ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985
Seria: TRANSPORT z. 3 Nr kol. 829

Jacek GRAJNERT

Instytut Konstrukcji
i Eksploatacji Maszyn
Politechnika Wrocławska

OCENA STATECZNOŚCI ROZWIĄZAŃ MODELU WSPÓŁPRACY ODBIERAKA PRĄDU Z SIECIĄ TRAKCYJNĄ

Streszczenie. W artykule sformułowano prosty model dyskretny współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Dokonano oceny stateczności rozwiązań modelu w porównaniu z oceną innych znanych modeli. Porównano rozwiązania uściślonego modelu z badaniami na szlaku wykonanymi przez COBiRTK. Podano przykłady zastosowania modelu do analizy właściwości dynamicznych układu odbierak prądu - sieć trakcyjna.

Wstęp

Modelowanie matematyczne współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną ma istotne znaczenie dla doboru parametrów konstrukcyjnych systemu odbierak - sieć. Znanych jest wiele modeli matematycznych opisujących współpracę odbieraka z siecią trakcyjną [4], [6], [9]. Ogólnie ze względu na sposób odwzorowania sieci trakcyjnej można podzielić te modele na następujące klasy:

- modele dyskretne jedno i wielomasowe,
- modele ciągłe.

Modele dyskretne jednomasowe charakteryzują się dużą prostotą i łatwością praktycznego zastosowania, kosztem dokładności odwzorowania własności przede wszystkim sieci trakcyjnej. Wobec tego w szczególności nadają się do analizy wpływu na jakość współpracy parametrów odbieraka prądu. Nie można za ich pomocą analizować wpływu niektórych parametrów konstrukcyjnych sieci, a także współpracy sieci z kilkoma odbierakami prądu. Modele dyskretne wielomasowe są modelami numerycznymi opartymi na zasadzie zastępowania układu ciągłego dużą liczbą elementów skupionych. Zastępowanie struny ciągłej masami skupionymi jest procesem słabo zbieżnym, wobec tego, aby uzyskać wymaganą dokładność, konieczna jest duża liczba mas skupionych. Ogranicza to możliwość modelowania sieci trakcyjnej do kilku przęseł ze względu na pojemność stosowanych do rozwiązania maszyn cyfrowych.

Modele ciągłe nie mają praktycznego znaczenia, gdyż poza prostymi przypadkami (np. stała siła przesuwająca się wzdłuż struny) nie uzyskuje się rozwiązań w formie zamkniętej.

System dynamiczny odbierak prądu - sieć trakcyjna jest określony następującą czwórką uporządkowaną:

$$\langle P,\ v,\ P_K,\ Z \rangle \tag{1}$$

gdzie:

P - zbiór parametrów istotnych systemu,

v - prędkość ruchu odbieraka wzdłuż sieci trakcyjnej (wejście do systemu),

P_K - siła oddziaływania na styku między odbierakiem a siecią (wyjście z systemu),

Z - zbiór zakłóceń (np. oddziaływanie drgań lokomotywy, działanie wiatru itp.).

Modelowanie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną ma za zadanie odwzorowanie parametrów systemu przy zachowaniu znanego wejścia (określoną prędkością), by otrzymać zależność na siłę stykową. Wartość siły stykowej determinuje jakość współpracy odbieraka z siecią.

Modelowany zbiór parametrów istotnych systemu jest sumą dwóch podzbiorów:

$$P = Q \cup S \tag{2}$$

gdzie:

Q - zbiór parametrów istotnych odbieraka prądu,

S - zbiór parametrów istotnych sieci trakcyjnej.

Dla potrzeb modeli dyskretnych jednomasowych zbiory te są określone następująco:

$$Q = \left\{m_o,\ P_{ST},\ P_{AE},\ w_o,\ b_o\right\} \tag{3}$$

gdzie:

m_o - masa zredukowana do punktu styku z przewodem jezdnym,

P_{ST} - siła docisku statycznego,

P_{AE} - składowa pionowa siły oporu aerodynamicznego,

w_o - siła tarcia suchego w parach kinematycznych,

b_o - współczynnik tarcia lepkiego.

$$S = \left\{\omega_s,\ k_s,\ m_s,\ w_s,\ b_s,\ L,\ p,\ f\right\} \tag{4}$$

gdzie:

- ω – częstość kołowa drgań własnych w punkcie styku z odbierakiem prądu,
- k_s – sztywność w kierunku pionowym w punkcie styku,
- m_s – masa zredukowana do punktu styku,
- w_s – siła tarcia suchego w punkcie styku,
- b_s – współczynnik tarcia lepkiego w punkcie styku,
- L – długość przęsła (odległość między podporami),
- p – pochylenie przewodu jezdnego,
- f – strzałka zwisu przewodu jezdnego.

Parametry ω_s, k_s, m_s, w_s, b_s są zależne od położenia punktu styku, są więc funkcjami drogi. Uwzględniając znany związek:

$$x = v\,t \tag{5}$$

gdzie:

- x – współrzędna położenia wzdłuż sieci trakcyjnej,
- t – czas

wyżej wymienione parametry można wyrazić przez funkcje czasu. Przy założeniu, że $v = \mathrm{const}$, są to funkcje okresowe, o okresie:

$$\Omega = \frac{2\pi v}{L} \tag{6}$$

Szczegółowy opis parametrów (3) i (4) można znaleźć np. w pracach [2], [6], [9].

W znanych dyskretnych, jednomasowych modelach współpracy odbieraka z siecią trakcyjną, w których założono zmienną masę zredukowaną sieci trakcyjnej (np. modele Kumezawy, Pascucciego [4]) przyjmuje się, że siła bezwładności jest iloczynem masy i przyspieszenia. Zgodnie z definicją Newtona siła bezwładności jest natomiast pochodną wektora pędu, wobec tego w modelach współpracy odbieraka z siecią trakcyjną powinna być zdefiniowana następująco:

$$P_B = \frac{d}{dt}\left(m_s(t)\,\frac{dy}{dt}\right) = m_s\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dm_s}{dt}\,\frac{dy}{dt}, \tag{7}$$

gdzie:

- P_B – siła bezwładności oddziałująca na masę zredukowaną sieci trakcyjnej,
- y – przemieszczenie pionowe punktu styku.

Uwzględnienie prawidłowej definicji siły bezwładności ma istotny wpływ na zakresy stateczności rozwiązań modelu. W niniejszym opracowaniu przedstawiono prosty model dyskretny współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, w którym tę nieścisłość usunięto.

Model współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną

Na rys. 1 przedstawiono model dynamiczny systemu odbierak prądu - sieć trakcyjna, w którym masę sieci trakcyjnej skupiono w punkcie styku z odbierakiem prądu. Zgodnie z zasadą d'Alemberta równowaga sił działających na masę skupioną odbieraka prądu jest następująca:

$$m_o \ddot{y}_o = P_{ST} + P_{AE} - P_K \tag{8}$$

gdzie:

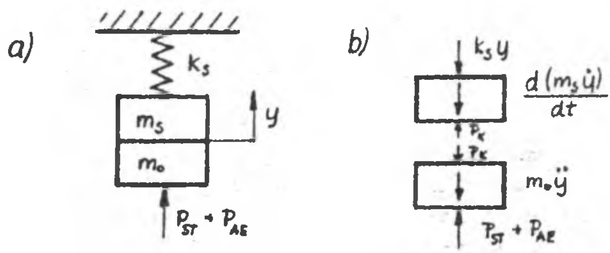
y_o - przemieszczenie pionowe masy skupionej odbieraka,

natomiast równowaga sił działających na masę zastępczą sieci trakcyjnej jest następująca:

$$\frac{d(m_s \dot{y}_s)}{dt} + k_s y_s = P_K \tag{9}$$

gdzie:

y_s - przemieszczenie pionowe masy zastępczej sieci.



