

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Beskid Śląski, 1990

Stanisław Dubiel, Andrzej Homziuk

Wojskowa Akademia Techniczna

MODELOWANIE SPOTKANIOWEGO PROBLEMU MINIMALNO-CZASOWEGO

Streszczenie. Wyznaczono optymalny program sterowania rakieta gwarantujący najkrótszy czas dotarcia do punktu spotkania. Optymalizację przeprowadzono zasadą maksimum Pontriagina. Zależnie od koniecznej zmiany kierunku lotu wyznaczono odpowiednie strefy sterowalności, różniące się programem sterowania.

Wprowadzenie.

Optymalizację lotu raket prowadzono głównie dla dwóch rodzajów kryteriów. Pierwsze to minimum strat energetycznych (minimum zużycia paliwa) potrzebnego do przejścia od punktu startu do punktu spotkania, drugie to minimum czasu osiągnięcia punktu spotkania. Problemowi minimum zużycia paliwa poświęcono wiele prac i nadal problem ten jest badany, choć sformułowanie jego nie zmienia zadania w sposób istotny. Nowsze prace zajmują się poszukiwaniem sterowań w klasie funkcji uogólnionych.

Bardziej problematyczne okazało się zagadnienie minimalno-czasowego sterowania lotem. Zadanie to można sformułować poprawnie tylko jako zagadnienie warunkowe z ograniczeniem przyspieszeń i prędkości. Brak sensownych ograniczeń prowadzi do rozwiązań trywialnych, które mimo swej poprawności nie posiadają znaczenia praktycznego. W referacie sformułowano problem minimalno-czasowy spotkania w formie zapewniającej istnienie rozwiązań nietrywialnych.

1. Sformułowanie problemu

Poszukiwanie sterowań minimalno-czasowych oparto na modelu małej rakiety przeciwlotniczej, w której:

- pominięto równania wahań jako bryły;
- można rozdzielić układy równań ruchu podłużnego i bocznego;
- przyjęto układ równań ruchu w płaszczyźnie poziomej;
- wprowadzono dwa sterowania: przyspieszenie całkowite styczne oraz wychylenie sterów rakiety;
- na wychylenie sterów rakiety nałożono więzy ograniczające to sterowanie w zależności od przeciążeń normalnych.

Ruch rakiety w płaszczyźnie poziomej opisuje układ równań:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= n_c g - C \frac{S \dot{\gamma} V^2}{2m}, \\ \dot{V} \dot{\gamma} &= C \frac{S \dot{\gamma} V^2}{2m} \delta, \\ \dot{x} &= V \cos \gamma, \\ \dot{y} &= V \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie:

γ - kąt odchylenia wektora prędkości od osi x ;

V - prędkość rakiety;

x, y - współrzędne położenia środka masy rakiety;

S - powierzchnia odniesienia współczynników aerodynamicznych;

δ - kąt wychylenia skrzydła.

Program sterowania minimalno-czasowego wyznaczono z zasady maksimum Pontriagina. Zakłada się, że rakieta startuje pod określonym kątem $\gamma_0 = 0$, a jej celem jest dotarcie w najkrótszym czasie do punktu końcowego y_1, x_1 . Układ równań ruchu rakiety sprowadzić można do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= A x_1 u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 \cos x_2, \\ \dot{x}_4 &= x_1 \sin x_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie:

$$x_1 = V, \quad x_2 = \gamma, \quad x_3 = x, \quad x_4 = y, \quad u_1 = n_c g - C \frac{S \dot{\gamma} V^2}{2m}, \quad u_2 = \delta, \quad A = C \frac{S \dot{\gamma}}{2m}.$$

W zadaniu przyjęto najbardziej naturalne ograniczenia lotu:

- a) na maksymalne przyspieszenie styczne:

$$0 \leq u_1 \leq a_{\max} \quad (1.3)$$

- b) na maksymalne wychylenie sterów:

$$u_2 - (\delta^{\max})^2 \leq 0 \quad (1.4)$$

c) na maksymalne przyspieszenie normalne:

$$(Ax_1^2 u_2^2)^2 - a_{\text{vs}}^2 \leq 0 \quad (1.5)$$

d) prędkości lotu (która nie powoduje uszkodzeń termicznych):

$$0 \leq x_1 \leq v_{\text{vs}} \quad (1.6)$$

Zadanie sprowadza się do znalezienia sterowań optymalnych $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ przeprowadzających układ z punktu początkowego:

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \quad (1.7)$$

do rozaimności końcowej Θ^1 określonej równaniami:

$$\begin{aligned} x_1 - x_1^1 &= 0, \\ x_3 - x_3^1 &= 0, \\ x_4 - x_4^1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

przy minimum funkcjonału jakości:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt \quad (1.9)$$

