

Maciej MINCH, Aleksander TROCHANOWSKI  
Instytut Budownictwa  
Politechnika Wrocławska

### MODELOWANIE STANU ZGIĘCIOWEGO I TARCZOWEGO PŁYT ZARYSOWANYCH

**Streszczenie.** W pracy sformułowano równania różniczkowe zarysowanych płyt w stanie zgięciowym i tarczowym, używając wariacyjnej metody typu Lagrange'a. Następnie wykorzystując otrzymane równania pola wraz ze stowarzyszonymi warunkami brzegowymi wyprowadzono globalne równania różniczkowe płyty i tarczy w klasie dwuwymiarowych wektorowych funkcji uogólnionych. W modelu uwzględniono efekt nieciągłości wektora uogólnionych deformacji spowodowanych pojawieniem się rysy.

### MODELLING OF BENDING AND PLANE STRESS STATE OF CRACKED PLATES

**Summary.** In this paper the differential equation of the cracked plates, using the classical variational method of Lagrange is worked out. The displacements equations with boundary conditions and compatibility conditions in the crack are obtained. The total differential equations in the class of the two-dimensional general vector functions is shown. In this model the effect of discontinuity general deformation vector into account is taken.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО И ДИСКОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПЛИТЫ С ТРЕЩИНАМИ

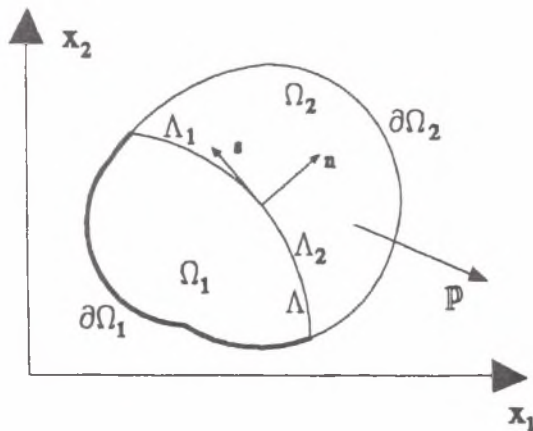
**Резюме.** В работе введено дифференциальное уравнение зарисованной плиты изгибного и дискового состояния используя классический вариационный принцип типа Лагранжа. Получено уравнение поля для плиты и диска вместе с относительными наружными и внутренними береговыми условиями в трещине. Представлено валовое дифференциальное уравнение для плиты и диска в классе двумерных обобщенных векторных функции. В модели принято во внимание эффект прерывности вектора деформации вызванный возникновением трещин.

## 1. WSTĘP

Najważniejszą cechą płyt żelbetowych jest ich niejednorodność, czyli defekty wywołane rysami. Uwzględnienie tych defektów w modelu płyty, w formie zapisu kontynualnego, zniekształca końcowy wynik rozwiązania, uzyskiwany z reguły metodami przybliżonymi (sumowanie błędów założenia i rozwiązanie). Konieczne wydaje się zatem takie dokładne założeniowe formułowanie zadania, aby możliwy błąd, łatwy do kontrolowania, powstał jedynie w fazie rozwiązania. Praca niniejsza wychodzi naprzeciw tym tezom, modelując konstrukcję płyt w sposób ścisły za pomocą funkcji uogólnionych. Przyjęcie do opisu zjawisk zarysowania funkcji opartych na teorii dystrybucji Schwartza, pozwoliło na ścisły opis obserwowanych doświadczalnie defektów nieciągłości uogólnionych deformacji konstrukcji. W dalszej części pracy obowiązują założenia klasycznej teorii dystrybucji [1]. Istotne dla zrozumienia opisu w dalszych rozważaniach będą dystrybucje uogólnione  $\delta$ -Diraca o danej gęstości skoncentrowanej na krzywej  $A \in R^2$  o następujących własnościach:

$$\langle \Psi \delta_A, \varphi \rangle = \int_A \psi(x) \varphi(x) d\Lambda, \quad \text{gdzie } x = (x_1, x_2). \quad (1)$$

Rozpatruje się dowolną płytę w rozseparowanym stanie zgięciowym i tarczowym, z ogólnymi warunkami brzegowymi oraz dowolnym obciążeniem. Celem zwiększenia przejrzystości zapisu matematycznego założono istnienie w obszarze płyty  $\Omega$  pojedynczej rysy  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , z brzegiem  $\partial\Omega_1$  i  $\partial\Omega_2$ . Na brzegu  $\Lambda$  cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej dla obszarów  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  różnią się znakiem. Przyjęty model łatwo uogólnić na dowolną liczbę krzywych  $\Lambda$ .