Rys. 1. Model dynamiczny współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną: a) model, b) siły działające na masy układu

Podczas prawidłowej współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (tzn. bez oderwań ślizgacza od przewodu jezdnego) jest spełniony warunek:

$$P_K > 0 \tag{10}$$

wtedy:

$$y_o = y_s = y \tag{11}$$

a ruch układu po wyeliminowaniu z równań (8) i (9) nieznanej siły P_K jest opisany równaniem:

$$(m_s + m_o)\,\ddot{y} + \dot{m}_s\,\dot{y} + k_s\,y = P_{ST} + P_{AE} \tag{12}$$

lub ogólnie:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = P \tag{13}$$

Równanie (13) jest podstawą jednomasowych modeli współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, które różnią się założeniami określającymi postać współczynników a, b i c równania (13). W tabeli 1 zestawiono dwa podstawowe znane modele oraz model proponowany w niniejszym opracowaniu.

Tabela 1

Współczynniki jednomasowych modeli współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (równanie (13))

<table>
<tr><th rowspan="2">Współczynnik</th><th colspan="3">Model</th></tr>
<tr><th>I Niblera [4]</th><th>II Kumezawy [4]</th><th>III propozycja [6]</th></tr>
<tr><td>a</td><td>$m_o + m_s = \text{const}$</td><td colspan="2">$m_o + \frac{\bar{k}_s}{\omega_s^2}(1 - \varepsilon_k \cos\Omega t)$</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="2">0</td><td>$\frac{\bar{k}_s\,\varepsilon_k\,\Omega}{\omega_s^2}\sin\Omega t$</td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="3">$\bar{k}_s(1 - \varepsilon_k \cos\Omega t)$</td></tr>
<tr><td>P</td><td colspan="3">$P_{ST} + P_{AE} = \text{const}$</td></tr>
</table>

Przy opisie przedstawionych w tabeli 1 współczynników posłużono się następującymi założeniami:

Model I (Niblera):

- masa zredukowana sieci trakcyjnej do punktu styku jest stała,
- sztywność sieci trakcyjnej w kierunku pionowym mierzona w punkcie styku jest sinusoidalnie zmienna wzdłuż przęsła, przy czym współczynnik nierównomierności sztywności definiuje się następująco:

$$\varepsilon_k = \frac{k_{smax} - k_{smin}}{2\bar{k}_s}, \tag{14}$$

gdzie:

k_{smax} - maksymalna sztywność sieci trakcyjnej na długości przęsła,
k_{smin} - minimalna sztywność sieci trakcyjnej na długości przęsła,
$\bar{k}_s$ - wartość średnia sztywności.

Model II (Kumezawy, Pascucciego):

- masa zredukowana sieci trakcyjnej jest zmienna wzdłuż przęsła i proporcjonalna do sztywności wg zależności:

$$m_s = \frac{k_s}{\omega_s^2} \tag{15}$$

- częstość drgań własnych sieci trakcyjnej ω_s mierzona w dowolnym punkcie sieci jest stała,
- sztywność sieci jest sinusoidalnie zmienna wzdłuż przęsła.

Model III (propozycja):

- założenia jak dla modelu II,
- uwzględnia się dodatkowo pochodną zmiennej masy zredukowanej sieci w wyrażeniu na siłę bezwładności (zgodnie z (9)).

We wszystkich przedstawionych powyżej modelach przyjęto, że ruch rozpoczyna się od środka przęsła.

Ocena stateczności rozwiązań modeli dyskretnych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną

Równanie (13) przy założeniu współczynników podanych w tab. 1 jest sprowadzalne do równania typu Hilla:

$$\ddot{z} + (a_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos 2i\tau)\, z = 0 \tag{16}$$

Zgodnie z twierdzeniem Floqueta [3] rozwiązanie szczególne równania (16) ma postać:

$$z(\tau) = e^{\mu\tau}\,\Phi(\tau) \tag{17}$$

gdzie:

μ - wykładnik charakterystyczny (w ogólności liczba zespolona),
$\Phi(\tau)$ - funkcja okresowa o okresie π lub 2π.

Rozwiązanie ogólne równania (16) jest kombinacją liniową dwóch rozwiązań szczególnych liniowo niezależnych:

$$z(\tau) = c_1 e^{\mu\tau} \Phi(\tau) + c_2 e^{-\mu\tau} \Phi(\tau) \tag{18}$$

Z przedstawionej postaci rozwiązanie ogólnego (18) wynika, że stateczność rozwiązania, przy okresowości funkcji $\Phi(\tau)$, zależy od postaci wykładnika charakterystycznego μ. Rozwiązanie będzie stateczne jeżeli wykładnik μ przyjmie wartość urojoną. Wstawiając do równania (16) złożoną postać rozwiązania (17) otrzymuje się równanie dla $\Phi(\tau)$:

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + 2\frac{d\Phi}{d\tau} + (a_0 + \mu^2 + 2\sum_{i=1} a_i \cos 2i\tau)\Phi = 0 \tag{19}$$

W pierwszym przybliżeniu, dla n-tego obszaru niestateczności funkcji $\Phi(\tau)$ przyjmuje się w postaci:

$$\Phi(\tau) = \sin(n\tau - \sigma) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

gdzie:

σ – nowy nieznany parametr.

Podstawiając (20) do (19) oraz porównując do zera współczynniki przy sin $n\tau$ i cos $n\tau$ jest:

$$\begin{aligned} &2\mu n \sin\sigma + (a_0 + \mu^2 - n^2)\cos\sigma - a_n \cos\sigma = 0 \\ &2\mu n \cos\sigma - (a_0 + \mu^2 - n^2)\sin\sigma - a_n \sin\sigma = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Stąd:

$$\mu^2 = -(a_0 + n^2 \pm \sqrt{4n^2 a_0 + a_n^2} \tag{22}$$

Rozwiązanie jest niestateczne, gdy zachodzi warunek:

$$\mu^2 > 0 \tag{23}$$

co odpowiada warunkowi:

$$(a_0 - n^2 + a_n)(a_0 - n^2 - a_n) < 0 \tag{24}$$

lub

$$|a_n| > |a_0 - n^2| \tag{25}$$

Na granicy obszarów stateczności i niestateczności jest $\mu = 0$, więc w pierwszym przybliżeniu linie graniczne n-tego obszaru niestateczności dane są równaniem:

$$a_0 = n^2 \pm a_n \tag{26}$$

Dokonując w równaniu (13) podstawienia

$$\Omega t = 2\tau \tag{27}$$

zmieniając zmienną

$$z = y - y(0) \tag{28}$$

oraz eliminując pierwszą pochodną przez transformację [3]:

$$z = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t b(s)\,ds\right)\cdot z_1 \tag{29}$$

sprowadzono równanie (13) do postaci Hilla we wszystkich trzech przypadkach modeli wyrażonych równaniem (13) i współczynnikami zebranymi w tabeli 1.

Współczynniki równania Hilla w przypadku modelu I, II, III współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną zebrano w tabeli 2.

