

Stanisław KUCYPERA
Politechnika Śląska, Gliwice

ZASTOSOWANIE METODY BILANSÓW ELEMENTARNYCH I RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO DO ROZWIĄZYWANIA ODWROTNYCH ZAGADNIEŃ WSPÓLCZYNNIKOWYCH PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę bilansów elementarnych (MBE) i rachunek wyrównawczy, nazywany często uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów (UMNK) do równoczesnego wyznaczania współczynnika przewodzenia ciepła λ i ciepła właściwego c ciał stałych. Podano krótko charakterystykę (UMNK), założenia modelu matematycznego oraz algorytm obliczeń numerycznych. Rozwiązanie zagadnienia wymagało pomiaru temperatury w wybranych punktach próbki. Dlatego do tego celu wykorzystano skomputeryzowane stanowisko badawcze, na którym była możliwość sterowania całością pomiarów. Przedstawiono przykładowe wyniki badań. Wyniki porównano z danymi literaturowymi.

THE APPLICATION OF THE CONTROL VOLUME METHOD AND THE GENERALISED LEAST SQUARES METHOD TO SOLVE INVERSE PARAMETER PROBLEMS

Summary. In this paper the control volume method and generalised least squares method for estimating simultaneously the thermal conductivity λ and specific heat c have been applied. A short characteristic of this method, an assumption of a mathematical model and numerical algorithm has been given. To solve this problem the temperature had to be measured in selected points of the samples. For this purpose a computerized test stand was used with possibility of controlling the measurements. The sample results of the these researches have been presented. The results obtained by this method have been compared with previously published ones.

1. WSTĘP

Dokładna znajomość właściwości cieplnych materiałów, tzn. współczynnika przewodzenia ciepła λ , ciepła właściwego c jest bardzo istotna z punktu widzenia:

- wykorzystania materiałów o wymaganych właściwościach cieplnych w urządzeniach, w których jednym z ważnych kryteriów jest oszczędne wykorzystanie energii cieplnej,
- produkcji nowych materiałów o wymaganych właściwościach cieplnych,
- matematycznego modelowania różnego rodzaju procesów cieplnych.

Dlatego obserwuje się szeroki rozwój i stosowanie coraz to bardziej dokładnych metod wyznaczania właściwości cieplnych materiałów. W klasycznym podejściu wyznaczanie każdego parametru cieplnego wykonywano inną metodą eksperymentalną. Na przykład ciepło właściwe zwykle wyznaczano metodami kalorymetrycznymi, podczas gdy do wyznaczania współczynnika przewodzenia ciepła stosowano metody ustalonego przewodzenia ciepła. Ostatnio do wyznaczania właściwości cieplnych materiałów szeroko stosowane są metody nieustalonego przewodzenia ciepła. Metody te polegają na połączeniu rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła z danymi otrzymanymi z pomiarów dla stanu nieustalonego. Chociaż metody te wymagają bardziej skomplikowanych i droższych urządzeń to w sumie są one tańsze, ponieważ umożliwiają wyznaczanie równocześnie wielu parametrów cieplnych. Jednak odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła należą do klasy problemów źle uwarunkowanych. Oznacza to, że ich rozwiązanie jest zwykle bardzo czułe na niedokładności danych wejściowych, tzn. błędów pomiarowych. W celu ustabilizowania rozwiązania i zwiększenia dokładności obliczeń muszą być stosowane specjalne techniki matematyczne. Dotychczas najbardziej rozpowszechnionymi metodami stabilizacji rozwiązań odwrotnych zagadnień w technice cieplnej była metoda regularyzacji [6] i metoda rachunku wyrównawczego, nazywana często uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów. [1,3,4]. W zagadnieniach cieplnych metoda rachunku wyrównawczego była szeroko stosowana do uzgadniania bilansów masy i energii [3] oraz do rozwiązywania odwrotnych zagadnień brzegowych i początkowych przewodzenia ciepła [1,5]. W obecnej pracy zastosowano ją do wyznaczenia współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego materiałów stałych. W rzeczywistości metoda ta polega na poszukiwaniu minimum odpowiednio zdefiniowanej formy kwadratowej oraz uzgadnianiu wielkości mierzonych, obciążonych błędami, które połączone są z wielkościami niewiadomymi za pomocą tzw. równań warunków. W pracy tej równania warunków zapisano wykorzystując odpowiednio sformułowany model matematyczny przepływu ciepła w próbce. Model ten sporządzono stosując metodę bilansów elementarnych. Metoda ta należy do klasy metod różnicowych i ma przejrzystą interpretację fizyczną. Dlatego jest ona bardzo przydatna do matematycznego modelowania różnych procesów cieplnych. Otrzymane tą metodą równania opisują pole temperatury w próbce, którą nagrzewano na stanowisku po-

