

Stanisław KUCYPERA  
Politechnika Śląska, Gliwice

## WYZNACZANIE PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ I CIEPŁA WŁAŚCIWEGO MATERIAŁÓW STAŁYCH Z WYKORZYSTANIEM SZEREGÓW FOURIERA I METOD OPTYMALIZACJI

**Streszczenie.** W pracy w celu rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła i wyznaczenia właściwości cieplnych ciał stałych połączono metodę szeregów Fouriera z metodami optymalizacji. Podano założenia modelu matematycznego oraz algorytm rozwiązania prostego zagadnienia przewodzenia ciepła. Zagadnienie odwrotne sformułowano jako problem optymalizacyjny i wykorzystując odpowiednie dane pomiarowe rozwiązano go metodą bezgradientową Hooka-Jeevsa oraz zmodyfikowaną metodą gradientową Newtona. Podano krótką charakterystykę zastosowanych metod optymalizacji. Opisano skomputeryzowane stanowisko badawcze. Przedstawiono przykładowe wyniki badań. Wyniki porównano z danymi literaturowymi.

## DETERMINATION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY AND SPECIFIC HEAT OF SOLID MATERIALS BY APPLYING THE FOURIER SERIES AND OPTIMIZATION METHODS

**Summary.** In order to solve inverse heat conduction problem and to determine the thermal properties of solids the Fourier series and optimisation methods have been combined. The fundamentals of the mathematical model and algorithm of solving the direct heat conduction problem have been given. The inverse problem was formulated as an optimisation problem and, using proper measurement data, it has been solved by applying the Hook-Jeeves non gradient method and Newton modified gradient method. Short characteristic of both methods has been given. The computerized test stand has been described. The sample results have been presented. The results received by applying the present method have been compared with data from literature.

### 1. WSTĘP

Wyznaczanie właściwości cieplnych ciał stałych z zastosowaniem metod optymalizacyjnych i danych pomiarowych polega na rozwiązaniu odwrotnego zagadnienia współczynniko-

wego przewodzenia ciepła i poszukiwaniu wartości jednego lub kilku współczynników, które opisują właściwości cieplne ciała. Rozwiązywanie zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła przeprowadzane jest na ogół w dwóch etapach:

W pierwszym etapie, na podstawie odpowiednio sformułowanego modelu matematycznego, rozwiązywane jest proste zagadnienie przewodzenia ciepła. Wówczas wyznaczane są wielkości pomocnicze lub ich charakterystyki (np. pole temperatury). Wielkości te wykorzystywane są w drugim etapie rozwiązywanego problemu.

W drugim etapie, korzystając z danych pomiarowych i wyznaczonych wcześniej wielkości, rozwiązywane jest zagadnienie odwrotne i wyznaczane są wielkości docelowe.

W przypadku rozwiązywania zagadnienia prostego przewodzenia ciepła korzystnie jest w miarę możliwości tak sformułować model matematyczny i przeprowadzić eksperyment, aby w wyniku rozwiązania prostego zagadnienia przewodzenia ciepła wyznaczane wielkości, np. pole temperatury, otrzymać w postaci formuł analitycznych.

Uwzględniając powyższe wymogi w pracy tej tak sformułowano model matematyczny i przeprowadzono eksperyment, że rozwiązując zagadnienie proste, rozkład temperatury w próbkach otrzymano w postaci szeregów Fouriera. Natomiast efektem końcowym rozwiązania odwrotnego zagadnienia współczynnikowego było wyznaczenie współczynnika przewodzenia ciepła  $k$  i ciepła właściwego  $c$  badanego materiału. Problem ten sformułowano jako zagadnienie optymalizacyjne i do jego rozwiązania zaproponowano dwie metody optymalizacyjne: bezgradientową metodę Hooka-Jeevsa i gradientową metodę zmiennej metryki Davida-Fletcher-Powella (zmodyfikowaną metodę Newtona).