2. Wyznaczenie równań sprzężonych do równań ruchu

Równania ruchu rakiety (1.2) oraz wskaźnik jakości (1.9) prowadzą do funkcji Hamiltona:

$$H(\lambda, x, u) = \lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 Ax_1 u_2 + \lambda_3 x_1 \cos x_2 + \lambda_4 x_1 \sin x_2 \quad (2.1)$$

Ze względu na więzy nałożone na sterowanie u_2 w zależności od zmiennej stanu x_1 (1.5) ogólna postać równań sprzężonych przyjmie postać:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \quad (2.2)$$

gdzie: $v = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right)^{-1}$, $R = u_2 - \frac{a_{\text{vs}}}{Ax_1^2} = 0$,

a układ równań sprzężonych do równań ruchu (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -(\lambda_3 \cos x_2 + \lambda_4 \sin x_2) - \lambda_2 Au_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -(\lambda_3 \cos x_2 + \lambda_4 \sin x_2) + \lambda_2 Au_2, \\ \dot{\lambda}_3 &= x_1 (\lambda_3 \sin x_2 - \lambda_4 \cos x_2), \\ \dot{\lambda}_4 &= \lambda_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pierwsze równanie układu równań (2.3) obowiązuje wówczas, gdy:

$$u_2 - \frac{a_{\text{vs}}}{Ax_1^2} < 0, \quad (2.4)$$

co jest jednoznaczne z $u_2 = \delta^{\max}$. W przypadku gdy:

$$u_2 - \frac{a_{v2}}{Ak_2} = 0, \quad (2.5)$$

obowiązuje drugie równanie na λ_1 . Z równania (2.5) wyznaczyć można charakterystyczną prędkość rakiety V_m , gdzie:

$$V_m = \sqrt{a_{v2}/A\delta^{\max}}. \quad (2.6)$$

Zatem pierwsze równanie układu równań (2.3) obowiązuje wówczas, gdy $x_1 < V_m$, natomiast drugie, gdy $x_1 \geq V_m$.

Funkcja Hamiltona oraz równania sprzężone w powyżej przedstawionej postaci nastroczają dużo trudności przy ich analizie. Proponuje się pewną modyfikację tych równań. Wprowadza się następujące związki:

$$\begin{aligned} \lambda_3 \cos x_2 + \lambda_4 \sin x_2 &= \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \cos(x_2 - \arctg \frac{\lambda_4}{\lambda_3}), \\ \lambda_3 \sin x_2 - \lambda_4 \cos x_2 &= \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \sin(x_2 - \arctg \frac{\lambda_4}{\lambda_3}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ostatecznie otrzymuje się przekształconą funkcję Hamiltona:

$$H(\bar{\lambda}, x, u) = \bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1 u_1 + \bar{\lambda}_2 Ak_1 u_2 + x_1 \cos(x_2 - \bar{\lambda}_3) \quad (2.8)$$

oraz układ równań sprzężonych:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\lambda}}_1 &= -\cos(x_2 - \bar{\lambda}_3) - \lambda_2 Au_2, & \text{gdy } x_1 < V_m, \\ \dot{\bar{\lambda}}_1 &= -\cos(x_2 - \bar{\lambda}_3) + \lambda_2 Au_2, & \text{gdy } x_1 \geq V_m, \\ \dot{\bar{\lambda}}_2 &= x_1 \sin(x_2 - \bar{\lambda}_3), \\ \dot{\bar{\lambda}}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}; & \bar{\lambda}_2 &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}; \\ \bar{\lambda}_3 &= \arctg \frac{\lambda_4}{\lambda_3}; & \bar{\lambda}_4 &= \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}. \end{aligned}$$

W dalszej części referatu w celu uproszczenia zapisu będą stosowane oznaczenia λ zamiast $\bar{\lambda}$.

3. Warunki transversalności

Z warunków transversalności dotyczących rozmaitości końcowej (1.8) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t_1) & \text{ - dowolne,} \\ \lambda_2(t_1) & = 0, \\ -\pi < \lambda_3(t_1) & < \pi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ponieważ wartość końcowa zmiennej x_1^1 jest ograniczona nierównością (1.6), dlatego, wyznaczając sterowania optymalne, należy dopuścić dwie możliwości:

a) Sterowanie daje takie przejście, że:

$$V_0 < x_1^1 < V_m \quad (3.2)$$

Wówczas wobec dowolności x_1^1 końcowy warunek transversalności prowadzi do:

$$\lambda_1(t_1) = 0 \quad (3.3)$$

b) Sterowanie daje takie przejście, że:

$$x_1^1 = V_m \text{ lub } x_1^1 = V_0 \quad (3.4)$$

Wówczas pozostanie prawdziwa zależność (3.1), że $\lambda_1(t_1)$ jest wielkością dowolną.