miarowym. Ponieważ uogólniona metoda najmniejszych kwadratów wymaga większej liczby równań niż niewiadomych, więc aby spełnić te wymagania, rozpatrywano nieustalony proces nagrzewania próbki i równania warunku sformułowano dla kilku kroków czasowych. Następnie wykorzystując ww. metodę rozwiązano odwrotne zagadnienie współczynnikowe przewodzenia ciepła i wyznaczono parametry cieplne badanej próbki. Przedstawiono przykładowe wyniki badań.

2. CHARAKTERYSTYKA ZASTOSOWANEJ METODY OBLICZENIOWEJ

2.1. Istota metody rachunku wyrównawczego i założenia modelu matematycznego

Istota metody polega na tym [3], że mając dany ciąg wielkości x_i ($i=1, \dots, M$), otrzymany z pomiaru badanego procesu, oraz wstępnie oszacowane wartości ciągu niewiadomych występujących w tym procesie β_j ($j=1, \dots, NP$), równania opisujące proces (tzw. równania warunków) można zapisać w następującej postaci:

$$f_k(x_1, \dots, x_M, \beta_1, \dots, \beta_{NP}) = 0, \text{ dla } k=1, \dots, NQ. \quad (1)$$

Ponieważ powyższe równania nie są dokładnie spełnione z uwagi na błędy pomiaru wielkości mierzonych, więc celem metody jest znalezienie takich poprawek wielkości mierzonych δx_i oraz poprawionych wartości niewiadomych β_j^* , aby dokładnie (w sensie przyjętego kryterium) spełniony był następujący układ równań:

$$f_k((x_1 + \delta x_1), \dots, (x_M + \delta x_M), \beta_1^*, \dots, \beta_M^*) = 0, k=1, \dots, NQ. \quad (2)$$

Najbardziej wiarygodne wartości poprawek wielkości mierzonych wyznaczane są z warunku minimum ważonej sumy kwadratów tych poprawek, tzn.:

$$\sum_{i=1}^M \frac{\delta x_i^2}{m_i^2} \Rightarrow \min. \quad (3)$$

Równania te można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\mathbf{G}_x^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{G}_x \Rightarrow \min, \quad (4)$$

gdzie:

m_i – średni błąd bezwzględny i -tej wielkości mierzonej,

G_X – macierz poprawek wielkości mierzonych,

V – macierz zawierająca wartości m_i^2 .

Aby można było przeprowadzić proces uzgadniania, muszą być spełnione dodatkowo następujące warunki:

$$NP < NQ < NP + M \quad \text{oraz} \quad NQ < M. \quad (5)$$

W klasycznej metodzie rachunku wyrównawczego problem minimalizacji rozwiązywany jest metodą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. [3]. W związku z tym równania warunków musiały być wprowadzane do algorytmu obliczeniowego w postaci liniowej.

$$AX + BY + C = 0, \quad (6)$$

gdzie:

A, B – odpowiednio macierze współczynników przy wielkościach mierzonych i niewiadomych,

C – wektor uwzględniający warunki brzegowe,

X – wektor zawierający wielkości mierzone,

Y – wektor zawierający wielkości wyznaczane.

W prezentowanej pracy do rozwiązania zagadnienia odwrotnego zastosowano iteracyjną procedurę Levenberga-Marquardta [2]. Pozwoliło to uniknąć procesu linearyzacji równań warunków, a tym samym możliwości wprowadzania dodatkowych błędów oraz dzięki temu algorytm uogólnionej metody najmniejszych kwadratów stał się bardziej uniwersalny. W celu osiągnięcia odpowiedniej dokładności obliczeń przy formułowaniu modelu matematycznego przyjęto następujące założenia:

1. Rozpatruje się proces nagrzewania nieskończenie rozległej płyty, tzn. takiej, dla której rozmiary wzdłużne są znacznie większe od grubości.
2. Materiał płyty posiada izotropowe właściwości cieplne.
3. Zakłada się, że przed rozpoczęciem procesu nagrzewania płyty rozkład temperatury w całej jej objętości jest wyrównany i równy temperaturze początkowej.
4. W chwili $\tau = 0$ w osi płyty zaczyna działać stały strumień ciepła $q = \text{idem W/m}^2$.
5. Zakłada się, że obie powierzchnie zewnętrzne płyty są dobrze chłodzone.