Zaproponowana metoda rozwiązania odwrotnego zagadnienia współczynnikowego przewodzenia ciepła polega na połączeniu szeregów Fouriera z metodami optymalizacyjnymi. Szeregi Fouriera otrzymano jako rozwiązanie prostego zagadnienia przewodzenia ciepła, natomiast metody optymalizacyjne wykorzystano do sterowania rozwiązaniem zagadnienia prostego i jego modyfikacji w celu wyznaczenia wartości współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego badanego materiału. Sprowadza się to do wielokrotnego rozwiązywania zagadnienia prostego z modyfikowanymi wartościami wielkości poszukiwanych. W wyniku połączenia eksperymentu i zaproponowanej metody rozwiązania otrzymano efektywny sposób wyznaczania parametrów cieplnych ciał stałych. Przedstawiono przykładowe wyniki.

## 2. ZAŁOŻENIA MODELU MATEMATYCZNEGO I ALGORYTM OBLICZEŃ PROSTEGO ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA

### 2.1. Założenia modelu matematycznego

W pracy podczas analizy teoretycznej rozpatrywano proces nagrzewania nieskończenie rozległej płyty o grubości  $2\delta$ . W celu ułatwienia rozwiązania zagadnienia i zapewnienia możliwie najlepszej zgodności modelu matematycznego z rzeczywistymi warunkami pomiarów przyjęto następujące założenia:

1. Rozpatruje się proces symetrycznego nagrzewania nieskończenie rozległej płyty, tzn. płyty, której grubość jest znacznie mniejsza od rozmiarów wzdłużnych, czyli pole temperatury w płycie jest polem jednowymiarowym.
2. Materiał płyty ma izotropowe właściwości cieplne.
3. Zakłada się, że właściwości cieplne materiału nie zmieniają się podczas badań.
4. Zakłada się, że przed rozpoczęciem procesu nagrzewania płyty rozkład temperatury w całej jej objętości jest wyrównany i równy temperaturze początkowej.
5. W chwili  $\tau = 0$  na obu powierzchniach zewnętrznych płyty zaczyna działać stały strumień ciepła  $q = \text{idem}$ ,  $\text{W/m}^2$ .
6. Zakłada się, że całe wygenerowane ciepło wnika do wnętrza płyty, czyli współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$  do otoczenia płyty jest równy zero, co w pełni spełnione jest w warunkach pomiarowych, gdyż grzejnik oddaje ciepło do próbek tylko przez przewodzenie.

Dla tak przyjętych założeń sformułowano model matematyczny i rozwiązano zagadnienie proste wykorzystując metodę szeregów Fouriera.

### 2.2. Model matematyczny i algorytm obliczeń zagadnienia prostego

Uwzględniając powyższe założenia równanie opisujące jednowymiarowy przepływ ciepła w płycie ( dla współrzędnych bezwymiarowych) można opisać następującym równaniem różniczkowym[2]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} , \quad (1)$$

gdzie:

$$\theta = T - T_p, \quad (2)$$

$$\xi = \frac{x}{\delta} \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (3)$$

$$Fo = \frac{k \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot \delta^2}, \quad Fo \geq 0. \quad (4)$$

Dla przyjętych założeń warunki brzegowe wyrażają następujące równania:

- dla powierzchni płyty:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm 1} = \pm \frac{q \cdot \delta}{k}, \quad (5a)$$

- dla osi płyty:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (5b)$$

Początkowa temperatura w próbkach jest wyrównana, więc warunek początkowy ma postać:

$$\theta \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (5c)$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego (1-5c) przyjęto jako sumę dwóch funkcji:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad (6)$$

przy czym:

$$\theta_1 \Big|_{Fo=0} + \theta_2 \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (7)$$

Funkcja  $\theta_1$  jest rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm 1} = \pm \frac{q \cdot \delta}{k}. \quad (9)$$

Natomiast funkcja  $\theta_2$  spełnia równania:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (11)$$

