości stałych $a_1 - a_{12}$, występujących w wielomianach aproksymujących, a następnie postacie macierzy funkcji kształtu dla lewej i prawej strony elementu skończonego:

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \end{Bmatrix} = N_1 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = N_2 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie: N_1 , N_2 są macierzami funkcji kształtu, dla lewej i prawej strony elementu.

Odształcenia w elemencie można wyznaczyć różniczkując związki (1.a-1.b):

$$e_{x1}(x,y) = -y \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x}, \quad \gamma_{xy1} = \frac{\partial v_1(x)}{\partial x} - \phi_1(x), \quad (5.a)$$

$$e_{x2}(x,y) = -y \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x}, \quad \gamma_{xy2} = \frac{\partial v_2(x)}{\partial x} - \phi_2(x), \quad (5.b)$$

Podstawiając do związków (5.a-5.b) zależności (2.a-2.d) oraz wykorzystując warunki brzegowe (3.a-3.1) odkształcenia wewnątrz elementu można wyrazić w funkcji przemieszczeń węzłowych, a tym samym wyznaczyć macierze liniowej zależności pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami B_1 , B_2 :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x1} \\ \gamma_{xy1} \end{Bmatrix} = B_1 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{x2} \\ \gamma_{xy2} \end{Bmatrix} = B_2 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

Ostatecznie macierz bezwładności M_e oraz macierz sztywności K_e omawianego elementu mogą być przedstawione w postaci:

$$M_e = \int_{V_1} N_1^T N_1 dV_1 + \int_{V_2} N_2^T N_2 dV_2, \quad (7)$$

$$K_e = \int_{V_1} B_1^T D B_1 dV_1 + \int_{V_2} B_2^T D B_2 dV_2, \quad (8)$$

gdzie: D jest macierzą współczynników sprężystości dla jednokierunkowego materiału kompozytowego [3].

3. WSPÓŁCZYNNIKI PODATNOŚCI ELEMENTÓW SPRĘŻYSTYCH MODELUJĄCYCH PĘKNIĘCIE

Związki opisujące podatności elementów sprężystych, modelujących pęknięcie w elemencie skończonym, można wyznaczyć wykorzystując twierdzenie Castigliano:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial S_i \partial S_j}, \quad (9)$$

gdzie: U jest dodatkową energią odkształcenia sprężystego elementu wywołaną pojawieniem się pęknięcia, S_i , S_j oznaczają niezależne siły węzłowe elementu skończonego.

Dodatkowa energia odkształcenia sprężystego w przypadku pęknięć występujących w jednokierunkowych materiałach kompozytowych jest równa:

$$U = \int_A \left(D_1 \sum_{i=1}^{i=n} K_{ii}^2 + D_{12} \sum_{i=1}^{i=n} K_{ii} \sum_{i=1}^{i=n} K_{ii} + D_2 \sum_{i=1}^{i=n} K_{ii}^2 + D_3 \sum_{i=1}^{i=n} K_{iii}^2 \right) dA, \quad (10)$$

gdzie: A jest powierzchnią pęknięcia, K_{ji} ($j = i, ii, iii, i = 1, 0$) są współczynnikami intensywności naprężeń, D_1 , D_{12} , D_2 , D_3 oznaczają współczynniki zależne od stałych materiałowych [4].

W ogólnym przypadku współczynniki intensywności naprężeń dla materiału kompozytowego nie są równe współczynnikom intensywności otrzymanym z rozwiązania zagadnienia pęknięcia (o tej samej geometrii) występującego w ośrodku izotropowym. Zgodnie z rezultatami przedstawionymi w pracy [5] współczynniki te są równe:

$$K_{ji} = \sigma_i \sqrt{\Pi a F_{ji}}(a/H, \sqrt{\lambda} L/H, \xi), \quad (11)$$

gdzie: σ_i oznacza naprężenia działające w miejscu pęknięcia, a jest głębokością pęknięcia, H wysokością elementu, F_{ji} są współczynnikami poprawkowymi uwzględniającymi skończone wymiary elementu i własności materiałowe (anizotropię materiału), podczas gdy związki opisujące bezwymiarowe stałe materiałowe λ , ξ dane są w pracy [5].