Tabela 2

Współczynniki równań modeli współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną sprowadzonych do postaci Hilla

Model	Współczynniki		
	a_0	a_1	a_2
I Niblera	$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}}$	$\frac{2\bar{k}_s \varepsilon_k}{\Omega^2 \bar{m}}$	0
II Kumezawy	$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}}\left(1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2}\right)$	$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}}(\varepsilon_k - \varepsilon_s)$	$\frac{2\bar{k}_s \varepsilon_k \varepsilon_s}{\Omega^2 \bar{m}}$
III propozycja	$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}}\left(1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2_s}{2}$	$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}}(\varepsilon_k - \varepsilon_s) + 4\varepsilon_s$	$\frac{2\bar{k}_s \varepsilon_k \varepsilon_s}{\Omega^2 \bar{m}} + \frac{7}{2}\varepsilon_s^2$

Dodatkowo przyjęto oznaczenia:

$$\bar{m} = m_o + \frac{\bar{k}_s}{\omega_s^2} \tag{30}$$

$$\varepsilon_s = \frac{k}{\frac{m_o \omega_s^2}{k_s} + 1} \tag{31}$$

Pominięto wszystkie człony równań zawierające ε w potędze wyższej niż druga, ponieważ $\varepsilon \ll 1$.

Zgodnie z zależnością (26) obszary niestateczności rozwiązań modeli I, II i III są następujące:

Model I (Nibler):

$$\frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}} = 1 \pm \frac{2\bar{k}_s \varepsilon_k}{\Omega^2 \bar{m}} \tag{32}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$R = \frac{4\bar{k}_s}{\Omega^2 \bar{m}} \qquad i \qquad S = \frac{2\bar{k}_s \varepsilon_k}{\Omega^2 \bar{m}} \tag{33}$$

jest:

$$R = 1 \pm S \tag{34}$$

Z definicji R i S wynika relacja między tymi parametrami:

$$\frac{R}{S} = \frac{2}{\varepsilon_k} \tag{35}$$

Z zależności tej wynika, że relacja ta zależy wyłącznie od konstrukcji sieci trakcyjnej i jest stała bez względu na częstość wymuszeń parametrycznych (prędkość ruchu odbieraka wzdłuż sieci). Na podstawie równań (34) i (35) wyznaczono zakres prędkości rezonansowych (krytycznych) w pierwszym obszarze niestateczności:

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}\right)\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}}} < v_k < \frac{L}{\pi}\sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon_k}{2}\right)\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}}} \tag{36}$$

Obszar niestateczności dla $n = 2$ jest zgodnie z równaniem (26) dany zależnością:

$$R = 4 \tag{37}$$

Wynika stąd prędkość krytyczna dla tego obszaru niestateczności:

$$v_k = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}}} \tag{38}$$

Wyznaczone obszary rozwiązań niestatecznych w funkcji parametrów R i S przedstawiono na rys. 2a.

Model II (Kumezawa, Pascucci):

dla $n = 1$

$$R = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2}} \pm \frac{1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k}}{1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2}} S \tag{39}$$

dla $n = 2$

$$R = \frac{4}{1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2}} \pm \frac{\varepsilon_s}{2(1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_s}{2})} S \tag{40}$$

Zakres prędkości rezonansowej dla drugiego obszaru niestateczności ($n = 2$) jest dany nierównością:

$$\frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}} (1 - \frac{3}{4} \varepsilon_k \varepsilon_s)} < v_k < \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}} (1 - \frac{1}{4} \varepsilon_k \varepsilon_s)} \tag{41}$$

Graficzną interpretację obszarów niestatecznych rozwiązań w funkcji parametrów R i S przedstawiono na rys. 2b.

Model III

dla $n = 1$

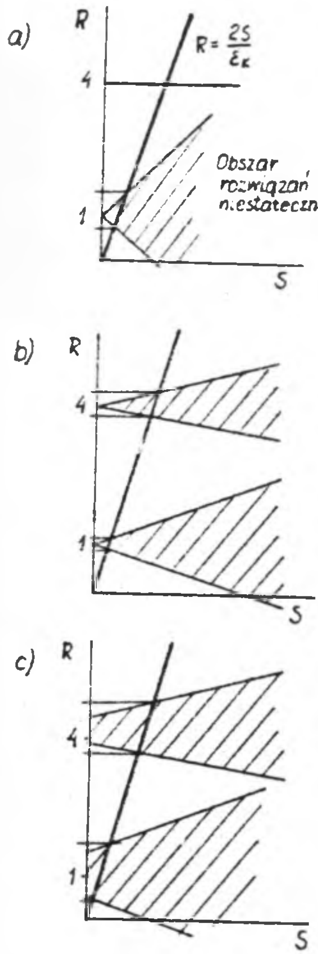
$$R = \frac{1 + \frac{\varepsilon_s^2}{2}}{1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}} \pm \left[\frac{1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k}}{1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}} S + \frac{2 \varepsilon_s}{1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}} \right] \tag{42}$$

dla $n = 2$

$$R = \frac{4 + \frac{\varepsilon_s^2}{2}}{1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}} \pm \left[\frac{\varepsilon_s}{2\left(1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}\right)} S + \frac{7}{4} \frac{\varepsilon_s^2}{1 - \frac{\varepsilon_s \varepsilon_k}{2}} \right] \tag{43}$$

Graficzną interpretację obszarów niestatecznych rozwiązań w funkcji parametrów R i S przedstawiono na rys. 2c. Zakres prędkości krytycznej dla drugiego obszaru niestateczności rozwiązań ($n = 2$) jest dany nierównością:

$$\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_s}{\bar{m}} \, \frac{4 - 3\varepsilon_s \varepsilon_k}{16 + 9\varepsilon_s^2}} < v_k < \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{k_s}{m} \, \frac{4 - \varepsilon_s \varepsilon_k}{16 - 5\varepsilon_s^2}} \tag{44}$$



Rys. 2. Obszary rozwiązań niestatycznych (pola zakreskowane): a) model I, b) model II, c) model III

Z przedstawionej analizy wynika, że uwzględnienie zmienności masy zredukowanej sieci trakcyjnej bez uwzględnienia pochodnej zmiany masy w równaniu powoduje zawężenie zakresów niestatecznych rozwiązań, praktycznie eliminując je, gdy $\varepsilon_k = \varepsilon_s$, co odpowiada przypadkowi ruchu odbieraka nie posiadającego masy ($m_o = 0$). Uwzględnienie pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej w równaniu współpracy (jak to zaproponowano w modelu III) prowadzi do rozszerzenia zakresów niestatecznych rozwiązań równania współpracy. Na prawidłowość tego rozwiązania wskazuje fakt, że w przypadku, gdy $S = 0$, co odpowiada $\varepsilon_k = 0$ (czyli sztywność sieci trakcyjnej jest stała), wystąpi rezonans parametryczny spowodowany zmiennością masy (jeżeli masa zredukowana sieci nie jest wprost proporcjonalna do jej sztywności).

W tabeli 3 zebrano obliczone prędkości krytyczne wg modeli I, II, i III współpracy odbieraka prądu typu AKP-4E z sieciami trakcyjnymi Y_pC120-2C i 2C120-2C.