Rys. 1. Schemat opisu płyty z rysą  $\Lambda$   
Fig. 1. Scheme of plate with crack  $\Lambda$

## 2. STAN ZGIĘCIOWY

Rozwiązywać będziemy nieciągłe zadanie wariacyjne całki powierzchniowej opisujące różnicę pracy sił wewnętrznych  $U_B$ , wyrażoną przez znane wzory teorii sprężystości liniowej w zależności moment-krzywizna-ugięcie  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\chi(w))$  i zewnętrznych  $p(x)w$ :

$$J[w(w)] = \int_{\Omega} [U_B(D\mathbf{M}(\chi(w))) - p(x)w] d\Omega, \quad (2)$$

gdzie:  $D$  - jest sztywnością płyty zarysowanej,  $\mathbf{M}$  - wektorem momentów, a  $\chi(x)$  - krzywizną w funkcji drugiej pochodnej ugięć  $w$ .

Poszukujemy ekstremali funkcjonału (2) na zbiorze dopuszczalnych wartości ugięcia  $w(x_1, x_2)$  w obszarze  $\Omega$ , przy założeniu jednego załamania dzielącego ten obszar na dwa podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  (rys. 1).

Przyjęto, że poszukiwana funkcja należy do klasy funkcji  $w \in C^0(\Omega) \cap C^1(\Omega/\Lambda)$  (dla  $x \in \Lambda$  funkcja  $w'(x)$  ma nieciągłość).

Warunkiem koniecznym na to, by  $w$  było rzeczywistym ugięciem płyty, jest zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału (2). Całkując, zgodnie ze znanym wzorem Greena przez części, można przedstawić całkę powierzchniową jako sumę całek powierzchniowej i krzywoliniowej. Wykorzystując dalej zależność  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\chi(w))$ , można po prostych przekształceniach otrzymać równanie różniczkowe płyty w stanie zgięciowym:

$$\Delta \Delta w(x) = \frac{1}{D} p(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (3)$$

oraz stowarzyszone z nim kombinacje podstawowych warunków brzegowych:

$$\bar{V}(w)|_{\partial\Omega} = 0 \vee w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bar{M}(w)|_{\partial\Omega} = 0 \vee \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

i warunków zgodności w rysie:

$$[\bar{V}(w)]_{\Lambda} = 0, \quad [\bar{M}(w)]_{\Lambda} = 0, \quad (5)$$

gdzie  $\bar{M}$  i  $\bar{V}$  są następującymi operatorami różniczkowymi:

$$\bar{M} = \nu \Delta + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial n^2}, \quad \bar{V} = \frac{\partial \Delta}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial n} \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s} \right], \quad (6)$$

Tutaj  $[\cdot]^\wedge$  oznacza różnicę prawostronnej i lewostronnej granicy wyrażenia w nawiasie na krzywej  $\Lambda$ , a  $\kappa$  przedstawia krzywiznę w danym punkcie krzywej  $\Lambda$ .

Założmy, że prawo fizyczne rządzące defektem i opisujące skok pierwszej pochodnej ugięcia przy przejściu przez krzywą  $\Lambda$  przedstawione jest wyrażeniem:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right]_{\Lambda_1 \Lambda_2}^\wedge(x) = r(x), \quad x \in \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \text{z warunkiem} \quad \frac{\partial r}{\partial s}(\Lambda_1) = \frac{\partial r}{\partial s}(\Lambda_2) = 0, \quad (7)$$

gdzie:  $r(x)$  jest gęstością defektu ciągłego dla  $x \in \Lambda_1 \Lambda_2$ , tzn. uogólnioną na przypadek rysy wewnętrznej, co łatwo udowodnić. Oznacza to przyjęcie na pozostałej części krzywej  $\Lambda$  warunku  $\left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right]_\Lambda = 0$  dla  $x \notin \Lambda_1 \Lambda_2$ . Druga część warunku (7) zapewnia znikanie w rozwiązaniu członów  $\delta(x - \Lambda_1)$  i  $\delta(x - \Lambda_2)$ , co wynika z sensu fizycznego zadania, tzn. założenia o skończonych wartościach momentów wewnętrznych w płycie. Członki typu  $\delta(x)$  wprowadzają w rozwiązaniu zbyt mocne osobliwości logarytmiczne już w drugich pochodnych funkcji ugięć  $w(x)$ . Związki (5) i (7) uzupełniają w istotny sposób definicję defektu w płycie żelbetowej.