Funkcję  $\theta_1$  zakłada się w następującej postaci:

$$\theta_1 = A_1 \cdot Fo + A_2 + A_3 \cdot \xi^2. \quad (12)$$

Rozwiązanie równań (10–11) przyjęto w postaci iloczynu funkcji:

$$\theta_2 = X(\xi) \cdot T(Fo). \quad (13)$$

Stąd rozwiązanie zagadnienia (1) z warunkami brzegowymi (5) we współrzędnych bezwymiarowych ma następującą postać:

$$\theta(\xi, Fo) = \frac{q \cdot \delta}{k} \left[ Fo - \frac{1}{6} \cdot (1 - 3 \cdot \xi^2) - \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \cdot \cos(i \cdot \pi \cdot \xi) e^{-i^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo} \right]. \quad (14)$$

Ostatecznie rozkład temperatury w próbce  $T(x, \tau)$  opisany jest następującym równaniem:

$$T(x, \tau) = T_p + \frac{q \cdot \delta}{k} \left[ \frac{k \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot \delta^2} - \frac{1}{6} \left[ 1 - 3 \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] - \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \cos \left( i \cdot \pi \cdot \frac{x}{\delta} \right) e^{-i^2 \pi^2 \frac{k \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot \delta^2}} \right]. \quad (15)$$

Otrzymany z rozwiązania zagadnienia prostego rozkład temperatury w próbce wykorzystano po uwzględnieniu wielkości pomiarowych do rozwiązania odwrotnego zagadnienia współczynnika przewodzenia ciepła.

### 3. ROZWIĄZANIE ODWROTNEGO ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA

Głównym celem analizowanego problemu jest wyznaczenie ciepła właściwego i współczynnika przewodzenia ciepła badanego materiału. Do rozwiązania zagadnienia zaproponowano metody optymalizacyjne, polegające na poszukiwaniu nieznanymi składowych wektora

$\mathbf{x}$  poprzez minimalizację sum kwadratów różnic pomiędzy wartościami temperatury zmierzonej i obliczonej w tych samych punktach próbki. Stąd warunek ten można zapisać:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{MP} (T_{p,obl} - T_{p,zm})^2 \Rightarrow \min, \quad (16)$$

gdzie:

- $MP$  – liczba punktów, w których mierzona była temperatura (obie zewnętrzne powierzchnie próbki),
- $T_{p,obl}, T_{p,zm}$  – odpowiednio temperatury: obliczona i zmierzona na stanowisku pomiarowym w  $p$  – tym punkcie próbki,
- $\mathbf{x}$  – wektor zawierający poszukiwane wielkości: przewodność cieplną  $k$  i ciepło właściwe  $c$  materiału, czyli:

$$\mathbf{x} = [k, c]^T. \quad (17)$$

Dodatkowym celem pracy było znalezienie efektywnego algorytmu rozwiązania odwrotnego zagadnienia współczynnikowego przewodzenia ciepła sformułowanego zależnością (16). Dlatego przeanalizowano możliwość zastosowania dwóch metod optymalizacyjnych:

- metody bezgradientowej Hooka-Jeevsa,
- gradientowej zmodyfikowanej metody Newtona tzw. metody zmiennej metryki Davidona-Fletchera-Powella (DFP).

Obie wymienione metody należą do klasy metod iteracyjnych.

Istota metody Hooka-Jeevsa [1] polega na tym, że przystępując do obliczeń określa się bazę  $\mathbf{n}$  liniowo niezależnych wektorów  $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \dots, \mathbf{d}^{(n)}$  (które są najczęściej wersorami kartezjańskiego układu współrzędnych) oraz współczynnik kroku  $\tau > 0$ . Każda iteracja metody składa się z dwóch etapów: próbnego i roboczego. Etap próbny służy do zbadania lokalnego zachowania się funkcji celu  $F(\mathbf{x}^k)$  w niewielkim otoczeniu punktu  $\mathbf{x}^k$  poprzez wykonanie kroków próbnych o długości  $\tau$  we wszystkich kierunkach ortogonalnej bazy. Etap roboczy polega na przejściu do następnego punktu, wokół którego realizowany będzie następny etap próbny, lecz tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z wykonywanych kroków daje zmniejszenie wartości funkcji celu. W przeciwnym razie etap roboczy jest pomijany, a etap próbny wykonywany jest ponownie ze zmniejszoną wartością kroku  $\tau$ . Podstawowym kryterium zakończenia obliczeń jest  $\tau \leq \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dokładnością obliczeń.

