

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Beskid Śląski, 1990

Jerzy Cabański

Wydział Mechaniczny

ATR Bydgoszcz

MODEL PŁYTY UOGÓLNIONEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono model płyty uogólnionej, tj. płyty prostokątnej, konstrukcyjnie niejednorodnej, podpartej swobodnie na obwodzie, o dowolnie rozłożonym obciążeniu oraz o rozmaitych więzach. Drgania wymuszone ustalone płyty uogólnionej opisano dystrybucyjnym równaniem różniczkowym. Dowolny kształt rzeczywistej płyty znajduje się w prostokątnym obrysie płyty uogólnionej.

1. Wstęp

Powszechność stosowania płyt w technice stawia nauce zadanie opracowania nowych analitycznych metod w zakresie rozwiązania problemów mechaniki płyt. Dotychczas stosowane metody są mało efektywne, ponieważ dotyczą przypadków szczególnych [1, 2, 3, 4, 5], lub wymagają stosowania metod numerycznych np. MES.

Dlatego proponuje się stosować uogólnioną analityczną metodę rozwiązywania problemów konstrukcyjnie niejednorodnych płyt o dowolnych kształtach, dowolnych obciążeniach i rozmaitych warunkach brzegowych.

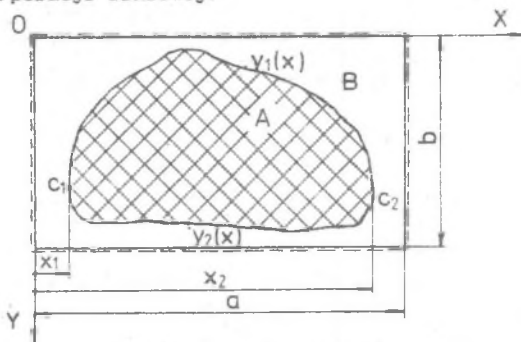
Pojęcie konstrukcyjnej niejednorodności jest argumentowane zmiennymi wielkościami mechanicznymi będącymi funkcjami zmiennych x , y , w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych pokrywających się z płaszczyzną środkową płyty w jej konfiguracji pierwotnej.

2. Opis modelu płyty uogólnionej

W celu uogólnienia zagadnienia wprowadzono pojęcie płyty uogólnionej, tj. konstrukcyjnie niejednorodnej, prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie, o dowolnie rozłożonym obciążeniu oraz rozmaitych więzach. Płyta uogólniona składa się z rzeczywistej płyty o dowolnym kształcie i zajmującej obszar A oraz z przedłużenia fikcyjnego leżącego w obszarze B (rys.1). Dla płyty uogólnionej przyjmuje się, z punktu widzenia analitycznego, że wszystkie wielkości mechaniczne są zbiorem funkcji uogólnionych [6] w płaskiej przestrzeni euklidesowej, pokrywającej się z płaszczyzną środkową płyty w prostokącie $(a \times b)$ (rys.1).

Jednospójna powierzchnia płyty uogólnionej składa się z powierzchni ugięcia części rzeczywistej i fikcyjnej. Ślady powierzchni ugięcia na płaszczyźnie środkowej tworzą prostokątny obrys płyty uogólnionej.

W celu spełnienia całokształtu warunków brzegowych uwzględniono w równaniu różniczkowym problemu składniki zależne od reakcji więzów. Założono przy tym, że więzy są liniowo-sprężyste. Jednak dla więzów idealnie sztywnych zagadnienie staje się osobliwe, ale ponieważ płyta jest układem liniowo-sprężystym, to rozwiązanie graniczne uzyskuje się przez zastosowanie interpolacji liniowej.



Rys.1. Schemat płyty uogólnionej

3. Matematyczny model drgań płyty uogólnionej

Zjawisko drgań wymuszonych ustalonych płyty uogólnionej opisane jest równaniem różniczkowym

$$\begin{aligned} \nabla^2(D\nabla^2 w) - 1(1-\nu)L(D, w) + Hw - H_0 \nabla^2 w - \alpha_1(H_0, w) + \\ + \omega^2 \mu w + \omega^2 m \nabla^2 w + \omega^2 \alpha_2(m, w) = Q \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie oznaczono:

$w = w(x, y)$ - amplituda ugięcia płyty

$D = D(x, y)$ - sztywność zginania płyty

$H = H(x, y)$ - sztywność translacyjnych więzów sprężystych

$H_0 = H_0(x, y)$ - sztywność rotacyjnych więzów sprężystych

$\mu = \mu(x, y)$ - masa przypadająca na jednostkę powierzchni środkowej płyty

$m = m(x, y)$ - moment bezwładności masy przypadającej na jednostkę powierzchni płyty

$Q = Q(x, y)$ - amplituda siły wymuszającej przypadającej na jednostkę powierzchni środkowej płyty

ν - liczba Poissona

ω - częstotliwość kołowa drgań

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad - \text{operator Laplace'a}$$

$$L(D, w) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad - \text{operator różniczkowy}$$

$$\alpha_1(H_0, w) = \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial H_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad - \text{operator różniczkowy}$$

$$\alpha(mw) = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad - \text{operator różniczkowy}$$

Sztywność płyty określona jest dystrybucyjnie następującym wzorem:

$$D(x, y) = D_0 f_D(x, y) [H(y-y_1) - H(y-y_2)] [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \quad (2)$$

gdzie:

D_0 - wielkość stała

$f_D(x, y)$ - funkcja bezwymiarowa

H - funkcja Heaviside'a

Podobnie określa się rozmieszczenie masy płyty. Dystrybucyjny zapis dowolnie rozłożonego obciążenia można znaleźć w pracy [3]. Analogicznie zapisuje się rozmieszczenie reakcji więzów.

Tak pomyślany model może posłużyć uogólnieniu analitycznych metod rozwiązywania problemów płyt.

LITERATURA

- [1] Kacner A. Pręty i płyty o zmiennej sztywności. PWN Warszawa 1969.
- [2] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenia statystyczne. Arkady Warszawa 1968.
- [3] Jemielita G.: Metoda dystrybucyjna znajdowania ugięć płyt prostokątnych dowolnie obciążonych. Archiw. Inżyn. Łąd.t.20, z.1.1974.
- [4] Mazurkiewicz Z.: The problem of deflection surface of rectangular isotropic and non-homogeneous plate. Bull. Acad. Polon. Sci. techn. 8, nr 1, 1960.
- [5] Solecki R., Szymkiewicz J.: Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.
- [6] Zemanian A.H.: Teoria Dystrybucji i analiza transformat. PWN, Warszawa 1969.

МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОЙ ПЛИТЫ

Резюме

В работе показана модель обобщенной плиты, т.е. прямоугольной плиты неоднородной по конструкции, опирающейся свободно на окружности, с произвольно распределенной нагрузкой, а также с различными связями. Вынужденные определенные колебания обобщенной плиты описаны обобщенным дифференциальным уравнением. Произвольная форма реальной плиты находится в прямоугольном контуре обобщенной плиты.

MODEL OF GENERALIZED PLATE

Summary

In the paper a model of generalized plate is presented. It is constructional heterogeneous, rectangular plate, circuitly simply supported with optional distributed load and various constraints. Forced steady vibration of a generalized plate is described by generalized differential equation. Optional shape of a real plate is located inside rectangular contour of generalized plate.