Przekształcając (3) oraz wykorzystując relację (1) i (4) - (7) otrzymano równanie różniczkowe ugięcia  $w(x)$  w klasie funkcji uogólnionych:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \Delta w, \varphi \rangle = & \left\langle \frac{1}{D} p(x), \varphi \right\rangle + \int_{\partial \Omega} [w \bar{V}(\varphi) + \bar{M}(w) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{V}(w) \varphi - \frac{\partial w}{\partial n} \bar{M}(\varphi)] d\Omega + \\ & + \int_\Lambda r(x) \bar{M}(x) d\Lambda + (v-1) \varphi \frac{\partial r}{\partial s} \Big|_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

Zapisując równanie (8) w postaci funkcjonalowej z wykorzystaniem dystrybucji delta- $\delta$  otrzymano podobnie jak w pracy [2] wynikowe, globalne równanie różniczkowe płyty zarysowanej, która zawiera w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych oraz spełnia warunek graniczny w rysie:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w = & \frac{1}{D} p(x) + \bar{M}(r(x) \delta_\Lambda) - \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial n} + (1-v) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \kappa \frac{\partial}{\partial s} \right) \right] (w \delta_{\partial \Omega}) - \\ & + \frac{\partial}{\partial n} (\bar{M}(w) \delta_{\partial \Omega}) - \bar{M} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \delta_{\partial \Omega} \right) - \bar{V}(w) \delta_{\partial \Omega}. \end{aligned} \quad (9)$$

## 3. STAN TARCZOWY

Założono, że podstawowe równania pola składające się z równań równowagi, związków geometrycznych i związków fizycznych są dane i przyjęte w znanej postaci z teorii sprężystości. Podobnie jak dla stanu zgięciowego poszukiwać będziemy ekstremali funkcjonału energii odkształcenia  $U_s$  w zależności od wektora przemieszczenia  $u(x)$ :

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} U_s(u(x)) d\Omega - \int_{\Omega} b(x)u(x) d\Omega - \int_{\partial\Omega} p(x)u(x) d\partial\Omega, \quad (10)$$

gdzie  $b(x)$  oznacza siły masowe. Przyjęto poszukiwaną funkcję w obszarze  $u \in C^2(\Omega/\Lambda)$  (dla  $x \in \Lambda$  funkcja  $u(x)$  ma nieciągłość).

Wykonując całkowanie całki powierzchniowej przez części, podobnie jak dla stanu zgięciowego i wykorzystując związki naprężenie-odkształcenie-przemieszczenie S-E-u po prostych przekształceniach otrzymano równanie różniczkowe płyty w stanie tarczowym:

$$\mu(\nabla^2 + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \text{grad div}) u(x) + b(x) = 0, \quad (11)$$

oraz stowarzyszone z nim warunki brzegowe:

$$\bar{P}(u(x)) = p(x), \quad \text{dla } x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (12)$$

i warunki zgodności w rysie:

$$[\bar{P}(u(x))]_{\Lambda} = 0, \quad x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2. \quad (13)$$

Tutaj  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi Lamé', zaś  $\bar{P}$  jest operatorem napięcia powierzchniowego:

$$\bar{P}(\cdot) = \mu(\nabla^2 + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \mathbf{1} \text{ div})(\cdot) \mathbf{n}, \quad (14)$$

gdzie:  $\mathbf{1}$  jest tensorem jednostkowym a  $\mathbf{n}$  oznacza wektor normalny zewnętrzny do  $\partial\Omega$ .

Podobnie jak dla stanu momentowego założono prawo rozwierania się rysy, opisujące skok wektora przemieszczenia przy przejściu przez krzywą  $\Lambda$ :

$$[u(x)]_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} = g(x), x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \text{ z warunkiem } \frac{\partial g}{\partial s}(\Lambda_1) = \frac{\partial g}{\partial s}(\Lambda_2) = 0. \quad (15)$$

Tutaj  $g(x)$  jest gęstością defektu, ciągłą dla  $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ , dla pozostałej krzywej  $\Lambda$  zachodzi warunek  $[u]_{-\Lambda} = 0$ , dla  $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ . Podobnie jak dla warunków (7) zależności (15) w istotny sposób określają definicję defektu w płaskim stanie naprężenia dla tarczy żelbetowej.

Wykorzystując analogiczne operacje matematyczne jak przy równaniu (8), tzn. wykorzystując (1) i (11)-(15) otrzymano równanie różniczkowe wektora przemieszczenia  $u(x)$  dla płaskiego stanu naprężenia w klasie funkcji uogólnionych:

$$\begin{aligned} \mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \text{grad div} \right) u(x) \varphi \cdot \langle b(x), \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} [u(x) \bar{P}(\varphi) + (p(x) - \\ - \bar{P}(u(x) \varphi)] d\partial\Omega + \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} g(x) \bar{P}(\varphi) d\Lambda. \end{aligned} \quad (16)$$

Wynikowe, globalne równanie różniczkowe tarczy zarysowanej (16) zapisane w postaci funkcionatu z dystrybucją delta- $\delta$ , zawierające w sobie komplet warunków brzegowych zewnętrznych oraz warunek graniczny w rysie przedstawiono następująco:

$$\mu \left( \nabla^2 + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \text{grad div} \right) u(x) = -\bar{P}(g(x) \delta_{\Lambda}) + (p(x) - \bar{P}(u(x))) \delta_{\partial\Omega_1} + \bar{P}(\bar{u}(x) - u(x)) \delta_{\partial\Omega_2}. \quad (17)$$

Tutaj  $b(x)$  przyjęto w postaci  $b(x) = -\bar{P}(\bar{u}(x)) \delta_{\partial\Omega_2}$ .