Po osiągnięciu prędkości V_m dalszy lot rakiety odbywa się z $x_1(t) = V_m = \text{const}$, co jest równoznaczne z $u_1(t) = 0$. Tak więc bez względu na przyjęty wariant sterowania:

$$\lambda_1(t_1) u_1(t_1) = 0 \quad (3.5)$$

4. Wyznaczenie sterowań optymalnych

Z funkcji Hamiltona (2.8) odpowiednio dla sterowań $u_1(t)$ oraz $u_2(t)$ wynikają funkcje przełączania $\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \lambda_1(t), \\ \sigma_2(t) &= \lambda_2(t) A x_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ponieważ przypadek, gdy $x_1 = 0$ dla $t > t_0$ można pominąć, a stała $A > 0$, dlatego można zapisać:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \lambda_1(t), \\ \sigma_2(t) &= \lambda_2(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

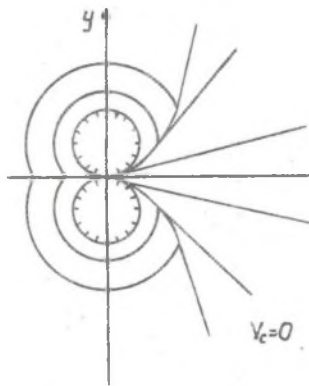
Z funkcji przełączania (4.2) wynikają następujące zależności na przebieg sterowań w czasie:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{\text{max}} && \text{jeśli } \lambda_1(t) > 0 \\ u_1(t) &= 0 && \text{jeśli } \lambda_1(t) < 0 \\ u_2(t) &= +g_{\text{max}} && \text{jeśli } \lambda_2(t) > 0 \text{ i } x_1 < V_m \\ u_2(t) &= -g_{\text{max}} && \text{jeśli } \lambda_2(t) < 0 \text{ i } x_1 < V_m \\ u_2(t) &= +a_{\text{vd}} / A x_1^2 && \text{jeśli } \lambda_2(t) > 0 \text{ i } x_1 \geq V_m \\ u_2(t) &= -a_{\text{vd}} / A x_1^2 && \text{jeśli } \lambda_2(t) < 0 \text{ i } x_1 \geq V_m \\ u_{\text{zobob}}(t) &= 0 && \text{jeśli } x_2(t) = \lambda_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

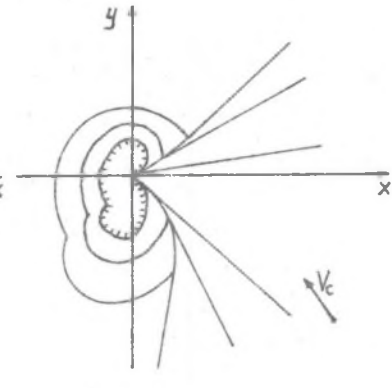
Rozwiązania na u_2 w zbiorze (4.3) są rozwiązaniami alternatywnymi. Zależnie od potrzeby ich wykorzystania wyodrębniło odpowiednio strefy sterowalności.

5. Strefy sterowalności

Strefy sterowalności wyznaczono dla spotkania z celem nieruchomym (rys.1) i celem ruchomym (rys.2). Strefy te reprezentują obszary położenia celu czy punktów spotkania odpowiadających podzbiorowi sterowań gwarantujących dotarcie do punktów spotkania. Strefy punktów spotkania dla celu ruchomego wyznaczono dla celu prostoliniowego o stałej prędkości. Strefy te skonstruowano w odniesieniu do kierunku ruchu rakiety w chwili startu, dla jednostronnego sterowania kierunkiem. Występuje wówczas strefa niedostępna, której granicą są punkty spotkania dla $V \leq V_m$ ze sterowaniem $u_z = \delta_{max}$ i $u_z \leq \eta_{x_{sp}}$.



Rys. 1



Rys. 2.

LITERATURA

- [1] Dubiel S.: "Minimalno-czasowy program zespołu napędowego rakiety". Biuletyn WAT nr 10, 1987r.
- [2] Dubiel S., Homziuk A.: "Minimalno-czasowe strefy sterowalności rakiet w locie płaskim, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, (w druku) 1990r.
- [3] Leitmann G.: "Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego" WNT, Warszawa 1971r.
- [4] Bołtiański W.G.: "Matematyczne metody sterowania optymalnego" WNT, Warszawa 1971r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВСТРЕЧНОЙ МИНИМАЛЬНО-ВРЕМЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ

Резюме

В работе представлена оптимальная программа управления ракетой, которая гарантирует минимальное время для достижения пункта встречи. Оптимизация производилась по принцип максимумы Понтрягина. В зависимости от необходимых изменений направления полета, определены соответствующие зоны управляемости, отличающиеся программой управления.

MODELING OF MINIMUM-TIME IMPACT PROBLEM

Summary

It is determined optimal program of rocket control guaranting minimum-time flight to impact point. Optimization is provered by Pontryagin's maximum principle. According to the range of disired change of flight direction were determined, corespondenting zones of controllability for different programs of control