Z kolei podstawową ideą metody zmiennej metryki [1] jest realizacja kolejnych iteracji i poszukiwania minimum funkcji celu wyznaczając kierunek poszukiwań z następującej zależności:

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) , \quad (18)$$

gdzie  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})$  jest macierzą hesjanu w punkcie  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Stąd w metodzie Newtona wymagana jest znajomość macierzy drugich pochodnych  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \partial^2 F(\mathbf{x}) / \partial x_i \partial x_j$ . Ponadto musi istnieć macierz odwrotna, a jej elementy są ciągłe i dodatnio określonymi elementami macierzy hesjanu  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ . Każda iteracja metody polega na tym, że mając dany punkt  $\mathbf{x}^k$  generuje się kierunek  $\mathbf{d}^k$  (18), a następnie, w wyniku minimalizacji w tym kierunku, otrzymuje się  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Za warunek zakończenia obliczeń przyjmuje się:

$$\|\nabla F(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon , \quad (19)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest dokładnością obliczeń.

#### 4. OPIS STANOWISKA POMIAROWEGO

Układ pomiarowy składał się z cienkiego (w postaci folii) oporowego grzejnika elektrycznego, dwóch symetrycznie rozmieszczonych względem grzejnika walcowych (płytek) próbek oraz czterech cienkich płytek miedzianych z termoparami. Całość zaizolowana była rozdrobionym korkiem. Cienka warstwa oporowa grzejnika zapewniała wyrównaną temperaturę na jej powierzchni. Do zewnętrznych powierzchni grzejnika i próbek przylegały cienkie płytki miedziane z przymocowanymi termoparami.

Wszystkie termopary były typu Ni-NiCr. Do zasilania grzejnika użyto zasilacza stabilizowanego sterowanego z mikrokomputera. Napięcie  $U$  i prąd  $I$  przepływający przez grzejnik mierzone były poprzez kartę pomiarową na mikrokomputerze. Ze względu na bardzo małą grubość grzejnika przyjęto, że strumień ciepła dopływający do próbek równa się mocy grzejnika:

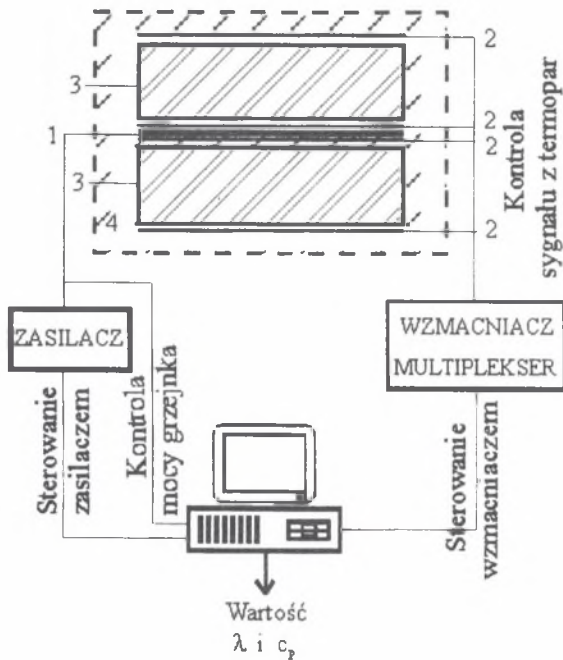
$$\dot{Q} = P = U \cdot I . \quad (20)$$

Gęstość strumienia ciepła dopływającego do każdej z próbek określa zależność:

$$\dot{q} = \frac{2P}{\pi d^2} \cdot \frac{W}{m^2} . \quad (21)$$

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na rys. 1.