Wykorzystując powyższe założenia sformułowano model matematyczny oraz algorytm obliczeń numerycznych.

2.2. Sformułowanie modelu matematycznego oraz algorytmu obliczeń numerycznych

Dla jednowymiarowego przepływu ciepła zagadnienie początkowo-brzegowe może być opisane znany równaniem różniczkowym:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Warunki brzegowe:

- dla powierzchni grzanej:

$$\pm k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q, \quad (8)$$

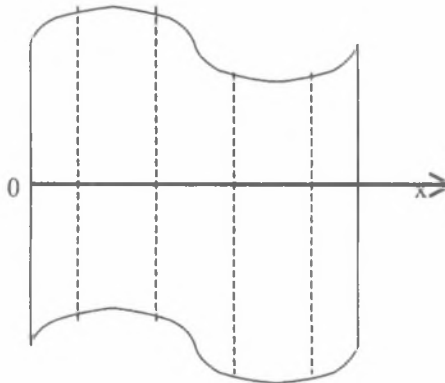
- dla powierzchni przeciwległej:

$$T|_{x=\pm\delta} = T_w = T_p, \quad (9)$$

- warunek początkowy:

$$T(x, \tau = 0) = T_p. \quad (10)$$

Dla potrzeb uogólnionej metody najmniejszych kwadratów równania przewodzenia ciepła zapisano w postaci różnicowej przeprowadzając dyskretyzację obszaru rozwiązania rys. 1.



Rys. 1. Geometria zagadnienia granicznego

Fig. 1. Geometry of the boundary problem

Następnie do budowy postaci różnicowej modelu wykorzystano metodę bilansów elementarnych (MBE) i w rezultacie uzyskano następujący nieliniowy układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}
 T_1^{k+1} &= (1 + b_{11}) \cdot T_1^k + b_{12} \cdot T_2 + \gamma_1 \\
 T_2^{k+1} &= b_{21} \cdot T_1^k + (1 + b_{22}) \cdot T_2^k + b_{23} \cdot T_3 \\
 T_3^{k+1} &= b_{32} \cdot T_2^k + (1 + b_{33}) \cdot T_3^k + b_{34} \cdot T_4 \\
 T_4^{k+1} &= b_{43} \cdot T_3^k + (1 + b_{44}) \cdot T_4^k + b_{45} \cdot T_5, \\
 T_5^{k+1} &= b_{54} \cdot T_4^k + (1 + b_{55}) \cdot T_5^k,
 \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie wyraz wolny γ_1 uwzględnia warunek źródła ciepła na powierzchni próbki:

$$\gamma_1 = \frac{q}{2 \cdot c \cdot \rho \cdot \Delta x_1} \tag{12}$$

Natomiast współczynniki b_{ij} określone są zależnościami:

- dla węzła „1” b_{ij} można zapisać:

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= -\frac{k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_1 \cdot (\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2})} \quad (\text{gd } i = j), \\
 b_{ij} &= \frac{k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_1 \cdot (\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2})} \quad (\text{gd } i \neq j).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Analogicznie dla węzła „5” b_{ij} jest określone:

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= -\frac{k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_5 \cdot (\Delta x_5 + \frac{\Delta x_4}{2})} \quad (\text{gd } i = j), \\
 b_{ij} &= \frac{k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_5 \cdot (\Delta x_5 + \frac{\Delta x_4}{2})} \quad (\text{gd } i \neq j).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Dla pozostałych węzłów b_{ij} ma postać:

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= -\frac{2 \cdot k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_i} \cdot \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) \quad (\text{gd } i = j), \\
 b_{ij} &= \frac{2 \cdot k \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_j)} \quad (\text{gd } i \neq j),
 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie:

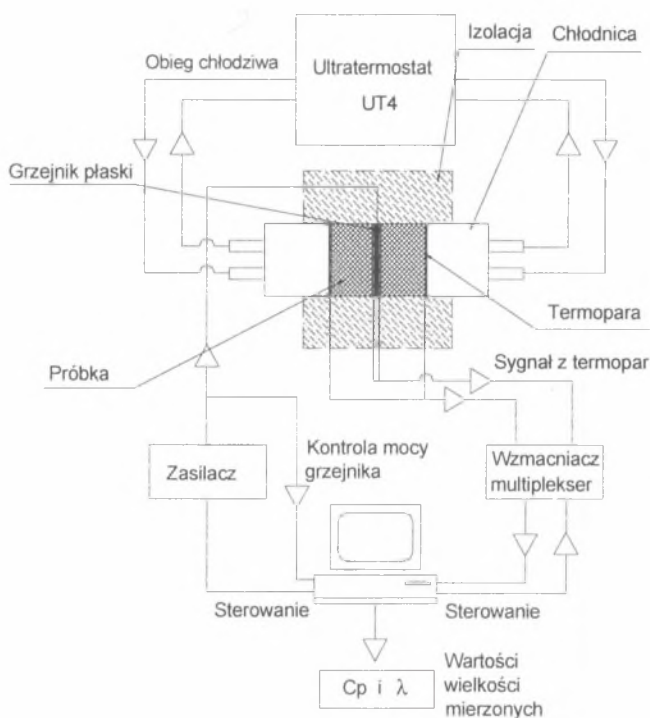
T_i^k, T_i^{k+1} – temperatura w i -tym węźle w k i $k+1$ kroku czasowym,