Tabela 3

Prędkości krytyczne współpracy odbieraka prądu AKP-4E (m_o = 32 kg) z sieciami Y_pC120-2C i 2C120-2C

Sieć trakcyjna		Prędkość krytyczna [km/h]		
		Model I	Model II	Model III
Y_pC120-2C	$\omega_S = 4,68\ \frac{rad}{s}$ $\bar{k}_s = 3450\ \frac{N}{m}$ $\varepsilon_k = 0,42$	156,5	152,4 - 158,5	147,4 - 161,8
2C120-2C	$\omega_s = 5,35\ \frac{rad}{s}$ $\bar{k}_s = 3670\ \frac{N}{m}$ $\varepsilon_k = 0,21$	193,2	189,8 - 191,6	188,4 - 192,5

Wykresy stateczności rozwiązań modeli współpracy odbieraka prądu AKP-4E z sieciami Y_pC120-2C i 2C120-2C przedstawiono na rys. 3.

Rozwiazanie analogowe modelu III

Do rozwiązania zaproponowanego modelu III posłużono się techniką analogową. W celu porównania uzyskanych wyników z badaniami na szlaku model uściślono, wprowadzając:

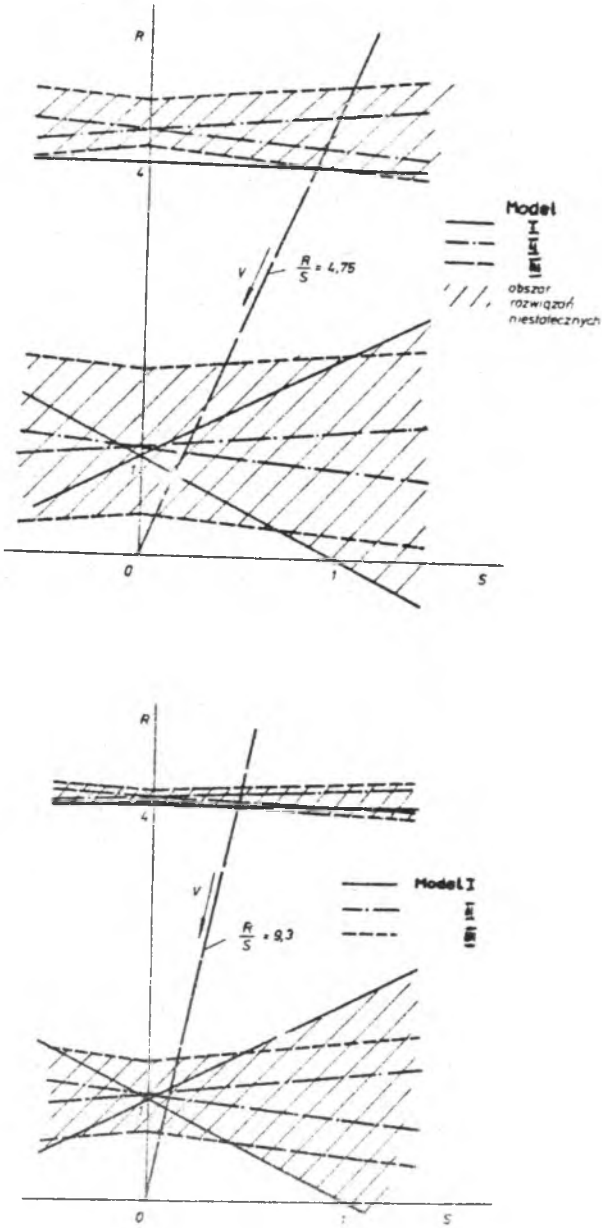
- zmienny poziom zawieszenia sieci trakcyjnej,
- dokładniejszy opis sztywności sieci trakcyjnej,
- tłumienie lepkie i tarcie suche.

Równanie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną jest wtedy następujące:

$$\left[m_s(t) + m_o\right] \ddot{y} + \dot{m}_s(t)\dot{y} + (b_o + b_s)\dot{y} + (w_o + w_s)\, f(\dot{y}) + k_s(t)\,(y - \xi) = P_{ST} + P_{AE} \tag{45}$$

gdzie:

b_o - współczynnik tarcia lepkiego w układzie odbieraka prądu,



Rys. 3. Obszery rozwiązań niestatecznych modeli I, II, III współpracy odbieraka prądu typu AKP-4E z sieciami trakcyjnymi:

a) Y_pC120-2C, b) 2C120-2C

b_s - współczynnik tarcia lepkiego w sieci trakcyjnej zredukowany do punktu styku (przyjęto, że b_s = const. na długości przęsła),

w_o - siła tarcia suchego w układzie kinematycznym odbieraka prądu,

w_s - siła tarcia suchego w sieci trakcyjnej zredukowana do punktu styku (przyjęto, że w_s = const. na długości przęsła),

$f(\dot{y})$ - funkcja zmienności siły tarcia suchego, przyjęta jako aproksymacja liniowa funkcji $tgh(10\dot{y})$,

$\xi(t)$ - zmienna wysokość zawieszenia sieci trakcyjnej.

Do porównania rozwiązań analogowych równania (45) wykorzystano wyniki badań COBiRTK w Warszawie wykonanych w ramach pracy [1]. Badania przeprowadzone były w dniach 16-21.11.1976 r. i w dniach 7-17.12.1976 r. na torze nr 1 szlaku Psary - Włoszczowa Pn (CMK) na odcinku naprężania sieci trakcyjnej zawartym między słupami trakcyjnymi 52-3 i 53-17. Odcinek pomiarowy wyposażony jest w sieć trakcyjną typu 2C120-2C. W badaniach użyto odbieraka prądu AKP-4E w wersji zmodernizowanej.

W badaniach analogowych na podstawie prac [1], [8] przyjęto następujące dane:

- sieć trakcyjna (x - współrzędna mierzona od środka przęsła):

$$k_s = \begin{cases} 4043\left(1 - 0{,}295\cos\frac{2\pi x}{L}\right) \left[\frac{N}{m}\right] & \text{gdy} \quad -24\ \text{m} < x < 24\ \text{m} \\ 4945\left(1 + 0{,}09\cos\frac{2\pi x}{L}\right) \left[\frac{N}{m}\right] & \text{gdy} \quad \begin{array}{l} 24\ \text{m} \leqslant x < 35\ \text{m} \\ -35\ \text{m} < x \leqslant -24\ \text{m} \end{array} \end{cases}$$

(sztywność aproksymowano na podstawie pomiaru na odcinku pomiarowym - współczynnik korelacji zaproponowanej aproksymacji $R = 0{,}9449$).

$$\omega_n = 5{,}34\ \text{rad/s},$$

$$w_s = 0, \quad b_s = 0$$

Wysokość zawieszenia sieci aproksymowano odcinkami prostej odwzorowującymi średnie pochylenie przewodu jezdnego w przęśle.