Rys. 1. Schemat układu pomiarowego: 1–grzejnik, 2–płytki z termoparami, 3–próbki, 4–izolacja cieplna  
 Fig. 1. Scheme of measurement system: 1- heater, 2- plates with thermocouples, 3- samples, 4- thermal insulation

Stała termoelektryczna użytych termopar  $s = 25 \text{ K/mV}$ . Termopary podłączone były poprzez wzmacniacz (ze względu na niską wartość sygnałów z termopar) i multiplexer (konieczność przełączania odczytywanych w każdym kroku czasowych sygnałów z termopar) oraz kartę pomiarową do mikrokomputera. Temperatura powierzchni próbek od strony grzejnika i powierzchni zaizolowanych mierzona była termoparami połączonymi szeregowo. Dlatego w celu dalszej obróbki danych w zbiorze wynikowym zapisywano średnią arytmetyczną wartość wskazań odpowiednich termopar. Do sterowania całością pomiarów i rejestracji wyników napisano program komputerowy. Program ten napisano w języku Pascal ze względu na posiadane przez ten język wewnętrzne oprogramowanie (funkcje wewnętrzne) bardzo dobrze nadające się do ww. celów. Program ten jest dosyć uniwersalny i umożliwia między innymi:

1. Sterowanie z klawiatury wartościami mocy grzejnika i odłączanie grzejnika w przypadku korzystania z zewnętrznego źródła ciepła.
2. Obserwowanie na monitorze wartości prądu i napięcia pochodzącego z grzejnika.
3. Zadawanie z klawiatury liczby używanych termopar (max 24).
4. Obserwowanie na monitorze zmian temperatury na wszystkich używanych termoparach lub tylko wybranych.

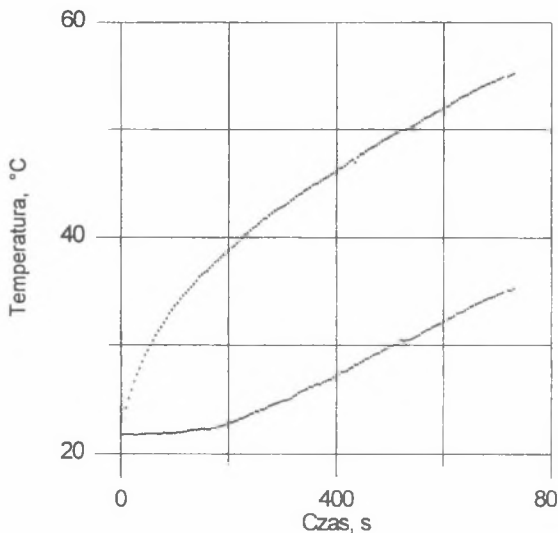


5. Zadawanie częstości odczytu i rejestracji wartości temperatury z termopar oraz prądu i napięcia z grzejnika.
6. Zadawanie z klawiatury maksymalnych wartości obserwowanych temperatur (w przypadku gdy układ nie dochodzi do stanu ustalonego).
7. Zadawanie z klawiatury czasu trwania eksperymentu.
8. Zapisywanie wyników pomiarów do zbioru w celu dalszej ich obróbki.

Dokładniejszy opis stanowiska pomiarowego i sposobu pomiarów podano w [2,3].

## 5. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

Przedmiotem badań było szkło organiczne (plexi). Na rys. 2 przedstawiono przykładowe przebiegi zmian temperatury powierzchni próbek w funkcji czasu.



Rys.2. Przykładowy przebieg zmian temperatury powierzchni próbek w funkcji czasu  
Fig. 2. Temperature distribution as a function of the time

Próbki wykonane były w kształcie płytek walcowych o średnicy  $d = 71,9$  mm i wysokości  $\delta = 12,45$  mm. W celu wyznaczenia współczynnika przewodzenia ciepła  $k$  i ciepła właściwego  $c$  wykonano szereg pomiarów dla różnych wartości generowanej mocy cieplnej. Przykładowa wartość mocy cieplnej grzejnika wynosiła  $P = 4,8$  W, co dawało równoważną gęstość strumienia ciepła na jedną próbkę  $\dot{q} = 591,4$  W/m<sup>2</sup>.

Wykorzystując dane pomiarowe oraz opracowany na bazie przedstawionego algorytmu obliczeń program komputerowy, obliczono obiema metodami optymalizacyjnymi średnie wartości współ-czynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego. Wartości otrzymane obiema metodami są prawie takie same i wynoszą  $k = 0.1839$  W/(mK),  $c = 1437.6$  J/(kgK).