Δx_i – grubość i -tej warstwy w podziale różnicowym płyty,

$\Delta \tau$ – długość kroku czasowego.

3. OPIS METODY POMIAROWEJ

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na rys. 2. Układ pomiarowy składał się z cienkiego oporowego grzejnika elektrycznego, dwóch symetrycznie rozmieszczonych względem grzejnika walcowych próbek oraz czterech płytek miedzianych z termoparami. Walcowe



Rys. 2. Ogólny schemat układu pomiarowego
Fig. 2. Scheme of the test stand

powierzchnie próbek zaizolowane były rozdrobnionym korkiem. Zewnętrzne powierzchnie próbek chłodzone były (utrzymywano prawie stałą ich temperaturę) wodą z ultratermostatu. Do powierzchni grzanych i chłodzonych próbek przylegały cienkie płytki miedziane z przytworowanymi termoparami. Wszystkie termopary były typu Ni-NiCr. Do zasilania grzejnika użyto zasilacza sterowanego z mikrokomputera. Napięcie U i prąd I z grzejnika mierzone były poprzez kartę pomiarową na mikrokomputerze. Strumień ciepła dopływający do próbek:

$$\dot{Q} = P = U \cdot I. \quad (16)$$

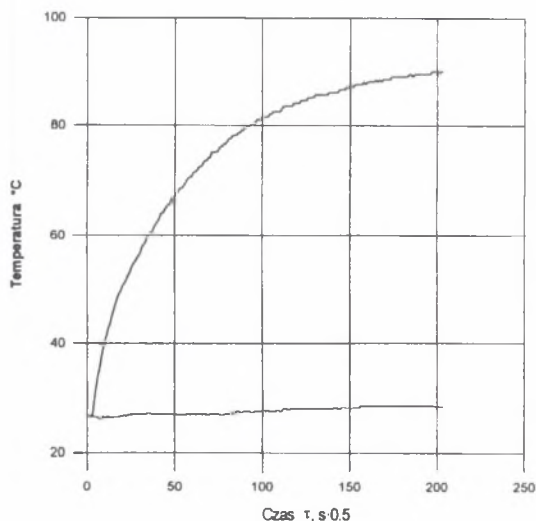
Gęstość strumienia ciepła dopływającego do każdej z próbek określa zależność:

$$q = \frac{2P}{\pi d^2}, \frac{W}{m^2} \quad (17)$$

Termopary podłączone były poprzez wzmacniacz (ze względu na niską wartość sygnałów z termopar) i multiplexer (konieczność przełączania odczytywanych w każdym kroku czasowym sygnałów z termopar) oraz kartę pomiarową do mikrokomputera. Termopary mierzące temperaturę powierzchni próbek od strony grzejnika oraz powierzchni chłodzonych były połączone szeregowo. Dlatego w celu dalszej obróbki danych w zbiorze wynikowym zapisywano średnią arytmetyczną wartość wskazań odpowiednich termopar. Do sterowania całością pomiarów i rejestracji wyników napisano program komputerowy. Program ten napisano w języku Pascal ze względu na posiadane przez ten język wewnętrzne oprogramowanie bardzo dobrze nadające się do ww. celów. Program ten posiada wiele możliwości operacyjnych.

4. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

Przedmiotem badań było szkło organiczne (plexi). Na rys. 3 przedstawiono otrzymany z mikrokomputera przykładowy przebieg zmian temperatury powierzchni próbek w funkcji czasu.