- odbierak prądu:

$$m_o = 34{,}8\ \text{kg}, \quad b_o = 50\ \text{Ns/m}, \quad w_o = 20\ \text{N},$$

$$P_{ST} = 80\ \text{N}, \quad P_{AE} = 0{,}33\ v^2 \quad (v\ \text{w}\ \text{m/s}).$$

Podczas badań na szlaku, wykonanych przez COBiRTK, na odcinku pomiarowym zrealizowano jazdy pomiarowe stałą, stopniując prędkość co 20 km/h w zakresie od 100 km/h do 160 km/h. Wykonano szereg pomiarów, spośród których wybrano przejazdy z następującymi prędkościami średnimi (zrealizowanymi): 101,5 km/h, 115 km/h, 137,5 km/h, 148 km/h, 158 km/h, 165,5 km/h. Przejazdy z tymi samymi prędkościami odtworzono posługując się równaniem (45), które zamodelowano na maszynie analogowej WAT 102. Schemat analogowy przedstawiono na rys. 4. Ze względu na brak danych umożliwiających określenie uniesienia początkowego przewodu jezdnego w stosunku do dachu lokomotywy, przyjęto warunki początkowe modelu równe statycznemu uniesieniu przewodu jezdnego pod działaniem siły nacisku statycznego i aerodynamicznego. Wyniki rozwiązania w postaci funkcji przemieszczenia pionowego punktu styku w warunkach rzeczywistych, zakładając zgodność obu funkcji w chwili początkowej, co wprowadza dodatkowy błąd systematyczny. Uzyskane wyniki w porównaniu z wynikami badań na szlaku przedstawiono na rys. 5.

Z przedstawionych wykresów wynika dostateczna zgodność ilościowa krzywych doświadczalnych i modelowych, na co wskazują podane na wykresach współczynniki korelacji. Analiza jakościowa wykazuje lepszą zgodność modelu z doświadczeniem dla wyższych prędkości jazdy odbieraka wzdłuż sieci trakcyjnej. Jest to spowodowane charakterem rozwiązań równania modelowego (45), które opisują sumę drgań o częstości równej częstości drgań własnych sieci oraz częstości zmian parametru sztywności sieci. Zmierzone amplitudy przemieszczeń w przęśle są mniejsze od amplitud przemieszczeń uzyskanych z modelowania analogowego. Wynika to m.in. z nieuwzględnienia siły tarcia suchego występującej w sieci trakcyjnej. Według danych zawartych w pracy [5] siła tarcia suchego w sieci trakcyjnej zależy od naciągu sieci, długości przęsła i położenia punktu styku z odbierakiem. Jest ona nawet trzykrotnie większa niż siła tarcia suchego w odbieraku prądu.

W celu zbadania wpływu tarcia suchego w sieci trakcyjnej przeprowadzono eksperyment na modelu, zakładając sumaryczną siłę tarcia suchego $w_c = w_o + w_s$ równą 10 N, 20 N, 30 N i 40 N. Na wykresach (rys. 6) przedstawiono wyniki badań modelowych, w porównaniu z wynikami doświadczeń, przy przejeździe z prędkością 165,5 km/h. Na wykresach podano również uzyskane współczynniki korelacji. Z przytoczonych wykresów wynika, że zwiększenie siły tarcia suchego w sieci trakcyjnej zwiększa dokładność modelu.

Przykłady zastosowania modelu

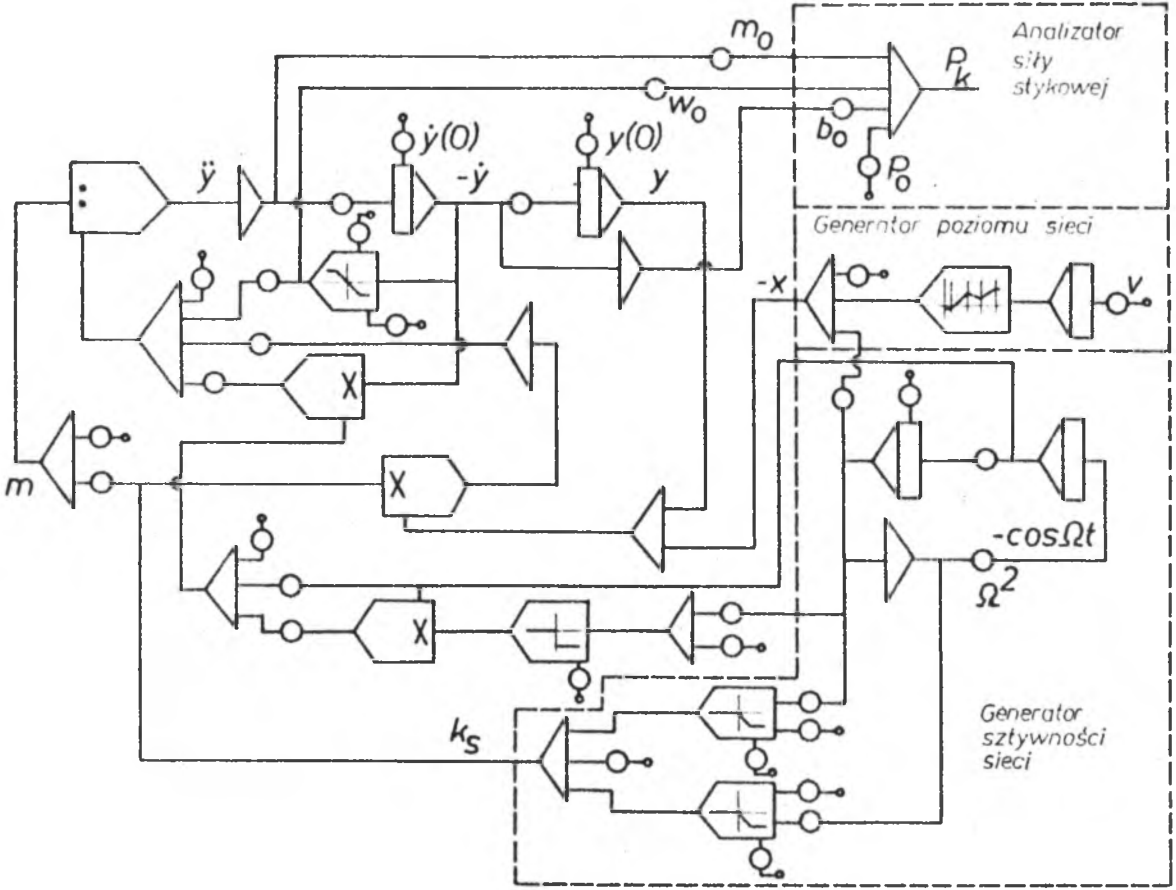
Przykład 1

Wpływ masy zredukowanej odbieraka prądu w zakresie prędkości 120 - 160 km/h na wartość maksymalną i minimalną siły stykowej.