W pracy [5] pokazano, że dla $\sqrt{\lambda} L/H > 2$ współczynniki intensywności naprężeń dla pęknięć poprzecznych w materiale kompozytowym mogą być przedstawione w postaci:

$$K_{ji} = \sigma_i \sqrt{\Pi a F_{ji}}(a/H, Y_j(\xi)), \quad (12)$$

gdzie: $Y_j(\xi)$ jest funkcją poprawkową uwzględniającą anizotropię materiału [5].

Ostatecznie wykorzystując związki przedstawione w pracy [6] otrzymujemy:

$$c_r = \frac{2D_1\Pi}{B} \int_0^{\bar{a}} \bar{a}(F_1 Y_1)^2 d\bar{a}, \quad (13)$$

$$c_f = \frac{72D_1\Pi}{BH^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{a}(F_2 Y_1)^2 d\bar{a}, \quad (14)$$

gdzie:

$$F_1 = \sqrt{\frac{\tan \eta}{\eta} \frac{0.752 + 2.02\bar{a} + 0.37(1 - \sin \eta)^3}{\cos \eta}}, \quad (15)$$

$$F_2 = \frac{1.122 - 0.561\bar{a} + 0.85\bar{a}^2 + 0.18\bar{a}^3}{\sqrt{1 - \bar{a}}}, \quad (16)$$

$$Y_1 = 1 + 0,1(\xi - 1) - 0,016(\xi - 1)^2 + 0,002(\xi - 1)^3, \quad (17)$$

gdzie: $\bar{a} = a/H$, $\eta = \Pi a/2H$, jest szerokością elementu.

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono algorytm tworzenia macierzy charakterystycznych kompozytowego belkowego elementu skończonego z niepropagującym, otwartym pęknięciem poprzecznym.

Dzięki zastosowaniu dwóch różnych funkcji kształtu, dla lewej i prawej strony elementu, możliwe stało się uwzględnienie wpływu pęknięcia zarówno na postać macierzy mas, jak i macierzy sztywności (w dotychczas opublikowanych pracach [7] zakładano, że pęknięcie modyfikuje jedynie postać macierzy sztywności).

Wyniki obliczeń numerycznych, ilustrujące wpływ położenia i głębokości pęknięcia na zmiany charakterystyk statycznych i dynamicznych belki wspornikowej wykonanej z poliamidu wzmocnionej włóknami grafitu, zostaną przedstawione w czasie trwania sympozjonu.

LITERATURA

- [1] Cawley P., Adams R.D.: A vibration technique for non-destructive testing of fiber composite structures. "Journal of Composite Materials", Vol.13, 1979, pp. 161-175.
- [2] Tessler A., Dong S.B.: On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements. "Computers and Structures", Vol.14, 1981, pp.335-344.
- [3] Vinson J.R., Sierakowski R.L.: Behaviour of structures composed of composite materials. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1991.
- [4] Nikpour K., Dimarogonas A.D.: Local compliance of composite cracked bodies. "Journal of Composite Sciences Technology", Vol.32, 1988, pp.209-223.
- [5] Bao G., Ho S., Suo Z., Fan B.: The role of material orthotropy in fracture specimens for composites. "Journal of Solids Structures", Vol.29, 1992, pp.1105-1116.
- [6] Krawczuk M., Ostachowicz W.: Modeling and vibration analysis of a cantilever beam with a transverse open crack. Praca przyjęta do druku w Journal of Sound and Vibration.
- [7] Krawczuk M.: A new finite element for the static and dynamic analysis of cracked composite beams. "Computers and Structures", Vol.52, 1994, pp.551-561.

Praca wykonana w ramach Projektu Badawczego nr 3 P402 039 06.

Recenzent: prof. dr hab. inż. A. Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.