Rys. 3. Przykładowy przebieg zmian temperatury powierzchni próbki w funkcji czasu
Fig. 3. Temperature of the sample as a function of the time

Próbki wykonane były w kształcie cylindrów o średnicy $d = 40$ mm i wysokości $\delta = 10$ mm. W celu wyznaczenia dyfuzyjności cieplnej wykonano szereg pomiarów dla różnych wartości generowanej mocy cieplnej. Przykładowa wartość mocy cieplnej grzejnika wynosiła $P = 2.12$ W, co dawało równoważną gęstość strumienia ciepła na jedną próbkę $\dot{q} = 844$ W/m². Wykorzystując dane pomiarowe oraz opracowany algorytm obliczeń numerycznych i program komputerowy, obliczono współczynnik przewodzenia ciepła i ciepło właściwe. Wartości te wynoszą $\lambda = 0.1842$ W/(mK), $c = 1490$ J/(kgK). W literaturze wartości te dla plexi podawane są w granicach: współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = (0.174-0.20)$ W/(mK) i ciepło właściwe $c = (1420-2090)$ J/(kgK). Stąd widać, że otrzymane wyniki mieszczą się w podanych przedziale.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów należy do metod stochastycznie optymalnych. Zastosowanie jej do rozwiązywania odwrotnych współczynnikowych zagadnień przewodzenia ciepła umożliwia:

- jednoznacznie określać najbardziej prawdopodobne wartości niewiadomych,
- uściślenie niedokładności wielkości mierzonych,
- na bieżąco kontrolować dokładność obliczeń.

Stąd może być z powodzeniem stosowana do wyznaczania właściwości cieplnych różnych materiałów.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 8 T10B 012 18

LITERATURA

1. Guzik A., Styrylska T., *Zastosowanie filtracji opartej na metodzie najmniejszych kwadratów do wyznaczania nieustalonych pól temperatury*, Materiały XVII Zjazdu Termodynamików, Zakopane-Kraków, 1999, str. 507
2. IMSL Library, User's Manual Version 1.0, Houston, Texas 1987.
3. Szargut J i inni, *Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej*, PAN Warszawa, 1984

4. Szargut J., Styrylska T., Kolenda Z., *Numeryczne modelowanie procesów wymiany ciepła i masy uogólniona metodą najmniejszych kwadratów*, Materiały IX Sympozjum wymiany ciepła i masy, Augustów 1995, str. 301
5. Skorek J., *Zastosowanie metod stochastycznych i spektralnych do rozwiązywania granicznych zadań odwrotnych przewodzenia ciepła*, ZN. Pol. Śl. s. Energetyka z. 119, Gliwice 1994
6. Tichonov A.N., Arsenin V., *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston & Sons, Washington D.C. 1977

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kalinowski

Abstract

In this paper a combined experimental and numerical method of determining the thermal properties, including the thermal conductivity and specific heat of the different solid bodies, has been presented. The knowledge of the true values of the thermal properties of materials is very important for designers and users of machines and equipment subjected to unsteady thermal influences. It is important while mathematical modelling various thermal processes, as well. The determination of the thermal properties of a solid body is based on the solution of the inverse heat conduction problem in an investigated sample with given boundary conditions and a given geometry. This problem belongs to the class of ill-posed problems. It means that the solution of this problem is usually very sensitive to inaccuracies of input data, e.g. measurements errors. To stabilize the solution, a special mathematical method has to be applied. Up to the present day the most widespread stabilization methods of solving inverse problems in the thermal techniques are the regularisation method and the least squares adjustment method, often called generalised least squares method. In this paper the generalised least squares method has been applied. This method is based on the search for the minimum of a suitably defined quadratic function and the adjustment of measured values with errors in connective with unknown values by the so-called constraint equation. In the standard generalised least squares method the constraint equations have to be linear. But in the case of the inverse heat conduction coefficient problem the constraint equations are nonlinear. Therefore,

in the presented paper the modified version of the generalised least squares method was applied. This method enables us to solve nonlinear problems, whereas in order to determine measurement values in selected points of the investigated material the computerized measurement stand has been used. The stand consists of two symmetrical probes heated up by an electrical heater which is placed between them. The temperature was measured by four thermocouples. To control the measurements and to record the measurement values, an own computer program was worked out. Constraint equations were formulated using a suitable mathematical model of heat conduction in the sample. This model was formulated using the energy elemental balance method, the so-called control volume method. This method belongs to the class of differential methods and has an essential clear physical interpretation. Therefore it is especially effective in mathematical modelling of various thermal problems. The obtained equations described the temperature distribution within the samples, which a heated up on the test stand. Because the generalised least squares method requires more equations than unknown values, so to comply with the requirements, the unsteady heating process of the sample was investigated and constraint equations for some time steps were formulated. Next, using this method, the inverse heat conduction problem was solved and the thermal conductivity and specific heat of the sample were determined. A Exemplary research results have been presented.