## 6. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Otrzymane wyniki badań porównano z danymi literaturowymi [4], które dla badanego materiału podawane są w granicach: współczynnik przewodzenia ciepła  $k = (0.174-0.20)$  W/(mK) i ciepło właściwe  $c = (1420-2090)$  J/(kgK). Jak widać, przedstawione wyniki mieszczą się w podanych granicach. Stąd podany algorytm może być zastosowany do wyznaczania parametrów termofizycznych różnych materiałów stałych. Podstawową zaletą zaproponowanej metody, podobnie jak innych metod odwrotnych przewodzenia ciepła jest to, że może być stosowana do wyznaczania kilku parametrów termofizycznych: np.  $a$ ,  $c$ ,  $k$  w czasie wykonywania jednej serii pomiarów. Dodatkową zaletą jej jest również dość duża szybkość otrzymania wyników. Stąd w dalszych badaniach zamierza się zmodyfikować algorytm obliczeniowy w ten sposób, aby można było wyznaczyć bezpośrednio ww. wielkości w funkcji temperatury, podając do algorytmu obliczeń analityczne zależności na  $k$  i  $c$  w funkcji temperatury. Jeżeli natomiast chodzi o porównanie metod optymalizacyjnych, to metoda gradientowa jest szybsza pod warunkiem przyjęcia startowych wartości niewiadomych bliskich rzeczywistym, w przeciwnym przypadku algorytm staje się rozbieżny. Nie zauważono tego dla metody Hooka-Jeevsa. W przyszłości, w celu zwiększenia efektywności algorytmu obliczeniowego, zamierza się połączyć metodę bezgradientową z gradientową.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 8 T10B 012 18.

## LITERATURA

1. Kręglewski T i inni, *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, Warszawa 1984.
2. Kucypera S., Nadziakiewicz J., *Wyznaczanie współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego materiałów na podstawie charakterystyk temperaturowych próbek*, Materiały. XXXVI Sympozjonu Modelowanie w Mechanice, t. 2, ZNKMT, Gliwice 1997.

3. Kucypera S., Skorek., *Wyznaczanie właściwości cieplnych ciał stałych z wykorzystaniem metody filtracji dynamicznej*, Materiały XVII Zjazdu Termodynamików, Zakopane-Kraków, 1999, str. 689
4. Raźnievič K., *Tablice cieplne z wykresami*, WNT, Warszawa 1966

Recenzent: Dr inż. Antoni Guzik

### Abstract

The determination of the thermal properties of solid bodies by means of optimisation method and measurements data is based on the solution of the inverse heat conduction coefficient problem and on searching for the value of one or more coefficients describing the thermal properties of the body. The solution of the inverse heat conduction problem is generally performed in two stages:

In the first stage, basing on a suitably formulated mathematical model, the direct heat conduction problem is solved. The auxiliary measures and their characteristics (for example the temperature field) are also determined. These will be used in the second stage of the problem of solving the algorithm.

In the second stage making use of measurement data and previously determined quantities, the inverse problem is solved and the final quantities are determined.

In the present paper the mathematical model has been formulated and the experiment carried out in the way that the temperature distribution was received in the Fourier series. The final effect of solving the inverse heat conduction coefficient problem are the values of the heat conduction coefficient  $\lambda$  and specific heat  $c$  of the investigated material. This problem was formulated as an optimisation problem and solved by means of optimisation method e.g. Hook-Jeeves method and the modified Newton method.

In the presented paper an original method of the solving inverse heat conduction coefficient problem was proposed. This method is based on combining Fourier series with optimisation method. Fourier series are obtained by solving the direct heat conduction problem, whereas optimisation methods were used to control the calculations and to modify the problem in order to determine the values of the heat conduction coefficient and specific heat of the

material. The proposed method is based on multiple solutions of the direct problem. As a result of combining the experiment and the proposed way of the solving problem an effective method of determination the thermal parameters of the solid bodies has been found. The research results have been presented. The results received by means of present method has been compared with the results by means of previously used methods and data from literature.