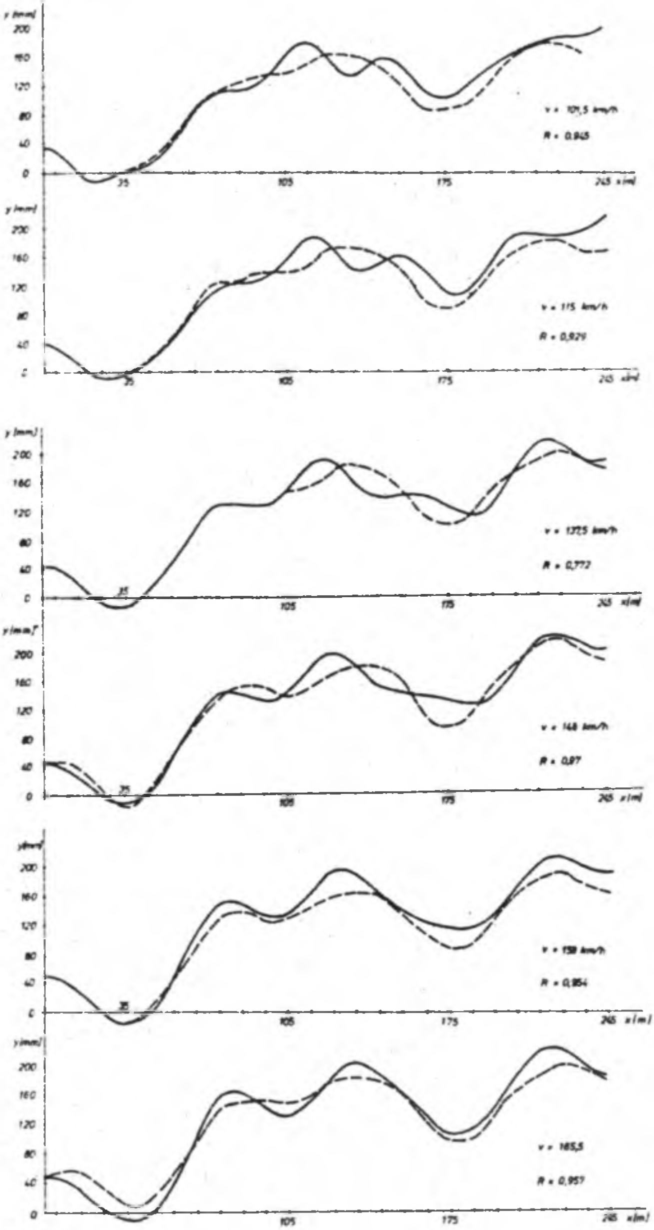
W eksperymencie posłużono się następującymi danymi:

- sieć trakcyjna ($Y_pC120-2C$):

$$\bar{k}_s = 3520\ \mathrm{N\,m}, \quad \varepsilon_k = 0{,}42, \quad \omega_s^2 = 21{,}9\ \mathrm{rad^2/s^2}, \quad L = 66\ \mathrm{m}$$

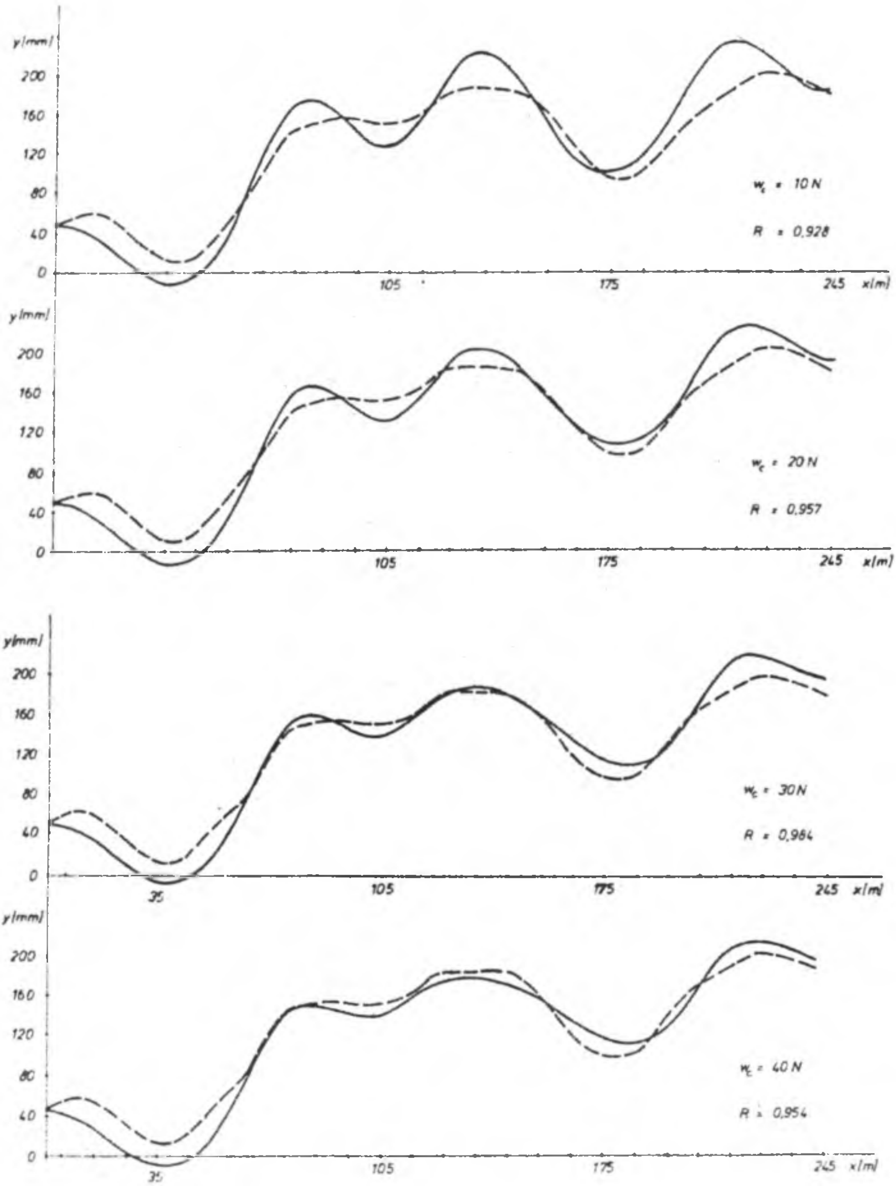


Rys. 4. Schemat analogowy rozwiązania równania (45)



Rys. 5. Wyniki badań analogowych współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną - przemieszczenie pionowe punktu styku; (linia ciągła - symulacja analogowa, linia przerywana - pomiar na szlaku):

a) prędkość jazdy 101,5, 115 km/h, b) prędkość jazdy 137,5, 148 km/h, c) prędkość jazdy 158, 165,5 km/h



Rys. 6. Współpraca odbieraka prądu z siecią trakcyjną - przemieszczenia pionowe punktu styku - przy prędkości 165,5 km/h, dla różnych wartości sumarycznej siły tarcia suchego 10 N, 20 N, 30 N, 40 N, (linia ciągła - symulacja analogowa, linia przerywana - pomiar na szlaku)

- odbierak prądu (AKP-4E)

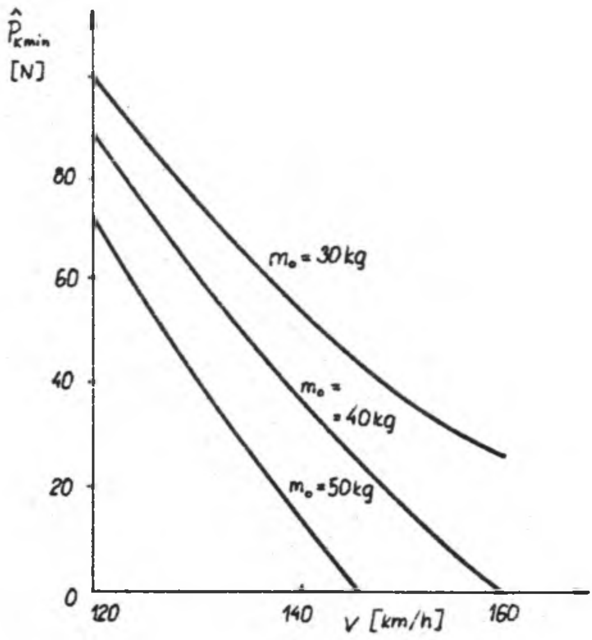
$$P_{ST} = 80\ N, \quad c = 0{,}03\ Ns^2/m^2, \quad w_o = 10\ N, \quad b_o = 50\ Ns/m.$$

W wyniku eksperymentu uzyskano następujące równanie regresji (m_o w [kg], v w [km/h]):

$$\hat{P}_{Kmin} = 569{,}7 + 4{,}66\ m_o - 6{,}16\ v - 0{,}0233\ m_o^2 + 0{,}0192\ v^2 + 0{,}035\ m_o v \quad [N] \tag{46}$$

$$\hat{P}_{Kmax} = -934{,}8 - 3{,}46\ m_o + 13{,}93\ v + 0{,}0133\ m_o^2 - 0{,}0442\ v^2 + 0{,}035\ m_o v \quad [N] \tag{47}$$

Wykreślone na podstawie równania (46) krzywe minimalnej wartości siły stykowej pokazano na rys. 7.