#### 4. SPRZĘŻENIE STANÓW TARCZOWEGO I ZGIĘCIOWEGO

Założenie określające wielkość skoku pierwszej pochodnej funkcji ugięcia  $w(x)$  oraz wektora przemieszczenia  $u(x)$  potwierdzone zostało doświadczeniem (por. [3]). Gęstość defektu uzależniono od momentu normalnego na rysie  $N_0$  dla stanu zgięciowego oraz wektora naprężenia normalnego  $N$  dla stanu tarczowego:

$$f(x) = f^0(x) - f^1(x) \mathfrak{S}(M_n(x), N(x))|_{\Lambda}, \quad x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2. \quad (18)$$

Tutaj  $f^0$  opisuje uogólnione deformacje trwałe w rysie, a  $f^1 \mathfrak{S}(M_n, N)$  deformacje sprężyste.

Występowanie momentów i napięć w rysie wynika z występowania w niej zbrojenia, które przenosi siły wewnętrzne konstrukcji. Współczynnik  $f$  wyznacza się z badań lub z ogólnej teorii rys w żelbecie. Uzyskano w ten sposób poprzez rysę sprzężenie stanów zgięciowego i tarczowego.

W dalszych rozważaniach wykorzystano funkcję podstawową Greena spełniającą równanie  $\Delta \Delta F(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  w następującej postaci:

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi} |\mathbf{x}^2| \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}. \quad (19)$$

Funkcja  $G(\mathbf{x})$  jest zwykłą funkcją z pochodnymi dowolnego rzędu i biharmoniczną dla  $\mathbf{x} \neq 0$ , a osobliwą w punkcie  $\mathbf{x} = 0$ .

Wykorzystując definicję splotu i funkcję Greena spełniającą równanie, otrzymano rozwiązanie równań (9) i (17) w formie układu silnie osobliwych, sprzężonych równań różniczkowo-całkowych:

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{D} \int_D p(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} [r^0(\mathbf{y}) + r^1(\mathbf{y}) \mathfrak{S}(M_n, N)] \bar{M}_y(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\Lambda_y +$$

$$\int_{\partial\Omega} [w(\mathbf{y}) \bar{V}_y(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{y}) \bar{M}_y(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \bar{M}(w(\mathbf{y})) \frac{\partial G}{\partial y_n} - \bar{V}(w(\mathbf{y})) G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\partial\Omega_y, \quad (20)$$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} [g^0(\mathbf{y}) + g^1(\mathbf{y}) \mathfrak{S}(M_n, N)] \bar{P}(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\Lambda_y +$$

$$\int_{\partial\Omega} \{ [\bar{P}_y(G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))][u(\mathbf{y}) - \bar{u}(\mathbf{y})] - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + [\bar{P}(u(\mathbf{y})) - p(\mathbf{y})] \} d\partial\Omega_y, \quad (21)$$

Tutaj całki krzywoliniowe po brzegu  $\Lambda$  można interpretować jako pewnego rodzaju obciążenie zewnętrzne modelujące defekt. Można wykazać [4], że dla stanu zgięciowego są to bimomenty normalne do rysy, powodujące skok kąta obrotu w rysie, a dla stanu tarczowego dipole normalne i styczne pary sił przyłożone na jej brzegach. Działające obciążenie jest samozrównoważone i nie powoduje przyrostu obciążenia zewnętrznego konstrukcji.

Otrzymany układ równań różniczkowo-całkowych (20) i (21) opisuje w sposób ściśle matematyczny model zarysowanej płyty żelbetowej ze sprzężonymi poprzez rysę stanami zgięciowym i tarczowym. W rozwiązaniu tym uwzględniono nieciągłość uogólnionej deformacji w miejscu zarysowania, zapewniając jednocześnie ciągłość uogólnionego wektora napięć przy przejściu przez krzywą  $\Lambda$ . Tak skonstruowany model posłuży do rozwiązania płyty zarysowanej metodą elementów brzegowych.

## LITERATURA

- [1] Schwartz L.: *Theorie des distributions*, Paris 1966
- [2] Baryła A., Sobocińska E.: *Teoria płyt żelbetowych z rysami*, PWN, Warszawa 1983
- [3] Borcz A.: *Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych*, TNEB, Warszawa 1963
- [4] Minch M.: *Metoda wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*. "Rozprawy Inżynierskie", Nr 28, 1980, s. 445-468

Recenzent: prof. dr hab. inż. J. Świder

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.