Rys. 7. Wpływ masy zredukowanej odbieraka prądu na minimalną wartość siły stykowej w zakresie prędkości 120-160 km/h

Przykład 2

Wpływ sztywności usprężynowania ślizgacza i nierównomierności sztywności sieci trakcyjnej na wartość minimalną i maksymalną siły stykowej.

Do rozwiązania posłużono się rozbudowanym modelem dynamicznym uwzględniającym podział odbieraka prądu na stopnie oraz różne warianty rozwiązania konstrukcyjnego połączenia między ślizgaczem a układem ramowym. Rozważono usprężynowanie niezależne i usprężynowanie zależne [7]. W opisie sztywności usprężynowania przyjęto następujące zależności funkcyjne:

- usprężynowanie zależne:

$$k_{o1} = \text{const} = e_1 \tag{48}$$

- usprężynowanie niezależne:

$$k_{o1} = e_1 + e_2 \cos\Omega t \tag{49}$$

Ponadto uwzględniono drgania pionowe lokomotywy wg następującej funkcji:

$$y_3 = A\cos\Omega_1 t \tag{50}$$

W obliczeniach posłużono się następującymi danymi:

- sieć trakcyjna:

$\bar{k}_s = 3720$ N/m, $\omega_s^2 = 28{,}6$ rad^2/s^2, $L = 70$ m

- odbierak prądu (indeksy: 1 - ślizgacz, 2 - układ ramowy):

$m_{o1} = 12{,}2$ kg, $m_{o2} = 22{,}6$ kg, $w_{o1} = 3$ N, $w_{o2} = 10$ N, $b_{o1} = 0$,

$b_{o2} = 0$, $P_1 = 0{,}025\, v^2$, $P_2 = 0{,}011\, v^2 + P_{ST}$, $P_{ST} = 80$ N,

$e_2 = 635$ N/m

- przemieszczenia dachu lokomotywy:

$A = 0{,}01$ m, $\Omega_1 = 30$ rad/s

Eksperyment przeprowadzono przy prędkości $v = 160$ km/h, w wyniku otrzymano następujące równania regresji (k_{o1} w [N/m]):

- usprężynowanie zależne:

$$\hat{P}_{kmin} = 49{,}98 - 2{,}146\,10^{-2} e_1 + 923{,}3\,\varepsilon_k + 1{,}2755\,10^{-6} e_1^2 + 2598{,}2\,\varepsilon_k^2 + 0{,}44\, e_1 \varepsilon_k \quad [\mathrm{N}] \tag{51}$$

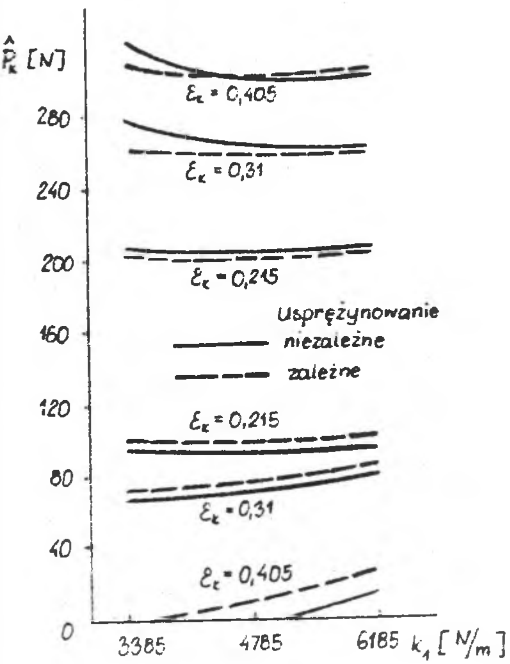
$$\hat{P}_{kmax} = 57,41 - 9,75\ 10^{-3}e_1 + 916,2\ \varepsilon_k + 9,34\ 10^{-7}e_1^{\,2} + 640,5\ \varepsilon_k^{\,2} + 3,8\ 10^{-3}e_1\ \varepsilon_k \quad [N] \tag{52}$$

- usprężynowanie niezależne:

$$\hat{P}_{Kmin} = 14,27 - 2,295\ 10^{-2}e_1 + 1116\ \varepsilon_k + 1,44\ 10^{-6}e_1^{\,2} + 2956,3\ \varepsilon_k^{\,2} + 0,0512\ e_1\ \varepsilon_k \quad [N] \tag{53}$$

$$\hat{P}_{Kmax} = 79,12 - 3,513\ 10^{-2}e_1 + 1207,5\ \varepsilon_k + 3,91\ 10^{-6}e_1^{\,2} + 1054\ \varepsilon_k^{\,2} - 0,0076\ \varepsilon_k e_1 \quad [N] \tag{54}$$

Wykreślone na podstawie równań (51) - (54) krzywe przedstawiono na rys.8.



Rys. 8. Wpływ sztywności usprężynowania ślizgacza na wartość maksymalną i minimalną siły stykowej przy różnych współczynnikach nierównomierności sztywności sieci trakcyjnej (prędkość jazdy 160 km/h)

<u>Przykład 3</u>

Przejazd teoretyczny przez zakres rezonansu parametrycznego.

W celu zbadania zachowania się układu w zakresie rezonansu parametrycznego w modelu zastosowano zmienną prędkość ruchu odbieraka prądu wzdłuż sieci trakcyjnej wg funkcji:

$$v = \begin{cases} v_o + at & v < v_1 \\ v_1 & v \geq v_1 \end{cases} \tag{55}$$

Powoduje to liniową zmianę częstości wymuszenia parametrycznego. W obliczeniach, które przeprowadzono posługując się językiem symulacyjnym SIMLAN, przyjęto następujące dane:

- odbierak prądu AKP-4E:

$m_o = 32$ kg, $P_{ST} = 80$ N, $P_{AE} = 0,026v^2$, $w_o = 0$, $b_o = 0$

- sieć trakcyjna $Y_pC120-2C$:

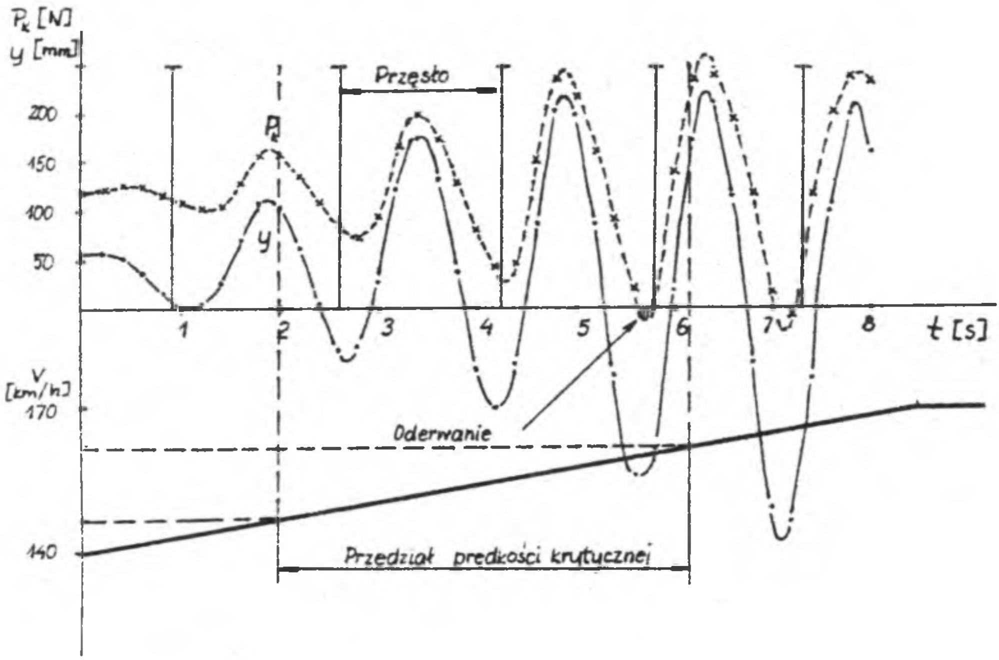
$\bar{k}_s = 3520$ N/m, $s = 4,68$ rad/s, $\varepsilon_k = 0,42$, $b_s = 0$, $w_s = 0$

prędkość krytyczna $v_k = 147,4 - 161,8$ km/h (tab. 3)

- parametry prędkości:

$v_o = 140$ km/h, $v_1 = 170$ km/h, $a = 1$ m/s^2.

Uzyskane rozwiązanie przedstawiono na rys. 9.



Rys. 9. Przejazd teoretyczny odbierakiem prądu typu AKP-4E wzdłuż sieci trakcyjnej $Y_pC120-2C$ z prędkością jednostajnie przyspieszoną w zakresie 140 do 170 km/h (prędkość krytyczna układu: 147,4-161,8 km/h)

Podsumowanie

Zaproponowany model dyskretny współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną (model III) jak wynika z porównania jego rozwiązań z badaniami na szlaku daje dostateczną zgodność. Uwzględnienie w modelu pochodnej zmiennej masy zredukowanej sieci trakcyjnej powoduje rozszerzenie analizowanych zakresów rozwiązań niestatecznych w porównaniu z modelami I i II. Model jest przydatny przede wszystkim do badań wpływu parametrów odbieraka prądu na jakość współpracy z siecią trakcyjną. Z przytoczonych przykładów wykorzystania modelu wynikają następujące wnioski:

- im większa masa odbieraka prądu, tym mniejsza jest minimalna wartość siły stykowej, a tym samym większe prawdopodobieństwo oderwania odbieraka;
- istotny wpływ na minimalną wartość siły stykowej ma nierównomierność sztywności sieci trakcyjnej; praktycznie ruch z prędkością 160 km/h wzdłuż sieci trakcyjnej o współczynniku nierównomierności $\varepsilon_k > 0,4$ nie jest możliwy bez oderwań (dla spotykanych mas odbieraków prądu);
- na minimalną wartość siły stykowej praktycznie nie ma wpływu sztywność i sposób rozwiązania usprężynowania ślizgacza względem układu ramowego.

Powyższe wnioski są zgodne z przytoczoną analizą teoretyczną, gdyż zgodnie z zależnością (44) na zakres prędkości krytycznej mają przede wszystkim wpły parametry k_s, m_o, ω_s ε_k. Istotnym czynnikiem jest prędkość ruchu wzdłuż sieci. Z przykładów wynika, że minimalna wartość siły stykowej zbliża się do zera, gdy prędkość dąży do prędkości krytycznej, uzasadnia to celowość analizy teoretycznej zakresów rozwiązań niestatecznych modelu.

Powyższe rozważania przeprowadzono, przy założeniu istotnej idealizacji układu odbierak prądu - sieć trakcyjna. Dalszą analizę w celu głębszego poznania zjawisk towarzyszących współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną należy prowadzić w kierunku:

- udoskonalenia opisu sieci trakcyjnej, w szczególności uwzględniając ciągły charakter rozłożenia jej parametrów,
- uwzględnienia losowego charakteru szeregu parametrów układu, jak np. siły docisku aerodynamicznego.

LITERATURA

[1] Banek A., Kaniewski M.: Badania sieci trakcyjnej CMK dla wprowadzenia prędkości jazdy 160 km/h. Temat nr 3356 17 COBiRTK, Warszawa 1977.

[2] Beljaev I.A. i in.: Tokopriemniki elektropodvižnogo sostava. "Transport" Moskwa 1970.

[3] Demidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności. WNT, Warszawa 1972.

[4] Ebeling H.: Stromabnahme bei hohen Geschwindigkeiten - Probleme der Fahrleitungen und Stromabnehmer. Elektriche Bahnen nr 2/3 1969.

[5] Fidrych Z.: Eksperymentalne określenie dynamicznych parametrów sieci trakcyjnej. Przegląd Kolejowy Elektrotechniczny nr 6, 1975.

[6] Grajnert J.: Drgania ruchomego układu dyskretnego współpracującego z układem ciągłym na przykładzie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Raport Inst. Konstr. i Ekspl. Masz. PWr Seria Preprinty nr 124, Wrocław 1979.

[7] Grajnert J.: Wpływ sposobu usprężynowania ślizgacza odbieraka prądu na jakość współpracy z siecią trakcyjną. II Krajowa Konferencja - Pojazdy Szynowe. Kraków - Piwniczna 1977.

[8] Jarosz T.: Badania i wytyczne dla konstrukcji odbieraków prądu do dużych prędkości jazdy (140-160 km/h). Temat MK 107-15-00-00-02 COBiRTK, Warszawa 1974.

[9] Roman Z.: Współpraca dynamiczna odbieraka prądu z siecią trakcyjną i jej wpływ na warunki odbioru prądu poprzez silnie obciążony zestyk ślizgowy. Prace COBiRTK zeszyt 75/76, Warszawa 1980.

Recenzent: Doc. dr inż. Zbigniew Pidrych

Wpłynęło do Redakcji w sierpniu 1984 r.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОПРИЕМНИКА И КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ

Р е з ю м е

В статье сформировано простую модель взаимодействия токоприёмника и контактной подвески. Совершено оценки устойчивости решений модели в сравнении с оценкой других известных моделей. Сравнено решения уточненной модели с результатами исследований исполненных на железной дороге ЦОБ и РТК-ом (СОБ RTK - Железнодорожный Научно-Исследовательный Центр). Подано примеры использования модели до анализа динамических свойств системы токоприёмник - контактная подвеска.

ESTIMATE OF THE STABILITY OF THE MODELS OF COLLABORATION CURRENT COLLECTOR AND OVERHEAD CONTACT SYSTEM

S u m m a r y

A simple discrete model of collaboration between a current collector and a overhead contact system was formulated in the article. The stability of solutions made with the model was evaluated and compared with solutions based on other known models. The solutions were compared with inwestigations carried out in the field by COB i RTK (Central Centre for Research and Developement of Railway Technology). Examples set current collector - overhead contact system were given.